

§ 23. Взаимное пересечение поверхностей

265*. Построить: а) проекции линии взаимного пересечения поверхностей призмы и сферы; б) натуральный вид сечения $A-A$ (рис. 248, а).

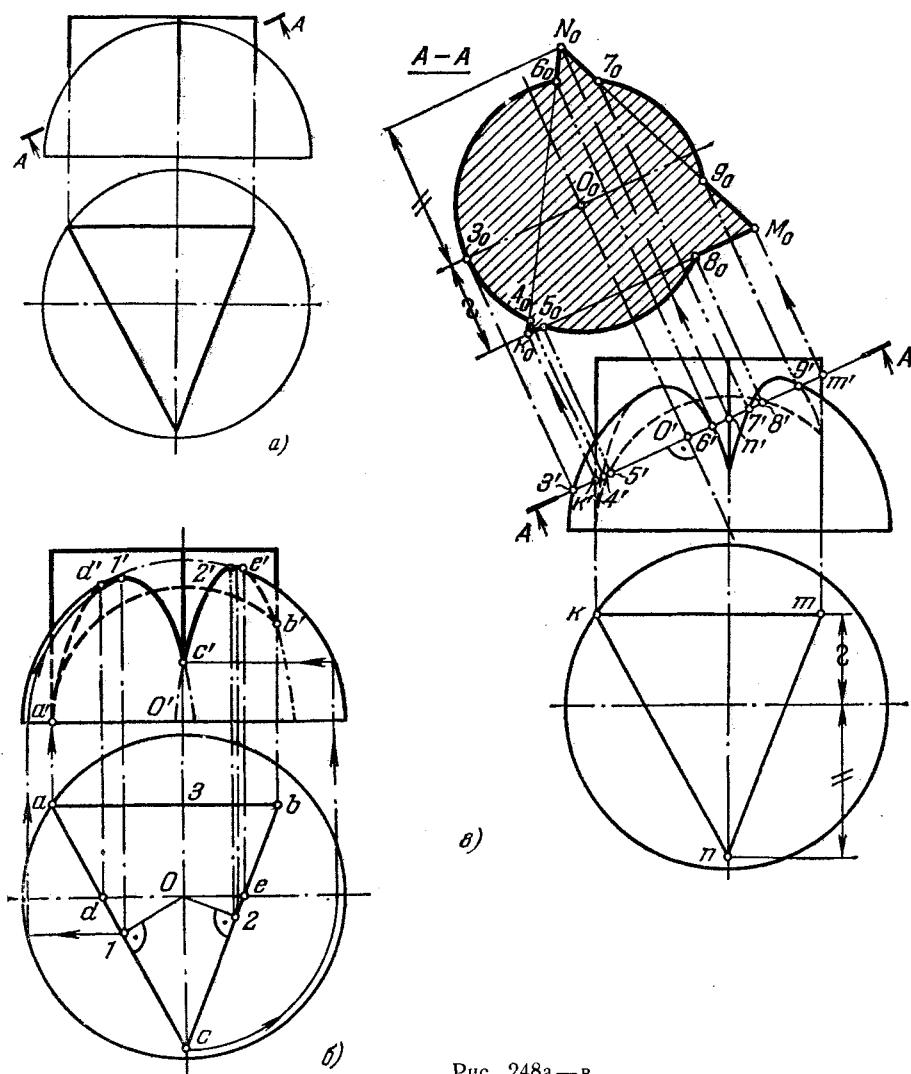


Рис. 248а—в.

Решение. В данном случае одна из проекций линии пересечения, а именно горизонтальная, известна, так как сливается с горизонтом. проекцией боковой поверхности.

ности призмы. Это значительно упрощает построение: оно сводится к нахождению фронт. проекций точек, принадлежащих поверхности сферы, по их горизонт. проекциям. Так, проекция c' (рис. 248, б) найдена при помощи горизонтали на поверхности сферы: эта горизонталь имеет радиус Oc . Точки d' и e' получены на фронт. проекции главного меридиана сферы по проекциям d и e , точка a' — на фронт. проекции экватора.

Другим обстоятельством, имеющим большое значение в построении, является то, что получаемая линия пересечения известна: каждая боковая грань призмы пересекает поверхность сферы по дуге окружности. Из этих дуг одна, лежащая на задней грани, проецируется на пл. V без искажения; ее радиус равен $a - 3$. Две другие дуги проецируются на пл. W в виде дуг эллипсов.

Проведя перпендикуляры $O-1$ и $O-2$, мы определяем горизонт. проекции вершин эллипсов — точки l и 2 , по ним находим проекции l' и $2'$. На рис. 248, б дуги эллипсов показаны за точками c' и b' штрих-пунктирными линиями. Тело на рис. 248, б представлено как монолит (например, отливка). Поэтому сечение на рис. 248, в представлено в виде одной фигуры, что подчеркивается и штриховкой.

266. Построить: а) проекции линии пересечения поверхностей призмы и цилиндра; б) натуральный вид сечения $A-A$ (рис. 249).

Указание. Горизонт. проекция линии пересечения в задачах 266 и 267 совпадает с частью соответствующей проекции тела.

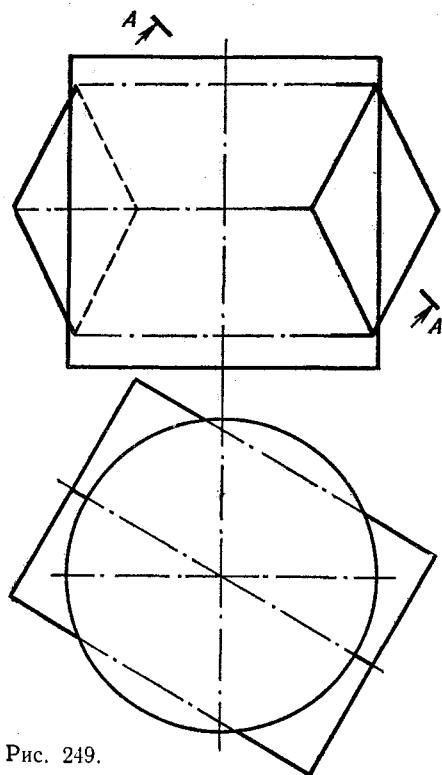


Рис. 249.

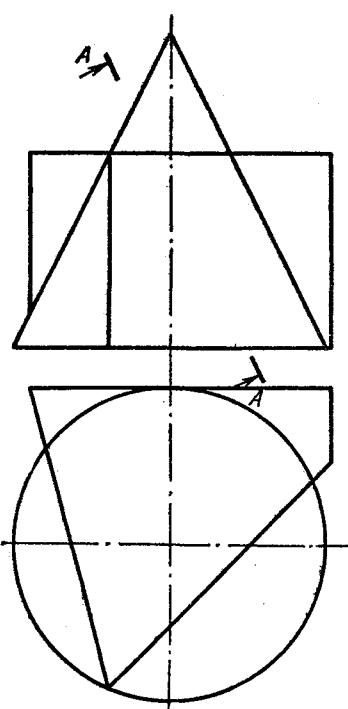


Рис. 250.

267. Построить: а) проекции линии пересечения поверхностей призмы и конуса; б) натуральный вид сечения $A-A$ (рис. 250).

268. Построить: а) проекции линии пересечения поверхностей призмы и циркульного кольца; б) натуральный вид сечения $A-A$ (рис. 251).

Указание. Фронт. проекция линии пересечения совпадает с частью соответствующей проекции призмы.

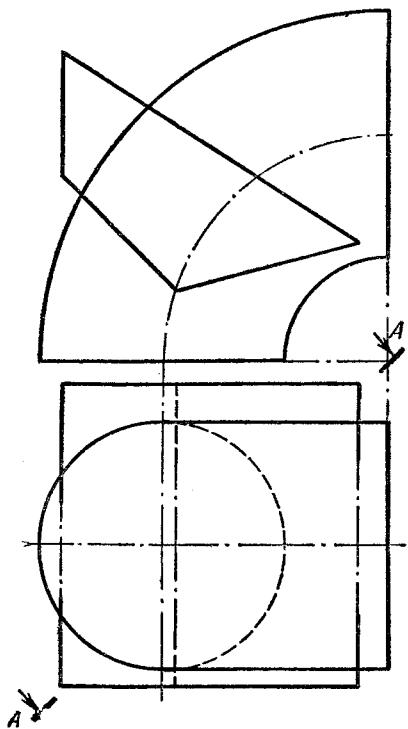


Рис. 251.

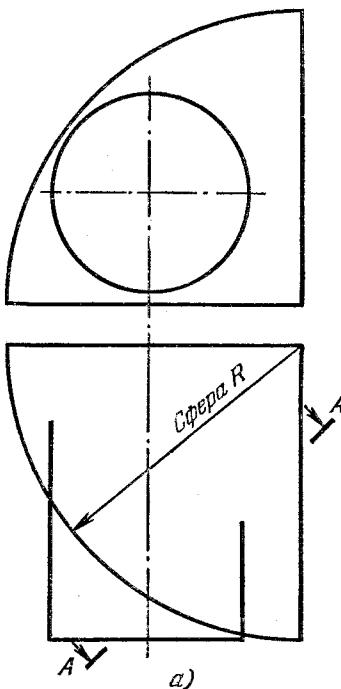


Рис. 252а.

269*. Построить: а) проекции линии пересечения поверхностей цилиндра и сферы; б) натуральный вид сечения $A-A$ (рис. 252, а).

Решение. Все точки фронт. проекции цилиндра (рис. 252, б) могут быть приняты за фронт. проекции точек, принадлежащих искомой линии пересечения. А отсюда легко найти, например, проекции d, m, n на горизонт. проекциях соответствующих параллелей сферы, проекции a, b, k на горизонт. проекциях дуг окружностей, проводимых на фронт. проекции сферы радиусами $c'a', c'b', c'k'$. Точки a и b представляют собою горизонт. проекции характерных точек линии пересечения, наименее и наиболее удаленных от пл. V . Проекции m', m и n', n определяют точки пересечения очерковых образующих цилиндра со сферой.

Изображенное тело — сочетание части сферы и цилиндра — рассматривается как монолитное. При построении сечения $A-A$ получено сечение части сферы, ограниченное дугой окружности радиуса O_0J_0 и двумя отрезками прямых, по которым плоскость $A-A$ пересекает «четвертинки» кругов, ограничивающих справа и снизу рассматриваемую часть сферы. Затем получена часть эллипса (на рис. 252, в он показан целиком) как сечение цилиндра. Отрезок 2_02_{10} получен от пересечения плоскости, ограничивающей цилиндр.

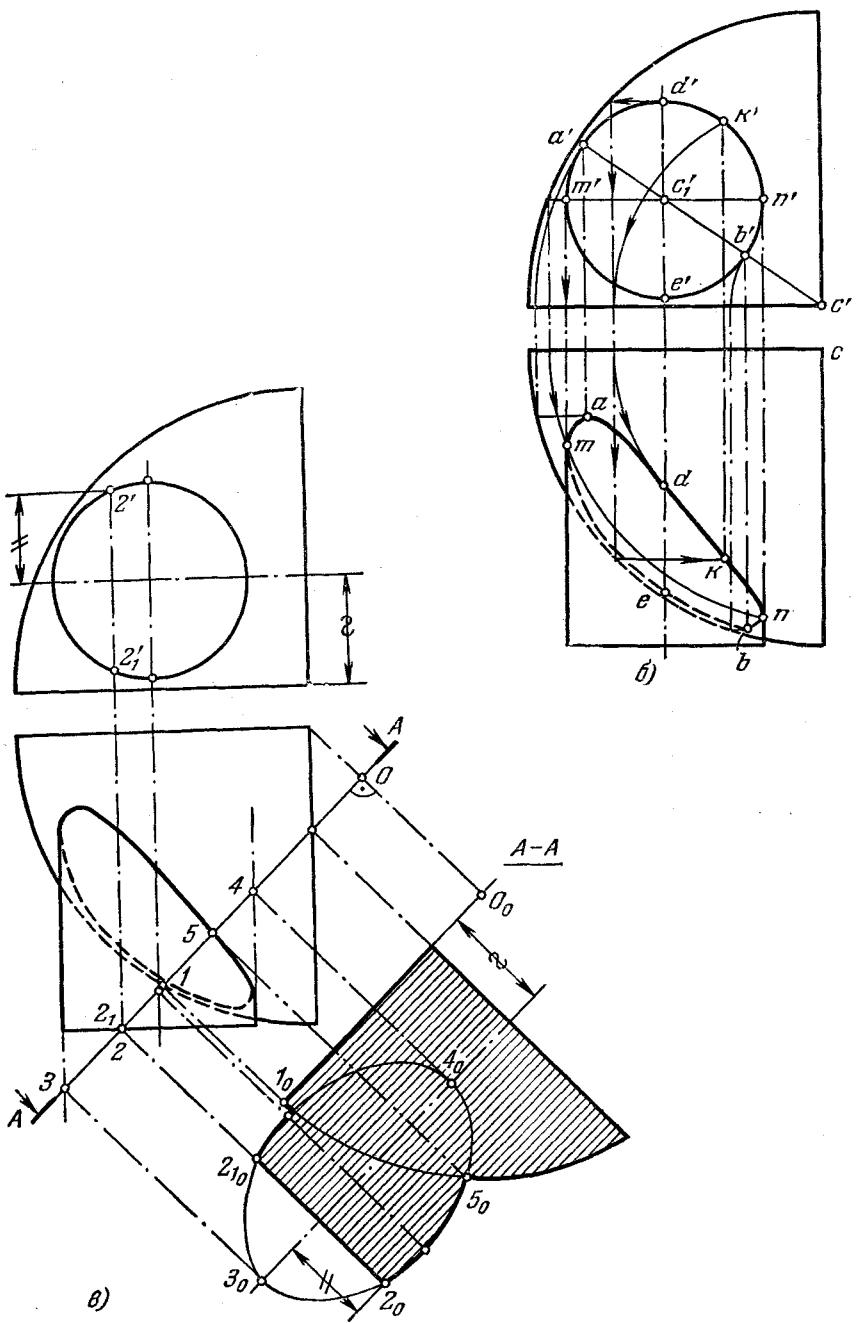


Рис. 252б, в.

270. Построить: а) проекции линии пересечения поверхностей цилиндра и конуса; б) натуральный вид сечения $A-A$ (рис. 253).

Указание. Фронт. проекция линии пересечения совпадает с частью соответствующей проекции цилиндра.

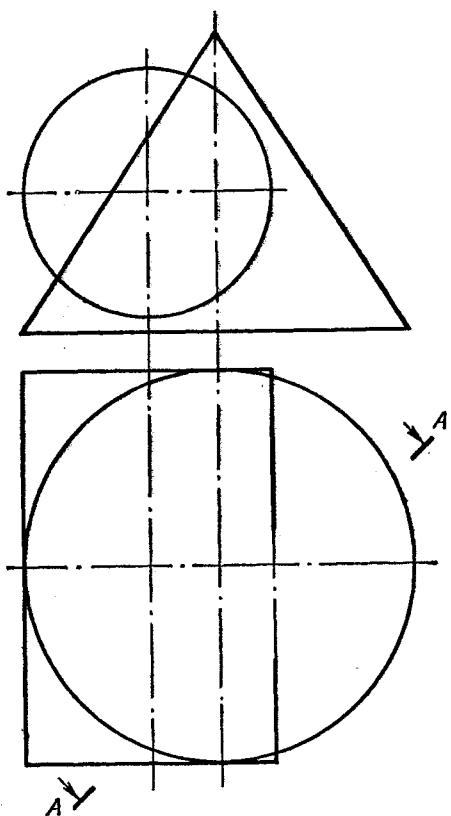


Рис. 253.

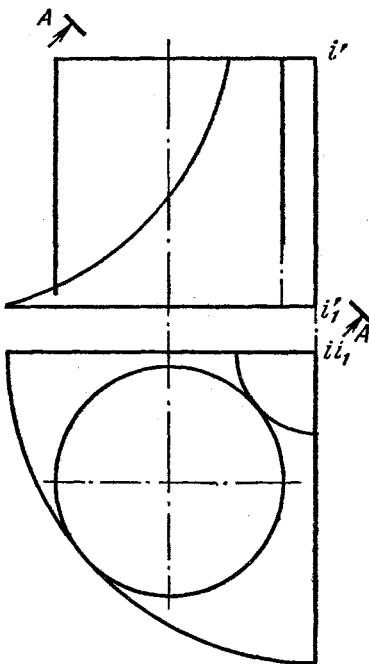


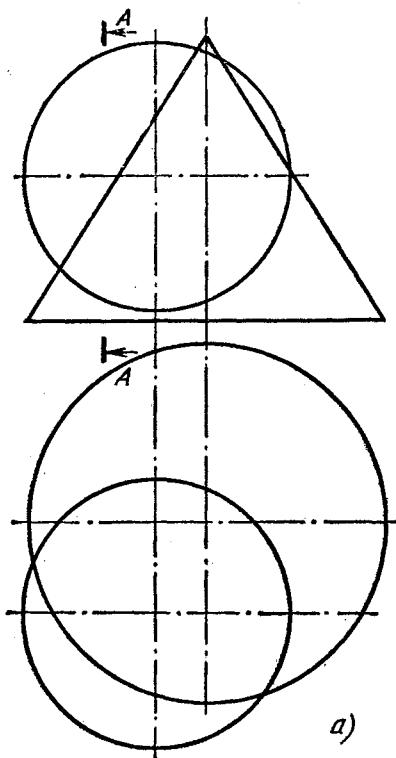
Рис. 254.

271. Построить: а) проекции линии пересечения поверхностей цилиндра и тела вращения (с осью II_1 , перпендикулярной к пл. H); б) натуральный вид сечения $A-A$ (рис. 254).

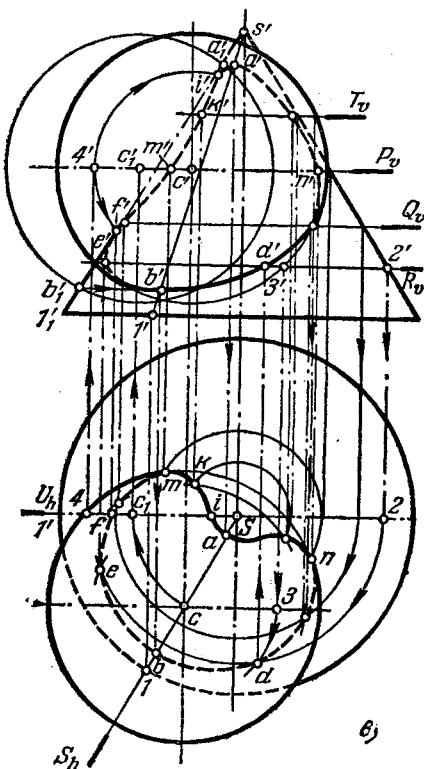
Указание. Горизонт. проекция линии пересечения совпадает с соответствующей проекцией цилиндра.

272*. Построить: а) проекции линии пересечения поверхностей конуса и сферы; б) натуральный вид сечения $A-A$ (рис. 255, а).

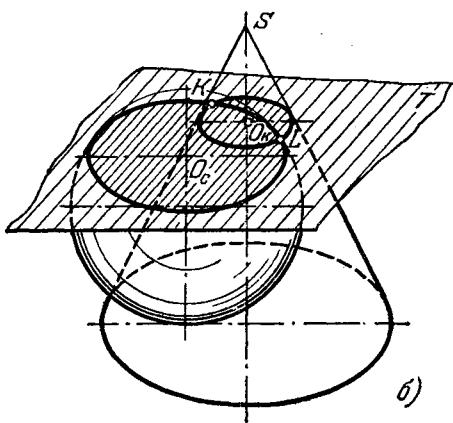
Решение. В этом случае ни одна из проекций ни одного из данных тел не совпадает полностью или частично с проекциями искомой линии пересечения. Мы не можем исходить из того, что положение проекций ее точек нам известно, как это было в задачах 265 и 269. Поэтому мы используем здесь общий прием построения



a)



b)



c)

Рис. 255а—в.

точек взаимного пересечения поверхностей, а именно введение вспомогательных секущих плоскостей (рис. 255, б), пересекающих каждую из заданных поверхностей по некоторым линиям, и определение точек, общих для этих поверхностей, в пересечении линий, полученных на них.

Учитывая свойство и положение заданных поверхностей, применим в данном случае серию секущих плоскостей, параллельных пл. H . Каждая такая плоскость пересекает поверхности конуса и сферы по окружностям (рис. 255, в). Например,

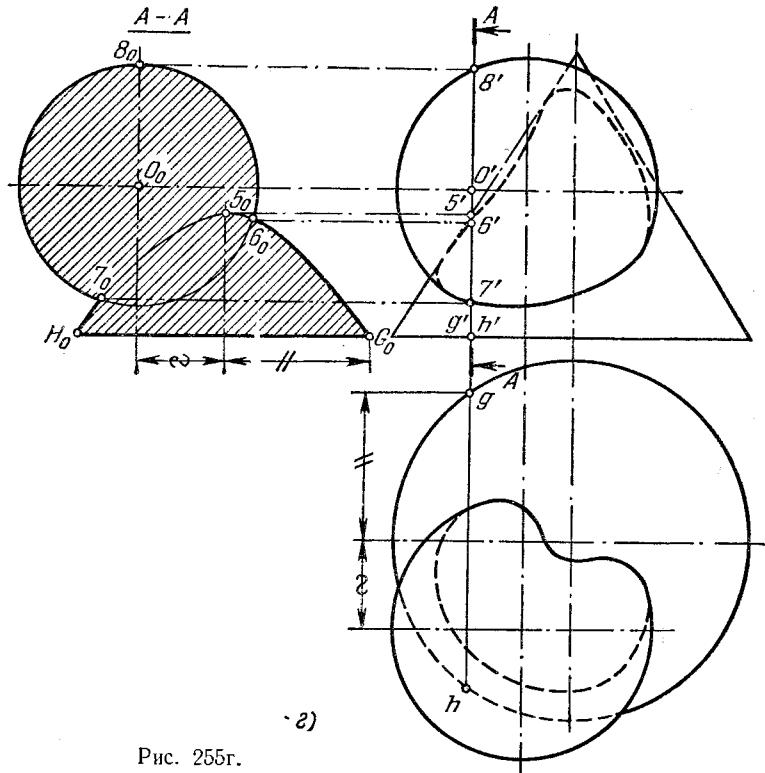


Рис. 255г.

пл. R на конусе дает окружность радиуса $s=2$, а на сфере окружность радиуса $s=3$. Эти окружности в своем пересечении определяют точки D и E , общие для поверхностей конуса и сферы.

Но кроме точек, получаемых подобным образом, надо построить еще некоторые характерные точки, положение которых уточняет искомую линию. Это прежде всего высшая и низшая точки на фронт. проекции. Для их нахождения мы также используем некоторую пл. S : она проходит через ось конуса и через центр сферы и является для этих тел общей плоскостью симметрии. Пл. S пересекает поверхность конуса по образующим, а поверхность сферы по окружности; повернув пл. S вместе с полученными в ней линиями вокруг оси конуса до положения, параллельного пл. V , получим точки a_1 и b_1 , а по ним сначала a' и b' , затем a и b .

Имеют значение точки f' , f и i' , i на главном меридиане конуса, так как в них определяются точки пересечения крайней образующей $s' l'_1$, $s-l_1$ с поверхностью сферы; для нахождения этих точек взята вспомогательная пл. U , соответствующая

главному меридиану конуса и рассекающая поверхность сферы по окружности радиуса $c'4'$.

Также следует найти точки на экваторе сферы, для чего в серии горизонтальных секущих плоскостей надо взять пл. P : в точках m и n горизонт. проекция экватора смыкается с видимой частью проекций линии пересечения на пл. H .

Сечение $A-A$ (рис. 255, ε) очерчено дугой окружности (от пересечения поверхности сферы), частями гиперболы (от пересечения конической поверхности) и отрезком H_0G_0 (от пересечения основания конуса). Надо обратить внимание на смещение центра кругового сечения сферы относительно оси гиперболы.

273. Построить проекции линий пересечения: а) поверхностей тора и эллипсоида вращения (рис. 256, a); б) поверхностей тора и сферы (рис. 256, b). В обоих случаях построить сечения $A-A$.

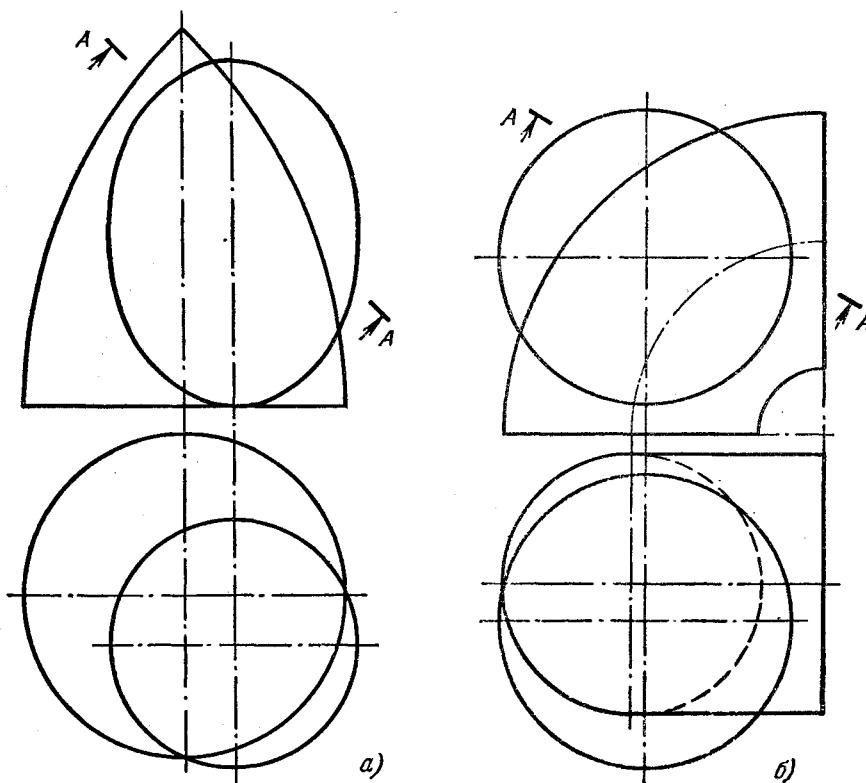
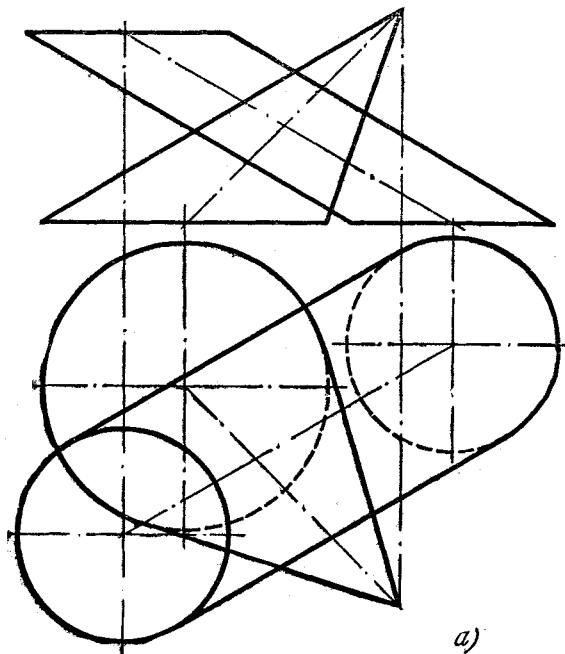


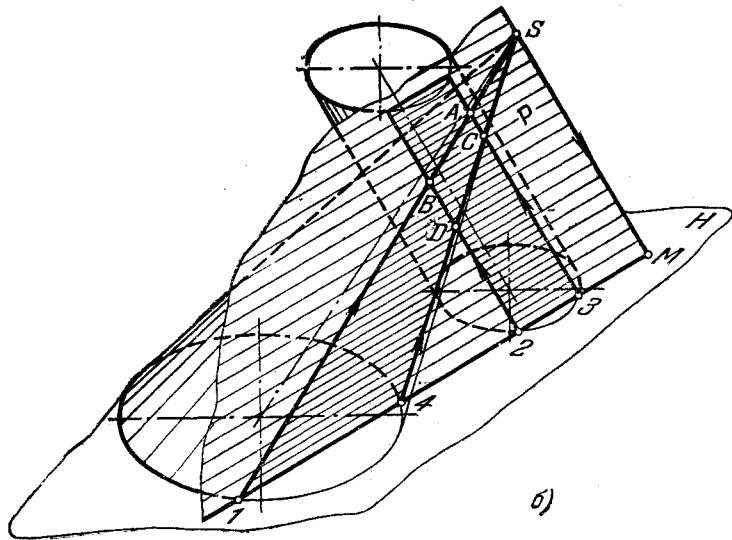
Рис. 256а, б.

274*. Построить проекции линии пересечения поверхностей конуса и цилиндра (рис. 257, a).

Решение. Здесь так же, как и в задаче 272, приходится прибегать к вспомогательным секущим плоскостям. Какие же плоскости наиболее удобны в данном случае? Это плоскости, проходящие через вершину конуса и параллельные образующим цилиндра (рис. 257, b). Такие плоскости (например, пл. P) пересекают обе поверхности по прямым — образующим, положение которых определяется точками

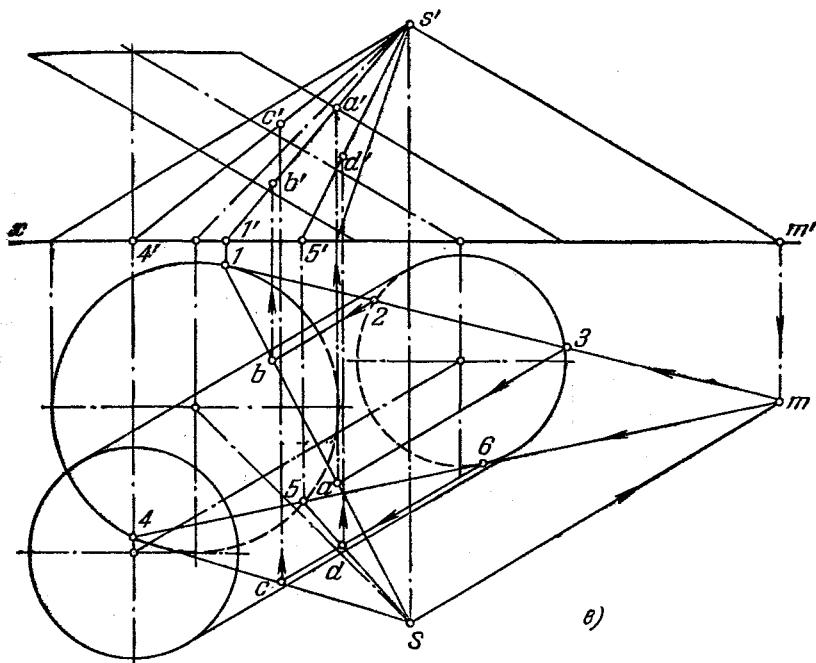


a)

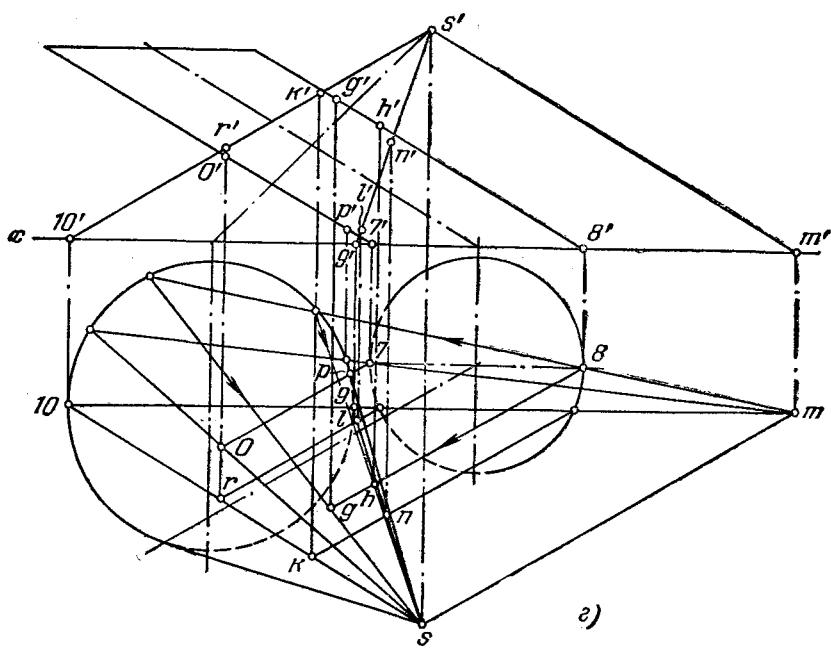


b)

Рис. 257а, б.



б)



с)

Рис. 257в, г.

пересечения оснований данных тел со следом секущей плоскости на плоскости оснований. Построение показано на рис. 257, в.

Через точку s', s проведена прямая параллельно образующей цилиндра; найдены проекции m' и m горизонт. следа этой прямой.

Если горизонт. следы секущих плоскостей проводить через точку m так, чтобы каждый из них пересекал или касался оснований конуса и цилиндра, то на поверхностях цилиндра и конуса обнаруживаются образующие, в пересечении которых получаются точки искомой линии. Сначала займемся точками на образующих, являющихся очерковыми на горизонт. проекции. Проводим следы плоскостей по направлениям $m-6$ и $m-1$ касательно к окружностям оснований, получаем на каждой из поверхностей по три образующих: на конусе образующие $s-1, s-5$ и $s-4$, на цилиндре образующие из точек $b, 2$ и 3 .

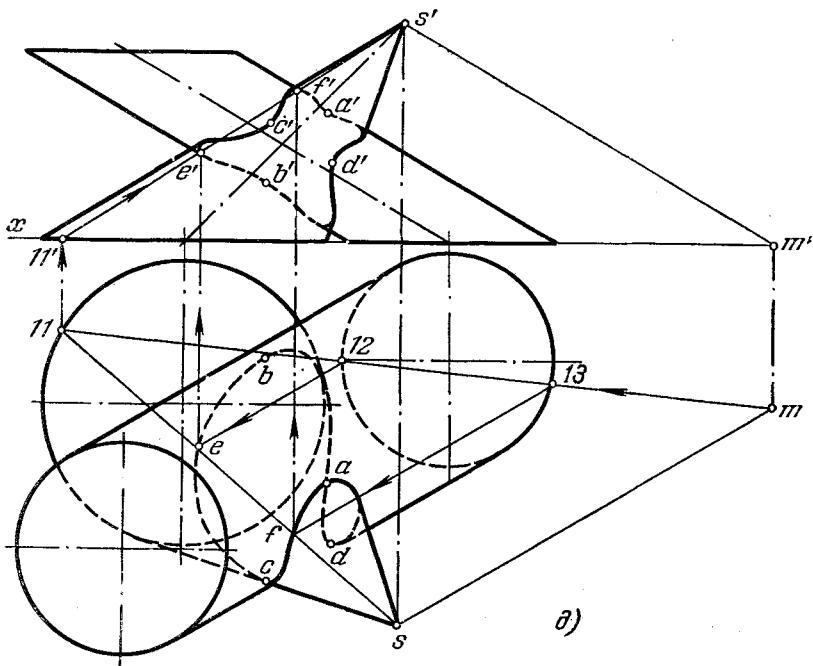


Рис. 257д.

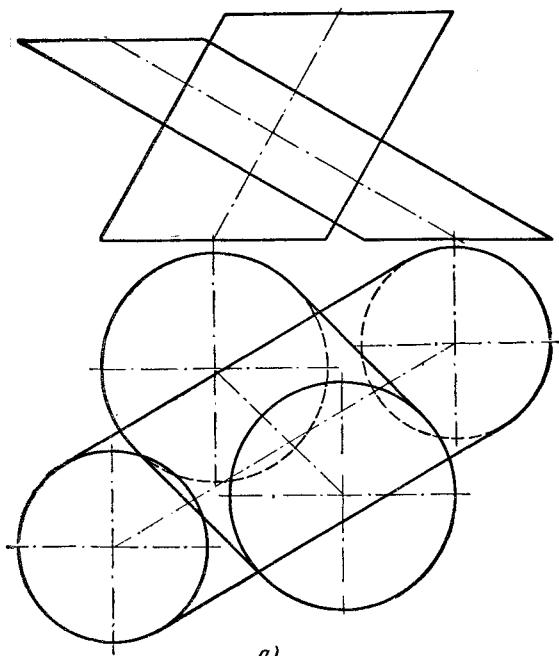
Остается взять точки пересечения образующих — на горизонт. проекции точки a, b, c, d и на фронт. проекции a', b', c', d' .

Теперь для нахождения точек, лежащих на очерковых образующих фронт. проекций тел, проводим следы секущих плоскостей через горизонт. проекции концов соответствующих образующих — точки $7, 8, 9$ и 10 (рис. 257, е).

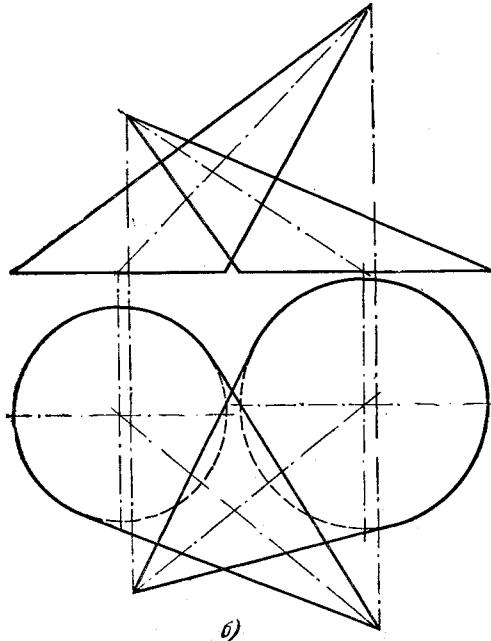
Таким образом, находим точки g, h, k, l, n, o, p , а по ним фронтальные проекции.

На рис. 257, д показан пример нахождения промежуточных точек (E и F) и проведены обе проекции искомой линии.

275. Построить проекции линий пересечения: а) двух цилиндрических поверхностей (рис. 258, а); б) двух конических поверхностей (рис. 258, б).



a)



b)

Рис. 258а, б.

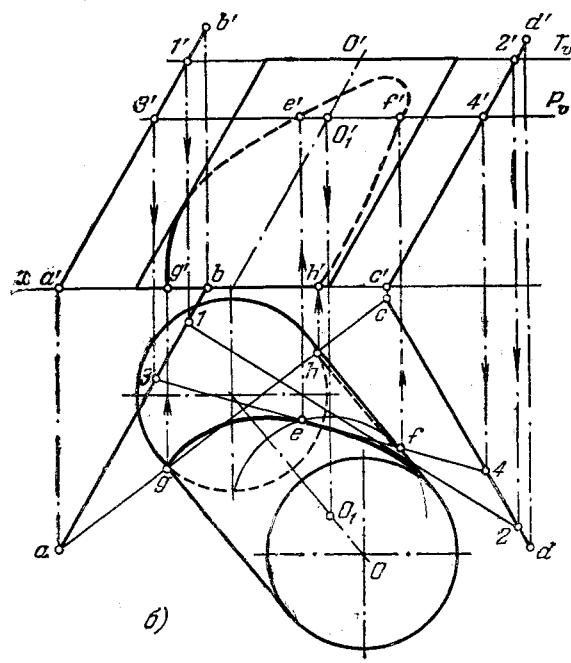
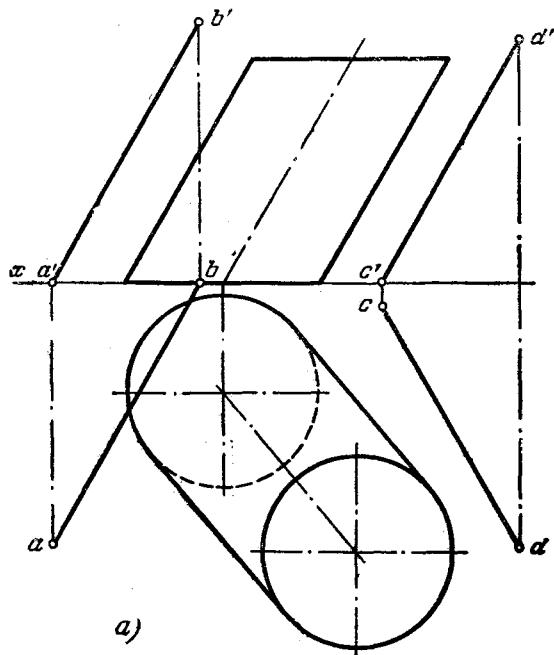


Рис. 259а, б.

276*. Построить проекции линии пересечения цилиндрической поверхности с косой плоскостью. Косая плоскость задана направляющими AB и CD при пл. H как плоскости параллелизма (рис. 259, а).

Решение. Учитывая свойства и положение заданных поверхностей, а именно то, что цилиндр имеет ряд круговых сечений в плоскостях, параллельных пл. H , и что образующие косой плоскости параллельны той же пл. H , берем серию вспомогательных плоскостей (T , P и т. д.), параллельных пл. H (рис. 259, б).

Они пересекают цилиндрическую поверхность по окружностям с центрами O , O_1 и т. д., а косую плоскость — по прямым $1-2$, $3-4$ и т. д. Горизонт. проекции искомых точек (e , f и др.) лежат на пересечении соответствующих проекций этих окружностей и прямых. По горизонт. проекциям находим фронт. проекции — e' , f' и др. Искомая линия пересечения проходит через найденные точки.

На рис. 259, б показаны результат пересечения косой плоскости с цилиндром и самий цилиндр, а косая плоскость не изображена.

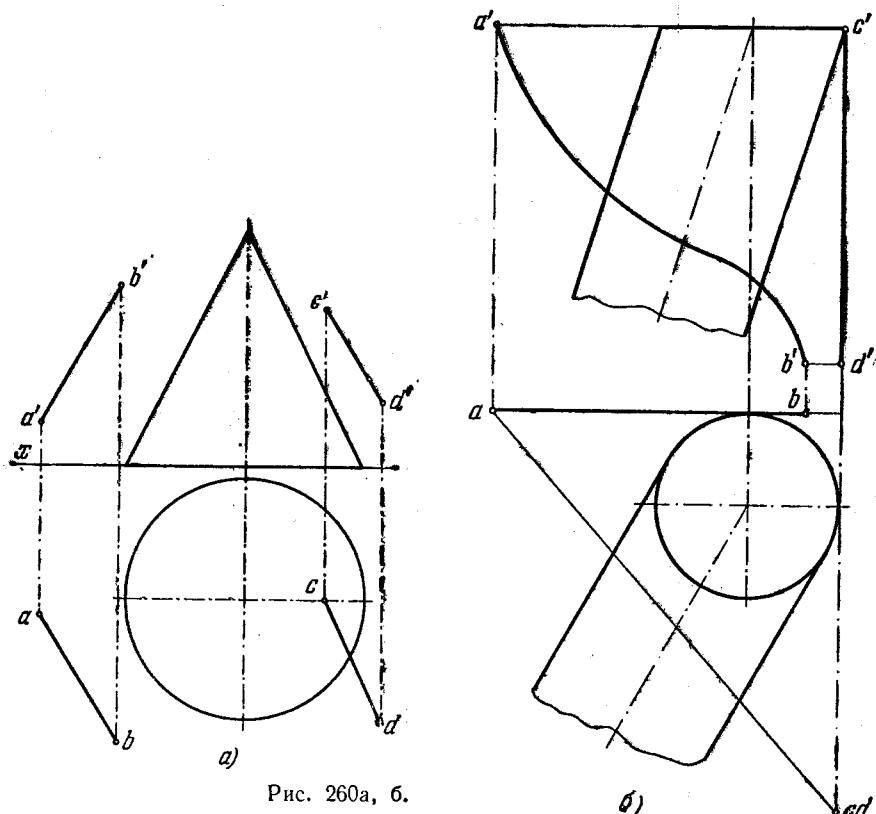
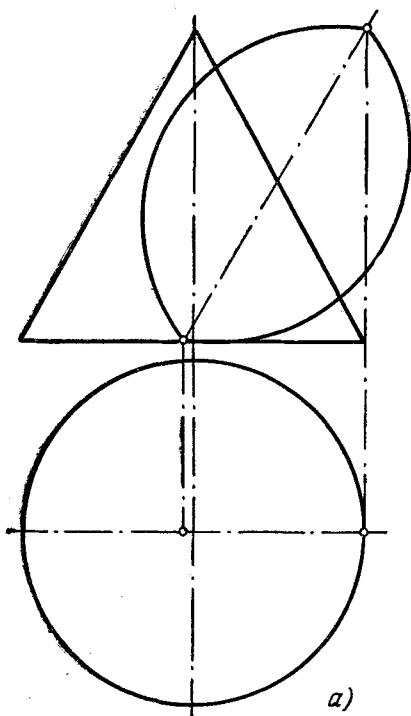


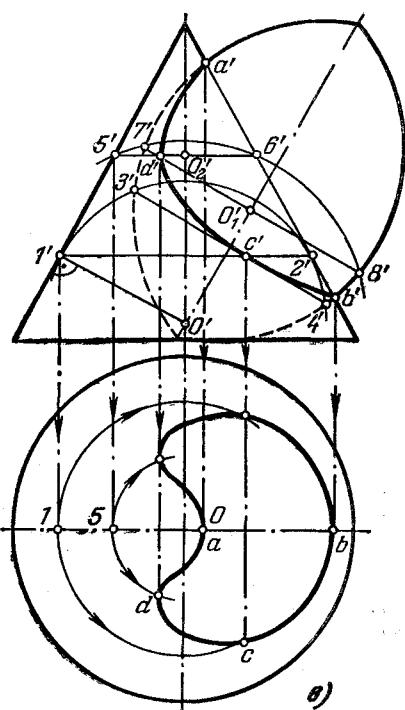
Рис. 260а, б.

277. Построить проекции линии пересечения: а) конической поверхности с косой плоскостью, направляющими которой являются прямые AB и CD , а плоскостью параллелизма — пл. H (рис. 260, а); б) коноида, направляющими которого являются кривая AB и прямая CD , а плоскостью параллелизма — пл. H , с цилиндрической поверхностью (отверстие) (рис. 260, б).

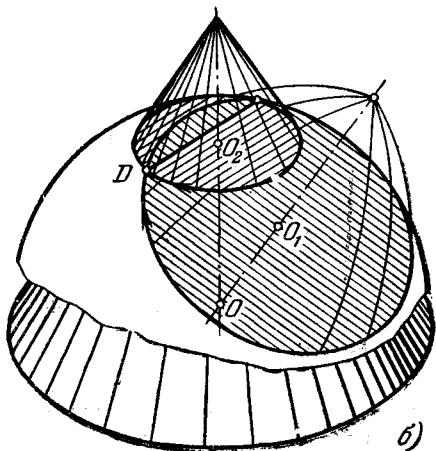
278*. Построить проекции линии пересечения поверхности конуса с поверхностью тора, ограничивающей отверстие в конусе (рис. 261, а).



а)



б)



в)

Рис. 261а—в.

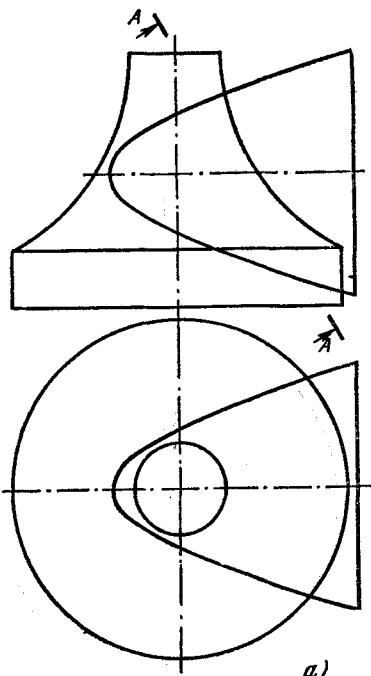
Решение. В данной задаче мы имеем случай взаимного пересечения двух поверхностей вращения, оси которых пересекаются и расположены в плоскости, параллельной пл. V . В подобных случаях наиболее простым является применение вспомогательных сфер, проводимых из точки пересечения осей обеих поверхностей (рис. 261, б). Эти сферы пересекают данные поверхности по окружностям, в пересечении которых получаются точки, общие для обеих поверхностей.

На рис. 261, в показано применение двух сфер. Фронт. проекция одной из них проведена как окружность с центром O' радиусом $O'5'$. Отрезок $5'6'$ является фронт. проекцией окружности, по которой сфера пересекает коническую поверхность, а отрезок $7'8'$ — фронт. проекцией окружности, по которой эта сфера пересекает поверхность тора. Получается точка d' — фронт. проекция одной из точек, общей для поверхности тора и конуса. По точке d' находим на параллели конуса проекцию d и ей симметричную.

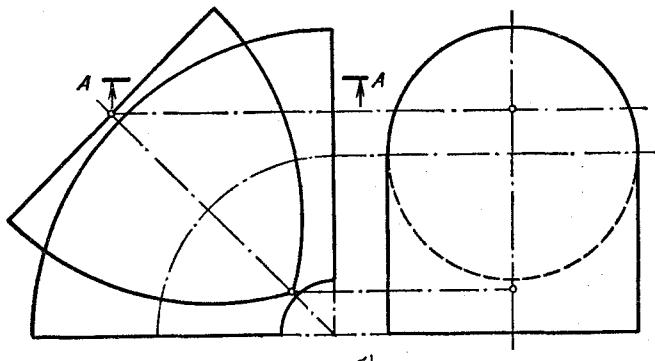
Сфера радиуса $O'1'$ лишь касается конической поверхности по окружности, но поверхность тора пересекает. Поэтому точка c' , полученная с помощью этой сферы, имеет особое значение: если брать сферы с радиусом меньшим, чем $O'1'$, то общих точек для данных поверхностей мы с помощью таких сфер не получим. В точке c' фронт. проекция линии пересечения лишь коснется прямой $3'4'$, но ее не пересечет.

Положение точек a' и b' очевидно.

Радиусы вспомогательных сфер следует брать в данном случае в пределах от $O'1'$ до $O'a'$.



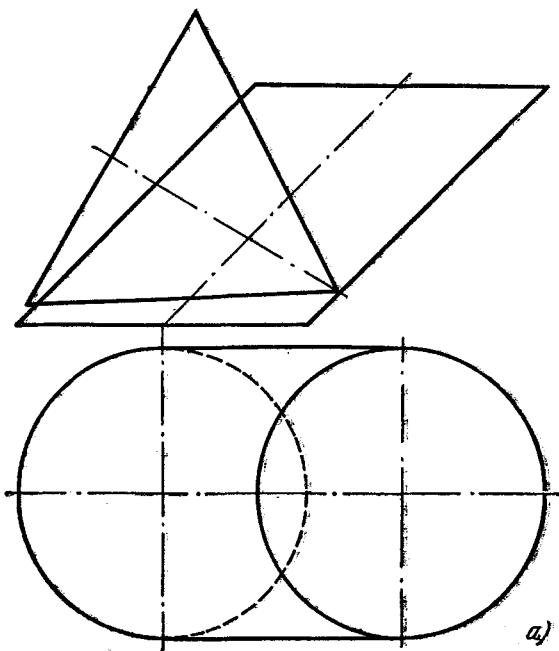
в)



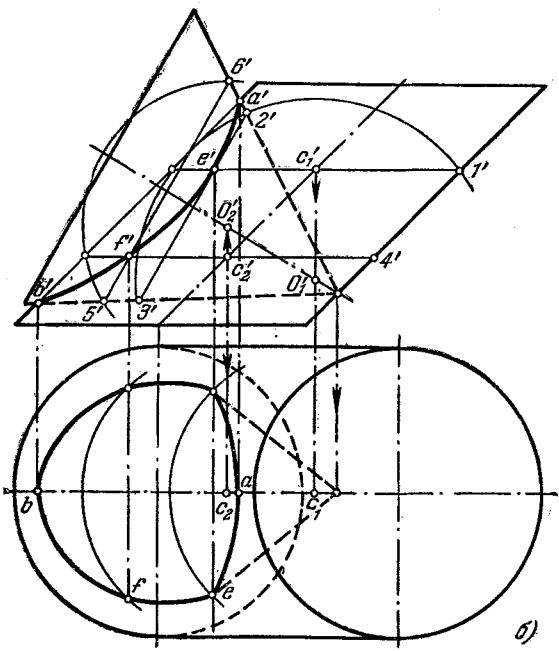
б)

Рис. 262а, б.

279. Построить проекции линии пересечения: а) поверхности вращения с поверхностью гиперболоида вращения (рис. 262, а); б) поверхностей двух торов (рис. 262, б), и в обоих случаях сеч. $A-A$.

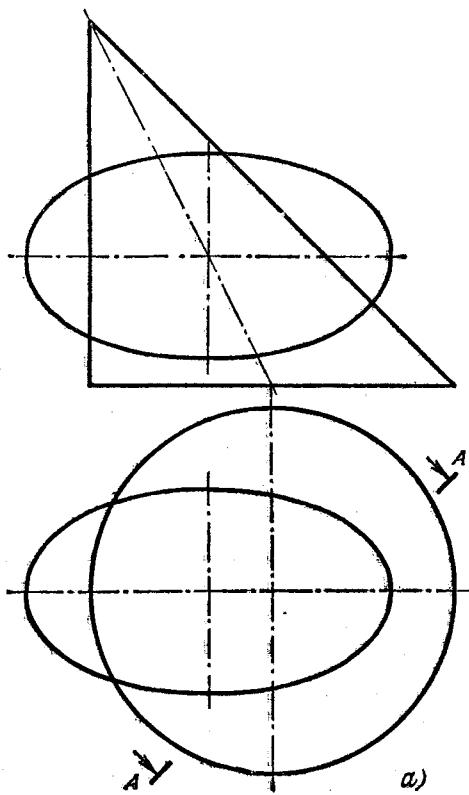


a)

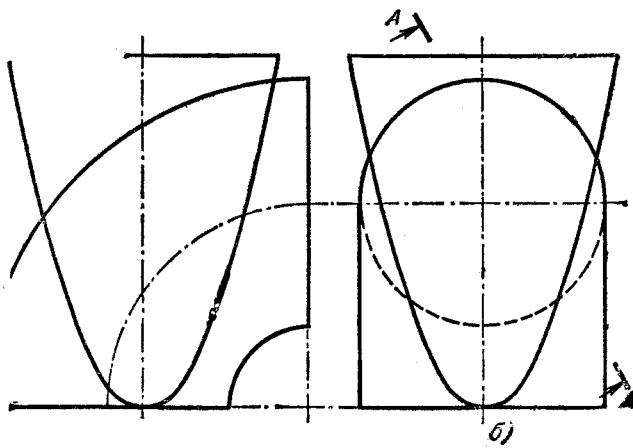


b)

Рис. 263а, б.



a)



b)

Рис. 264 a , b .

280*. Построить проекции линии пересечения цилиндрической поверхности с поверхностью конуса вращения, ограничивающей отверстие в цилиндре (рис. 263, а).

Решение. Из двух заданных поверхностей лишь одна поверхность вращения — коническая. Другая же поверхность не является поверхностью вращения. Это цилиндр, называемый наклонным круговым, — круговым, так как он имеет ряд круговых параллельных между собою сечений. В данном случае такие сечения параллельны пл. H . Кроме того, имеется общая для конуса и цилиндра плоскость симметрии, параллельная пл. V .

Эти обстоятельства подсказывают использование вспомогательных сфер, но не с постоянным центром, как в задаче 278.

Действительно, круговое сечение цилиндра можно принять за параллель некоторой сферы. Например, окружность радиуса $c'_1 l'$ (рис. 263, б) может быть параллелью многих сфер, центры которых располагаются на прямой, проведенной через c'_1 перпендикулярно к плоскости параллели. Если же мы на этом перпендикуляре возьмем точку в пересечении с осью конуса, то такую точку (с фронт. проекцией O'_1) можно принять за центр сферы с радиусом $O'_1 l'$, пересекающей цилиндр по окружности радиуса $c'_1 l'$, а конус вращения — по окружности с диаметром $2'3'$. Отсюда мы получаем точки, фронт. проекции которых сливаются в одну точку e' (одна из этих точек — на обращенной к нам части линии пересечения, другая — на ей симметричной).

На рис. 263, б дан еще один пример подобного построения. Задавшись на цилиндре окружностью радиуса $c'_2 4'$, находим фронт. проекцию центра сферы в точке O'_2 и радиус сферы, равный $O'_2 4'$. При помощи этой сферы получены точки, общие для поверхностей конуса и цилиндра, с фронт. проекциями в точке f' .

Положение точек a' и b' очевидно.

Горизонт. проекции точек по найденным их фронт. проекциям строим на окружностях — горизонт. проекциях окружностей, взятых на поверхности цилиндра.

281. Построить проекции линии пересечения: а) конической поверхности с поверхностью эллипсоида вращения (рис. 264, а); б) поверхности тора с поверхностью параболоида вращения (рис. 264, б).

В обоих случаях построить сечения $A-A$.