ГЛАВА VII

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ПО ВСЕМУ КУРСУ

§ 24. Задачи с решенными прототипами

282*. Определить расстояние от точки A до ближайшей точки на поверхностях: а) конуса (рис. 265, *а*); б) сферы (рис. 265, *б*); в) тора (рис. 265, *в*).

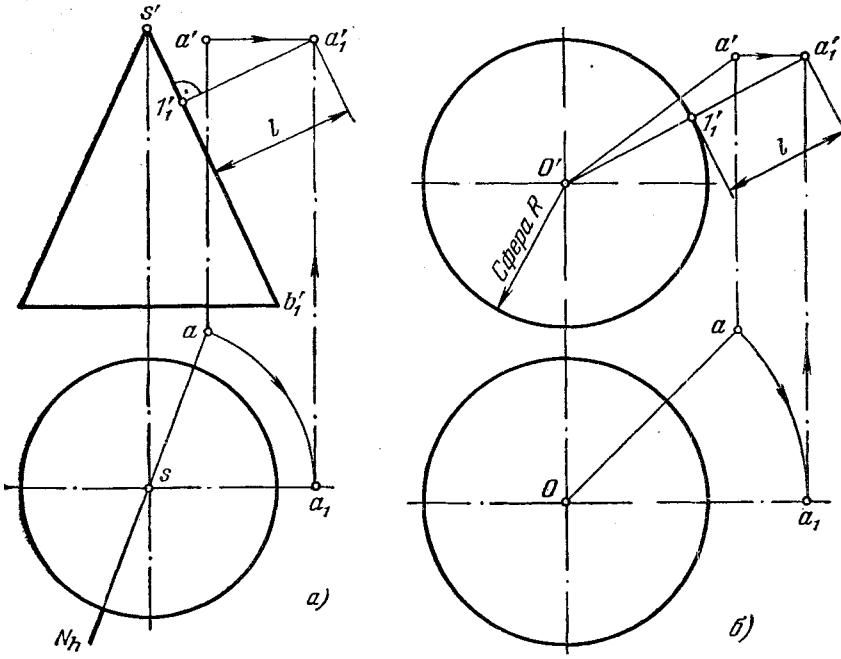


Рис. 265а, б.

Решение. а) Искомое расстояние (рис. 265, *а*) равно расстоянию от данной точки до ближайшей к ней образующей. Эта образующая лежит в пл. N, проходящей через точку A и ось конуса.

Поворачиваем эту плоскость вокруг оси конуса до положения, параллельного пл. V. Точка A займет положение $A_1(a_1, a'_1)$, и искомое расстояние выразится отрезком $a'_1 1'_1$, перпендикулярным к $s'b'_1$.

б) На рис. 265, *б* показано, что искомое расстояние измеряется по прямой AO. Повернув прямую AO вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно к пл. H, так, чтобы AO стала параллельна пл. V, получим $l = A_1O - R = a'_1O' - R$.

в) Расстояние от точки A до поверхности тора (рис. 265, *в*) измеряется величиной отрезка нормали к поверхности тора в плоскости, проходящей через точку A и ось тора. Повернув эту плоскость вокруг оси тора до положения, параллельного пл. V, и проведя прямую a'_1O', получим точку $1'_1$ и отрезок $a'_1 1'_1$. Это и есть нормаль к поверхности тора, проходящая через точку A_1, а до поворота — через точку A.

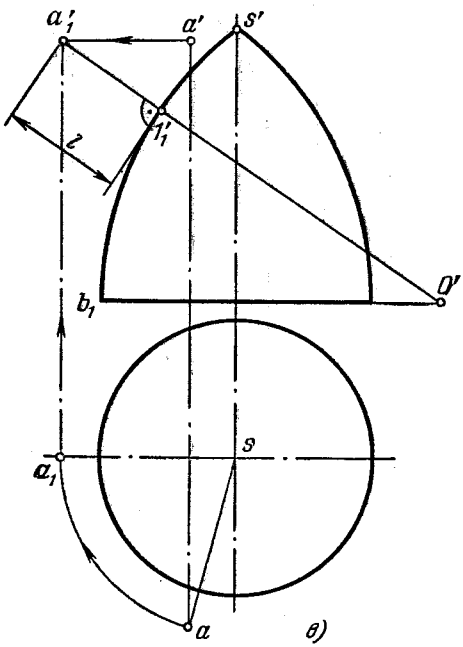


Рис. 265в.

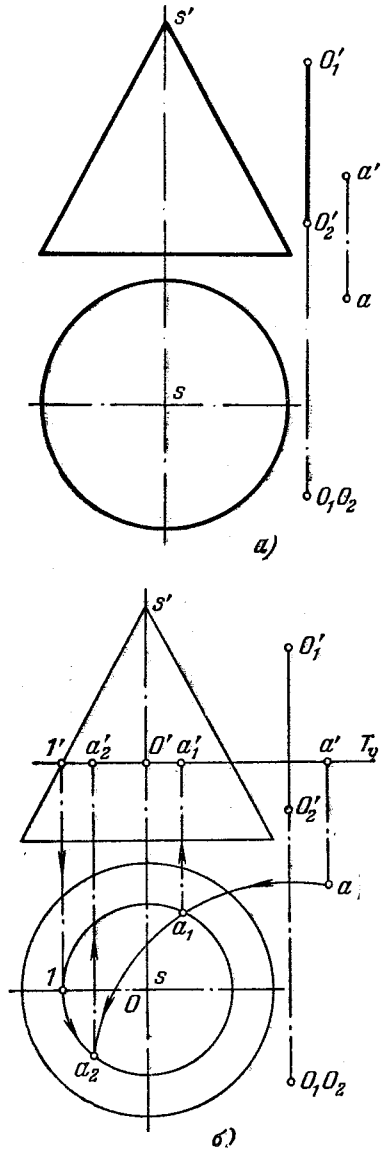


Рис. 266а, б.

283*. Поворотом вокруг оси O_1O_2 точку A совместить с поверхностью конуса вращения (рис. 266, *а*).

Решение. Поворот точки A вокруг оси O_1O_2 происходит в пл. T (рис. 266, *б*), перпендикулярной к O_1O_2. Центр дуги окружности, по которой перемещается точка A, находится в точке пересечения оси O_1O_2 с плоскостью вращения T. Горизонт. проекция этого центра совпадает с точками O_1 и O_2. Итак, проведя из точки $O_1(O_2)$ дугу радиуса O_1a_1 получим на этой дуге горизонт. проекцию точки A в любом ее положении в пл. T при повороте вокруг оси O_1O_2. Но чтобы точка A оказалась при этом на поверхности данного конуса вращения, надо, очевидно, взять параллель конической поверхности на уровне пл. T, т. е. окружность радиуса $O'1'$. На этой окружности и находим точку A, когда она при повороте вокруг оси O_1O_2 оказывается на поверхности заданного конуса. По горизонт. проекциям a_1 и a_2 находим проекции a'_1 и a'_2. В положении A_1 точка A окажется невидимой относительно пл. V, а в положении A_2— видимой. Точка A в положениях A_1 и A_2 относительно пл. H будет видимой.

284. Поворотом вокруг оси O_1O_2 точку A совместить: а) с шаровой поверхностью (рис. 267, *а*); б) с поверхностью тора (рис. 267, *б*).

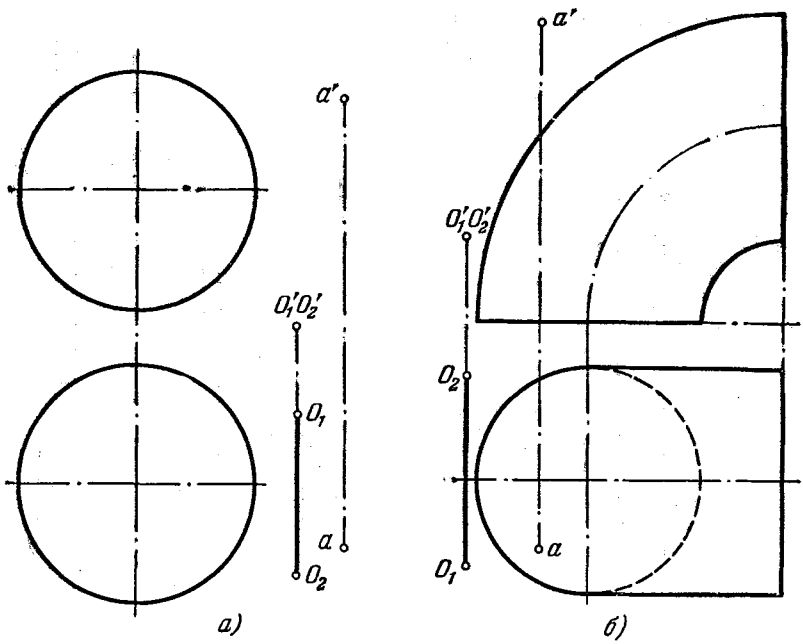


Рис. 267а, б.

285*. Поворотом вокруг оси O_1O_2 точку A совместить с винтовой поверхностью (рис. 268, *а*).

Решение. Заданная косая винтовая поверхность имеет ось, параллельную оси O_1O_2. В указанном на чертеже положении поворот точки A происходит в пл. R (рис. 268, *б*), параллельной пл. H и пересекающей данную поверхность по дуге спирали Архимеда. Строим горизонт. проекцию этой дуги, проводя для нахождения точек *3* и *6* плоскости P_1 и P_2 через ось поверхности. Они пересекают поверхность по ее образующим *1—2* и *4—5*. Находим точки *3'* и *6'* в пересечении следа R_v с *1'2'*

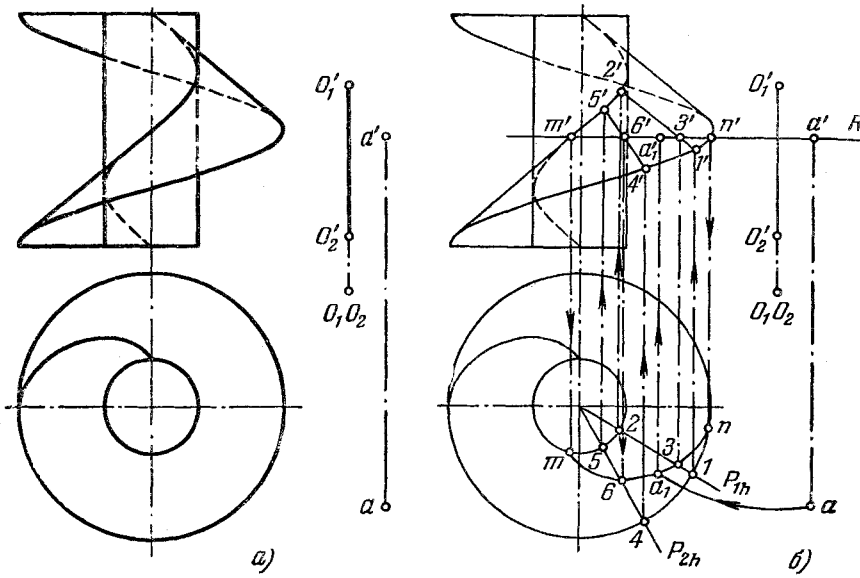


Рис. 268а, б.

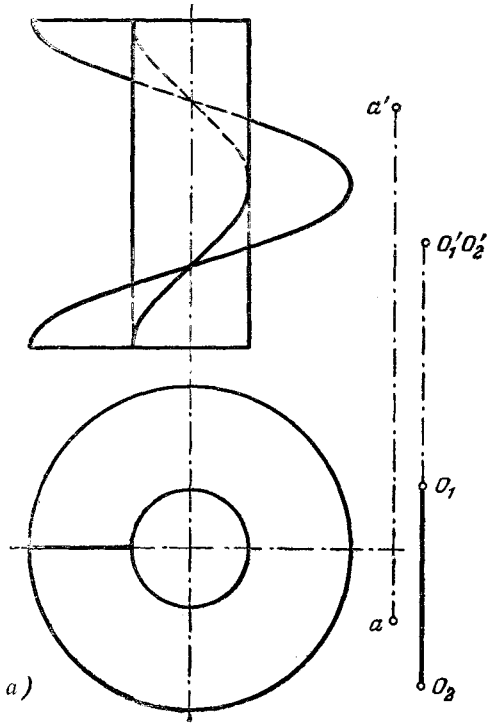


Рис. 269а.

и $4'5'$, по ним строим проекции 3 и 6. Проводим через точки m, 6, 3 и n кривую и находим точку пересечения (a_1) этой кривой с горизонт. проекцией окружности, описываемой точкой A. По a_1 находим a'_1; a_1 и a'_1 служат проекциями точки A в искомом положении.

286. Поворотом вокруг оси O_1O_2 точку A совместить: а) с винтовой поверхностью (рис. 269, *а*); б) с косой плоскостью (рис. 269,*б*),

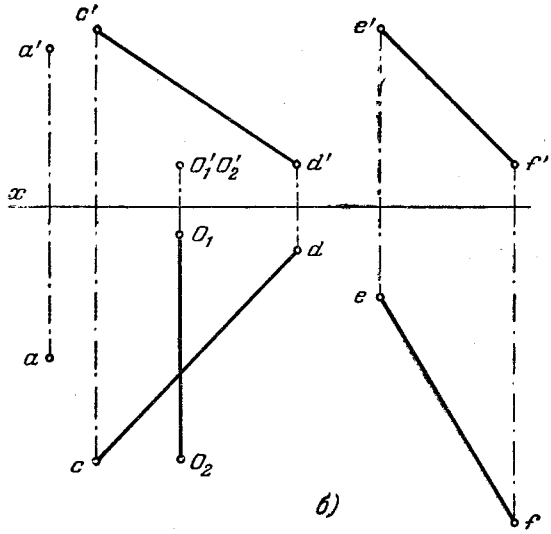


Рис. 269б.

заданной направляющими прямыми CD и EF и плоскостью параллелизма H.

287*. Указать положения осей, перпендикулярных к пл. H, поворотом вокруг которых можно ввести точку A на заданную поверхность вращения (рис. 270, *а*).

Решение. В отличие от задач 283 и 285 в данной задаче ось для поворота точки не задается; оговаривается лишь то, что эта ось должна быть перпендикулярна к пл. H. Однако нельзя взять любую прямую, перпендикулярную к пл. H, и принять ее за ось, пригодную для решения этой задачи.

На рис. 270, *б* показано, что имеется такая область, в которой было бы бесцельным брать точки в качестве горизонт. проекций осей вращения. Например, приняв точку O_4 за горизонт. проекцию оси, мы получим радиус вращения точки A равным O_4a, но O_4a меньше расстояния точки a до ближайшей точки на окружности радиуса R, и, следовательно, дуга радиуса O_4a даже не коснется этой окружности. Или точка O_5: совершенно очевидно, что дуга радиуса O_5a не может иметь общих точек с окружностью радиуса R.

Но если взять точку O_1 так, чтобы $O_1a=O_11$, или точку O_3 так, чтобы $O_3a=O_33$, то в положениях 1 и 3 точка a окажется на окружности радиуса R. Взяв оси, проходящие через точки O_1 и O_3 перпендикулярно к пл. H, мы можем решить задачу о введении точки A на заданную поверхность вращения. Легко видеть, что решение сводится к построению гиперболы, у которой фокусами служат точки a и c, а вершинами — точки O_1 и O_3. Эта гипербола определяет область (на рис. 270, *б* она заштрихована), в которой любая точка может быть принята за горизонт. проекцию оси, при повороте вокруг которой точка A окажется в двух положениях на данной

поверхности вращения. Если же точку взять на одной из ветвей гиперболы, то такая точка определяет ось, при повороте вокруг которой точка A окажется на поверхности вращения лишь в единственном положении. Например, точка O_2: дуга радиуса O_2a лишь коснется в точке 2 окружности радиуса R.

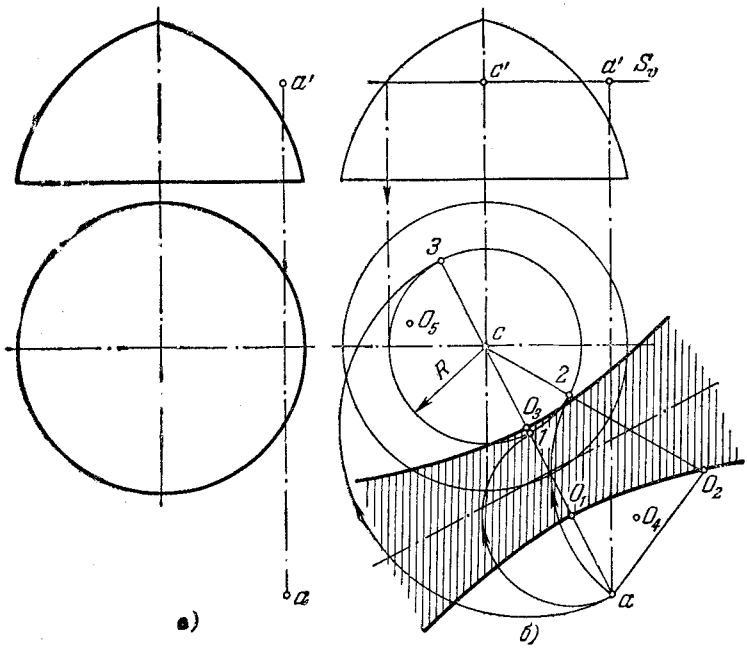


Рис. 270а, б.

288. Указать положение осей, перпендикулярных к пл. H, поворотом вокруг которых можно точку A совместить с заданной поверхностью вращения (рис. 271).

289*. Указать положение осей, перпендикулярных к пл. H, поворотом вокруг которых можно точку A совместить с заданной поверхностью вращения (рис. 272, *а*).

Решение. Отличие этой задачи от задачи 287* в том, что точка задана внутри поверхности вращения. Здесь также вопрос выбора положения осей решается при рассмотрении взаимного положения точки A и окружности радиуса R (параллели) на поверхности вращения (рис. 272, *б*). Очевидно, что горизонт. проекция оси вращения (какая-либо точка O) должна быть расположена так, чтобы радиус Oa был не меньше расстояния точки O до ближайшей точки на окружности радиуса R. Предельные положения точки O (например, O_1, O_2 и др.) расположатся как точки эллипса с фокусами в точках a и c, с большой осью O_1O_3 на прямой $1—3$. Точка O_1 делит пополам отрезок $a—1$, а точка O_3— отрезок $a—3$. Если взять точки внутри этого эллипса и принять их за горизонт. проекции осей вращения, то вращением вокруг таких осей нельзя данную точку совместить с поверхностью вращения. Горизонт. проекции осей надо брать или на эллипсе, или вне его.

290. Указать положения осей, перпендикулярных к пл. H, поворотом вокруг которых можно точку A совместить с заданной поверхностью вращения (рис. 273).

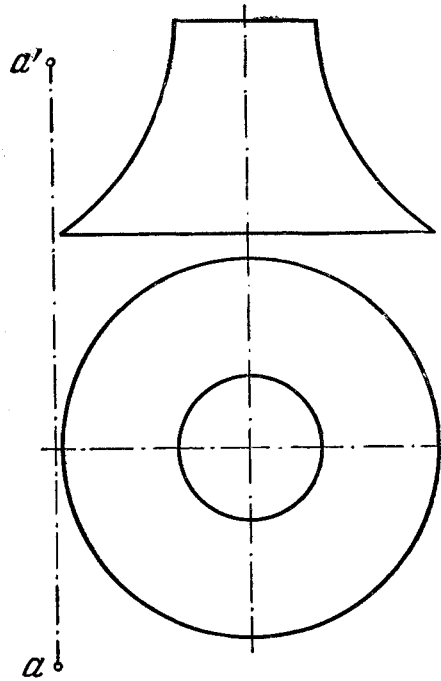


Рис. 271.

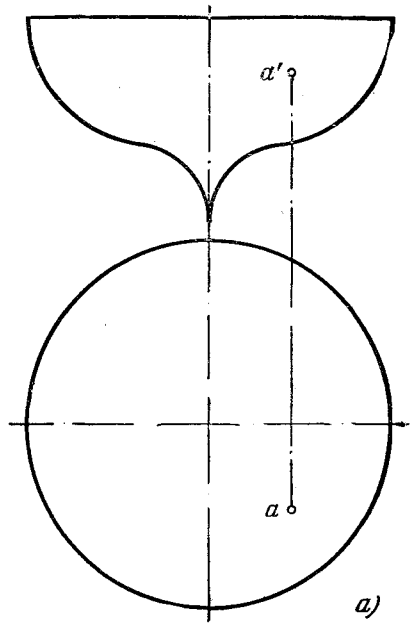


Рис. 272а.

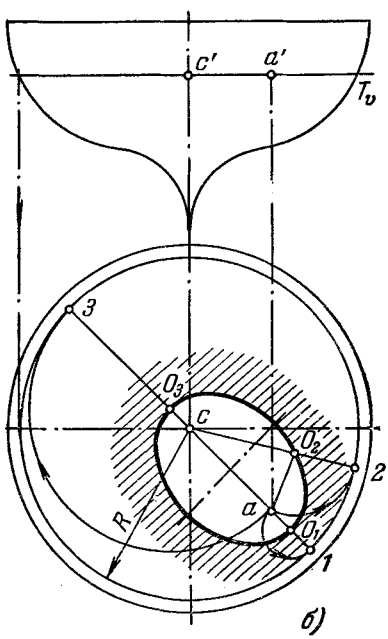


Рис. 272б.

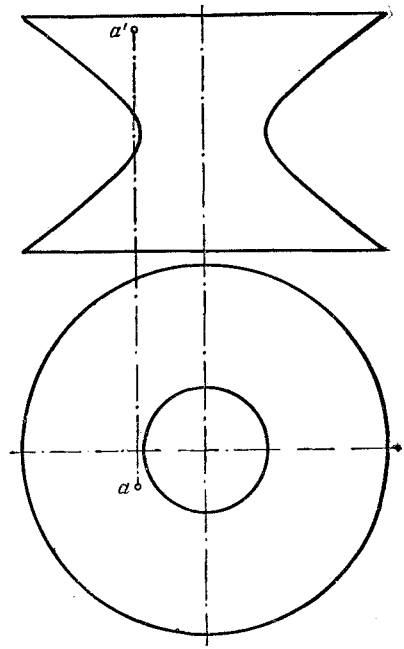


Рис. 273.

291*. На прямой CD найти точки, отстоящие от прямой AB на расстояние l (рис. 274, *а*).

Решение. Геометрическим местом точек пространства, отстоящих от прямой AB на расстояние l, является цилиндрическая поверхность с осью AB и радиусом l

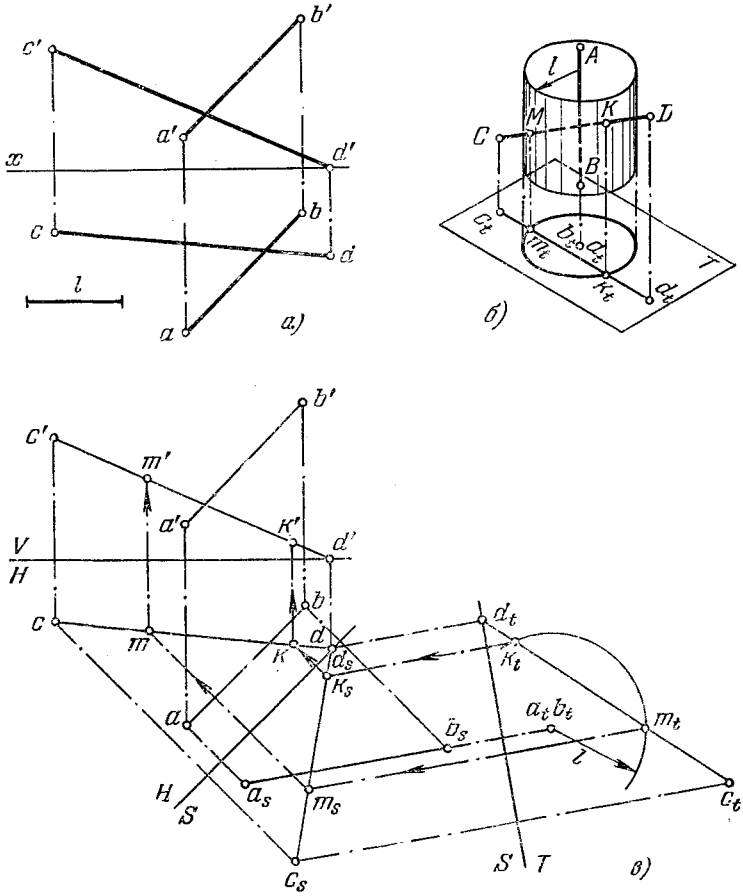


Рис. 274а—в.

(рис. 274, *б*). Искомые точки M и K являются точками пересечения прямой CD с этой поверхностью.

Очевидно, для упрощения построения надо сделать так, чтобы ось цилиндрической поверхности оказалась перпендикулярной к какой-либо плоскости, принятой за плоскость проекций. Сначала (рис. 274, *в*) вводим пл. $S \perp H$ и параллельно AB, затем пл. $T \perp S$ и $\perp AB$. В системе T, S прямая AB перпендикулярна к пл. T. Проекция цилиндрической поверхности на этой плоскости — окружность радиуса l с центром в точке $a_t(b_t)$. Точки пересечения (m_t и k_t) окружности с проекцией c_td_t являются проекциями искомых точек на пл. T. По m_t и k_t находим m_s и k_s, затем m и k, а по ним — m' и k'.

292. На прямой AB найти точки, отстоящие от оси x на расстояние l (рис. 275).

293*. Построить недостающую проекцию прямой CD, параллельной прямой AB, если расстояние между ними равно l (рис. 276, *а*).

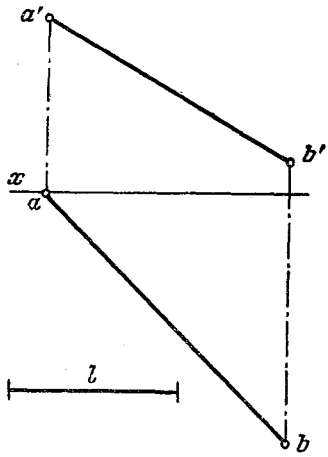
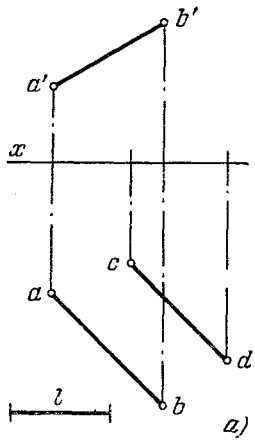


Рис. 275.



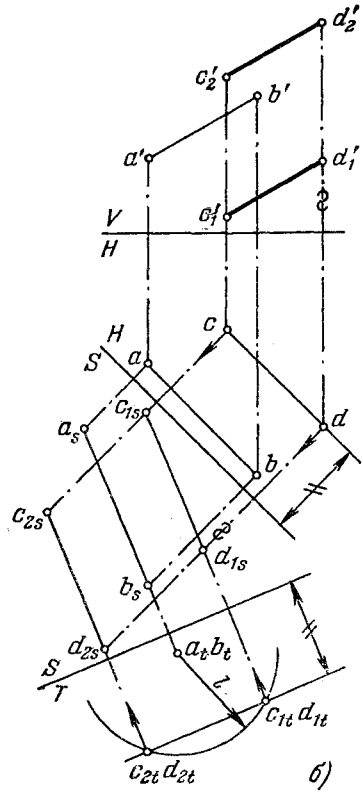


Рис. 276а, б.

Решение. Прямые линии, параллельные AB и находящиеся от нее на расстоянии l, являются образующими цилиндра, осью которого служит прямая AB, а радиусом нормального сечения — отрезок l. Исходя из этого, следует добиться того, чтобы прямая AB оказалась перпендикулярной к некоторой плоскости: цилиндр с осью AB изобразится на этой плоскости в виде окружности, на которой окажется соответствующая проекция прямой CD.

Построение показано на рис. 276, *б*. Последовательно введены дополнительные плоскости $S \perp H$ и $T \perp S$, причем $S \parallel AB$ и $T \perp AB$. Найдя точку $a_t(b_t)$ — проекцию AB на пл. T, очерчиваем дугу радиуса l. Это проекция на пл. T цилиндра, одной из образующих которого должна быть прямая CD. Проекцией этой прямой на пл. T

должна быть точка на проведенной дуге окружности на расстоянии от оси T/S, равном расстоянию проекции cd от оси S/H. Получаем две точки: c_{1t} (d_{1t}) и c_{2t} (d_{2t}), т. е. два ответа: обе прямые отвечают условиям задачи. Найдя проекции $c_{1t}(d_{1t})$ и $c_{2t}(d_{2t})$, проводим $c_{1s}d_{1s} \| a_s b_s$ и $c_{2s}d_{2s} \| a_s b_s$, а затем $c'_1 d'_1 \| a'b' \| c'_2 d'_2$.

294. Построить горизонт. проекцию прямой CD, параллельной прямой AB и отстоящей от нее на расстояние l (рис. 277).

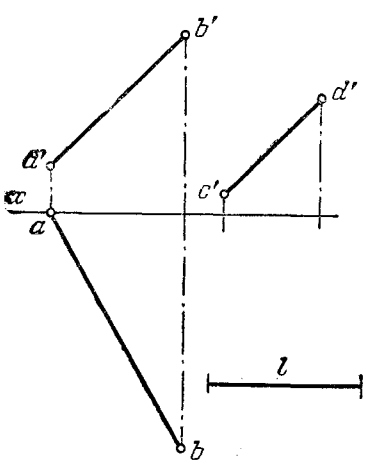
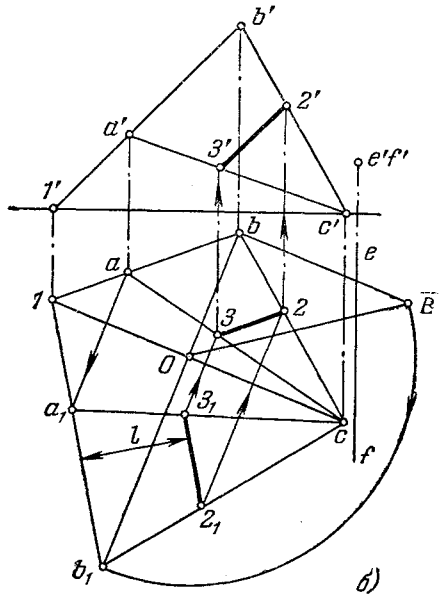
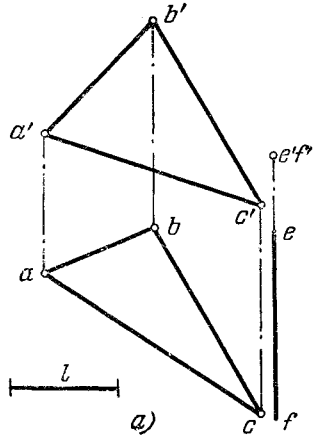


Рис. 277.





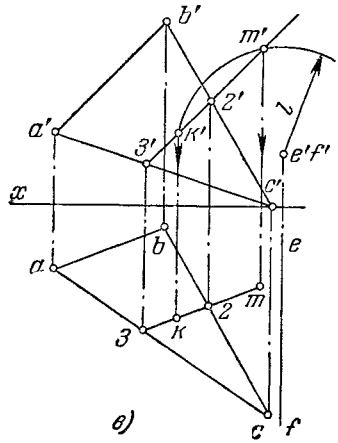


Рис. 278а—в.

295*. В треугольнике ABC найти точку, отстоящую от прямых AB и EF на расстояние l (рис. 278, *а*).

Решение. Геометрическим местом точек на плоскости треугольника, отстоящих на расстояние l от прямой AB, является прямая, ей параллельная и проведенная от нее на расстоянии l. Таких прямых может быть две; ограничимся той, которая находится в пределах треугольника ABC. На рис. 278, *б* треугольник ABC повернут вокруг горизонтали до параллельности пл. H. Горизонталь проведена через точку C. Найдена натуральная величина радиуса вращения точки B — отрезок $\overline{OB}$ и положение A_1B_1C треугольника ABC, когда его плоскость параллельна пл. H.

Проведя прямую $2_1 3_1$ параллельно a_1b_1 на расстоянии l, находим точки 2 и 3, а по ним $2'$ и $3'$ на проекциях соответствующих сторон треугольника.

Переходим ко второму условию, связанному с прямой EF.

Геометрическим местом точек пространства, отстоящих от прямой EF на расстояние l, служит цилиндрическая поверхность с осью EF и радиусом l. Точка пересечения этой поверхности с прямой 2—3 является искомой точкой. Таких точек может быть две. Но в пределах данного треугольника, как это следует из рассмотрения рис. 278, *в*, получится лишь одна точка — точка K.

Так как $EF \perp V$, то получаем непосредственно фронт. след цилиндрической поверхности в виде дуги окружности с центром $e'(f')$ и радиусом l. В пересечении этой дуги с проекцией $2'3'$ получается точка k' — фронт. проекция искомой точки, отстоящей от AB и от EF на расстояние l.

На рис. 278, *в* показана также точка M, отвечающая условиям задачи о равноудаленности от AB и EF (на l). Точка M находится в плоскости, заданной треугольником ABC, но вне его пределов. В условии же задачи сказано: «В данном треугольнике...». Поэтому полностью отвечает условиям задачи только точка K.

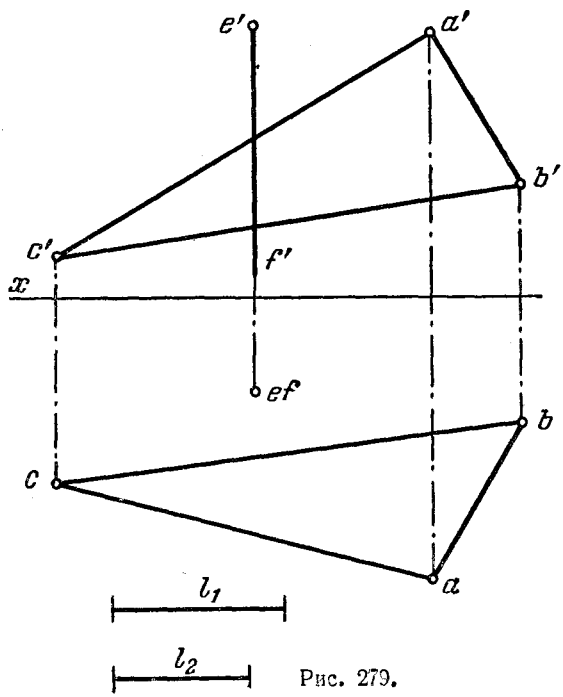
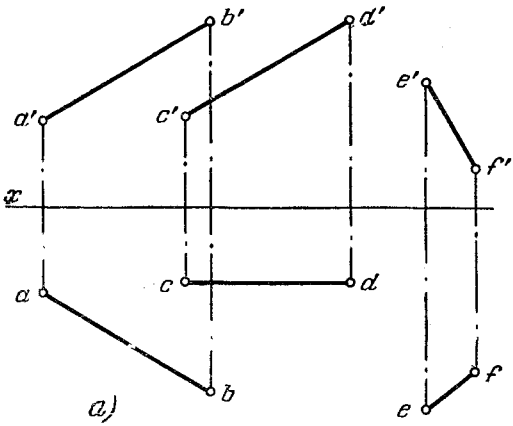


Рис. 279.

296. В данном треугольнике ABC найти точку, отстоящую от прямой AB на расстояние l_1, а от прямой EF на расстояние l_2 (рис. 279).

297*. Провести прямую MN, равноудаленную от прямых AB, CD и EF и параллельную одной из них, а именно прямой CD (рис. 280, *а*).



Решение. Представим себе, что прямая CD расположена перпендикулярно к некоторой плоскости проекций; тогда каждая прямая, параллельная CD, также будет перпендикулярна к этой плоскости, в том числе и искомая. В данном случае прямая CD параллельна пл. V; поэтому можно сразу ввести плоскость S, перпендикулярную к прямой CD, взяв ось $S/V \perp c'd'$ (рис. 280, *б*). Построим проекции a_sb_s, $c_s(d_s)$ и e_sf_s. Проекция искомой прямой MN на пл. S представляет собой точку $m_s(n_s)$, равноудаленную от прямых a_sb_s и e_sf_s и точки $c_s(d_s)$, т. е. является центром окружности,

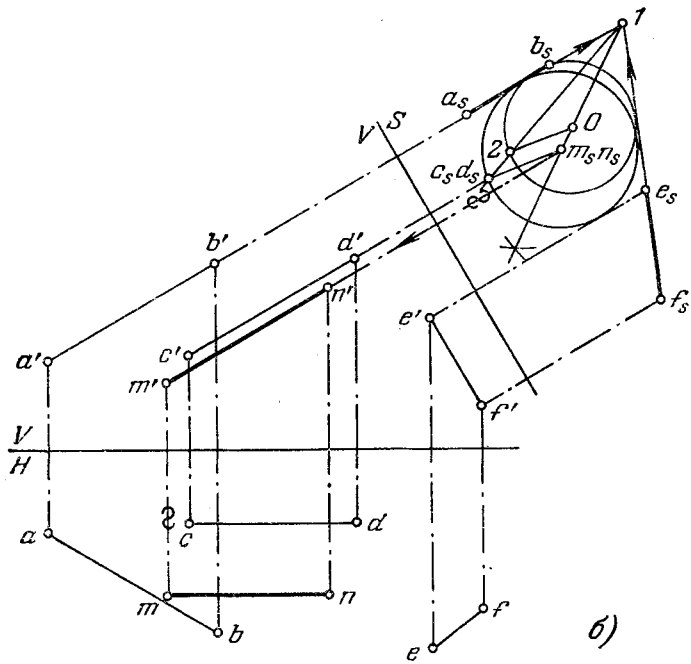


Рис. 280а, б.

проходящей через точку $c_s(d_s)$ и касающейся прямых a_sb_s и e_sf_s. Для ее построения проводим биссектрису угла a_s1f_s и через какую-либо точку o на ней проводим окружность, касающуюся этих прямых. Соединяем точки *1* и $c_s(d_s)$ прямой линией и находим точку *2* пересечения ее с проведенной окружностью. Теперь проводим прямую через точки *O* и *2*. Искомая точка $m_s(n_s)$ лежит на пересечении упомянутой выше биссектрисы с прямой, параллельной прямой *2—O* и проходящей через точку $c_s(d_s)$. По проекции $m_s(n_s)$ находим $m'n'(\|c'd')$ и $mn\|cd$.

298. Провести прямую MN, равноудаленную от прямых AB, CD и EF и параллельную прямой CD (рис. 281).

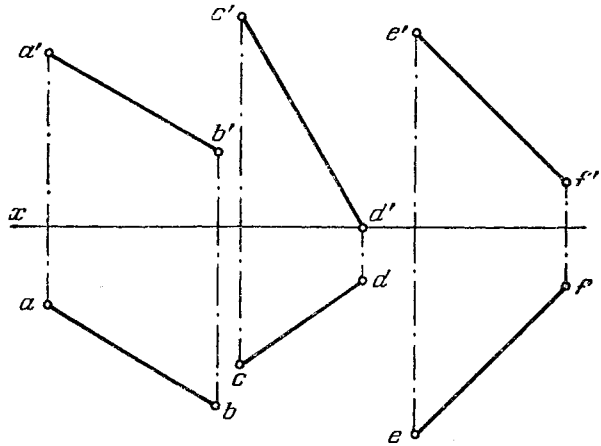


Рис. 281.

299*. Провести прямую MN, равноудаленную от прямых AB, CD и EF и параллельную прямой GK (рис. 282, *а*).

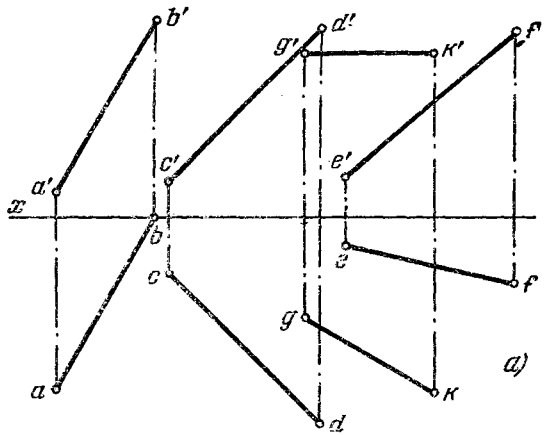


Рис. 282а.

Решение. И в этой задаче, очевидно, надо сделать так, чтобы прямая CD, а следовательно, и искомая параллельная ей прямая MN оказались перпендикулярными к некоторой плоскости проекций. Так как по заданию GK параллельно пл. H, то сразу можно ввести пл. S (рис. 282, *б*), перпендикулярную к пл. H и к GK.

Теперь строим проекции a_sb_s, c_sd_s и e_sf_s. Проекция искомой прямой на пл. S должна быть точкой. Очевидно, надо отыскать точки, равноудаленные от проекций a_sb_s, c_sd_s и e_sf_s. Проведя биссектрисы углов a_s1e_s и c_s2b_s, получим в их пересечении

точку $m_s(n_s)$. Это и будет проекция на пл. S искомой прямой, находящейся на равных расстояниях от AB, CD и EF и параллельной прямой GK.

Здесь дано одно из четырех возможных решений.

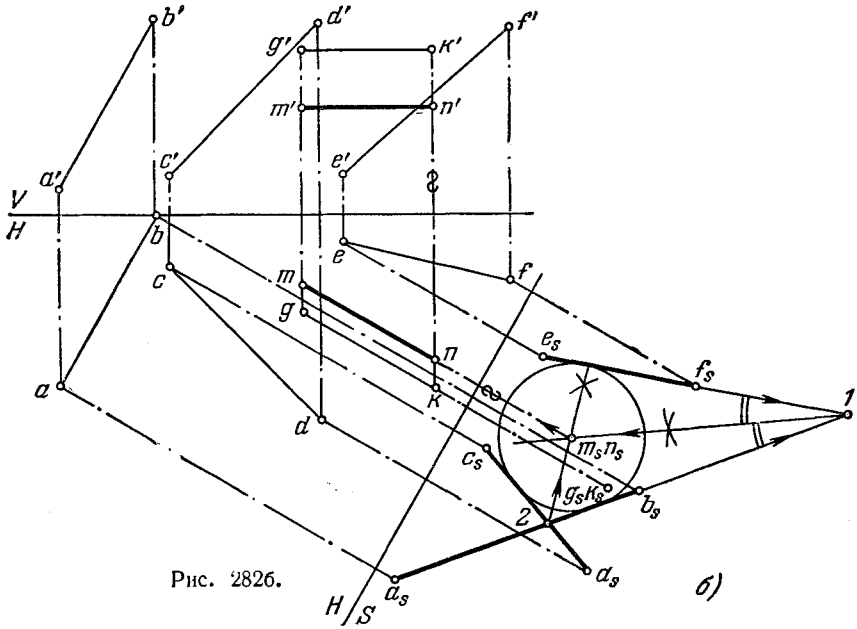


Рис. 282б.

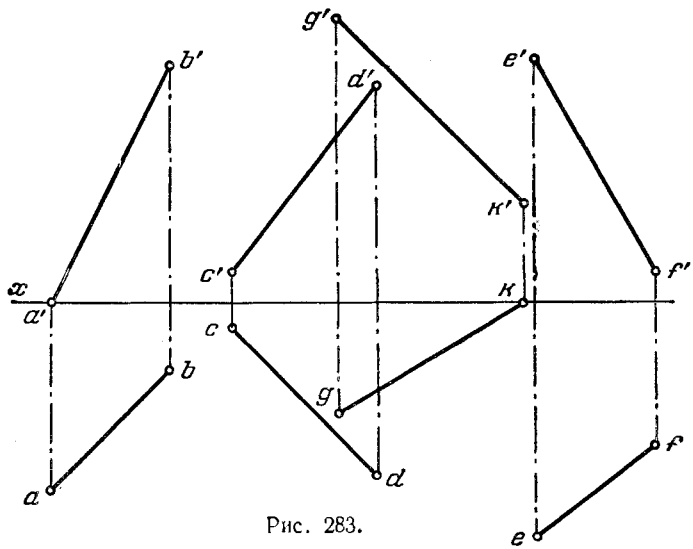


Рис. 283.

300. Провести прямую MN, равноудаленную от прямых AB, CD и EF и параллельную прямой GK (рис. 283).

Указание. В задаче 300, для того чтобы прямая GK оказалась перпендикулярной к некоторой плоскости проекций, требуется введение двух дополнительных плоскостей.

301*. Провести прямую, равноудаленную от четырех заданных точек A, B, C и D (рис. 284, *а*).

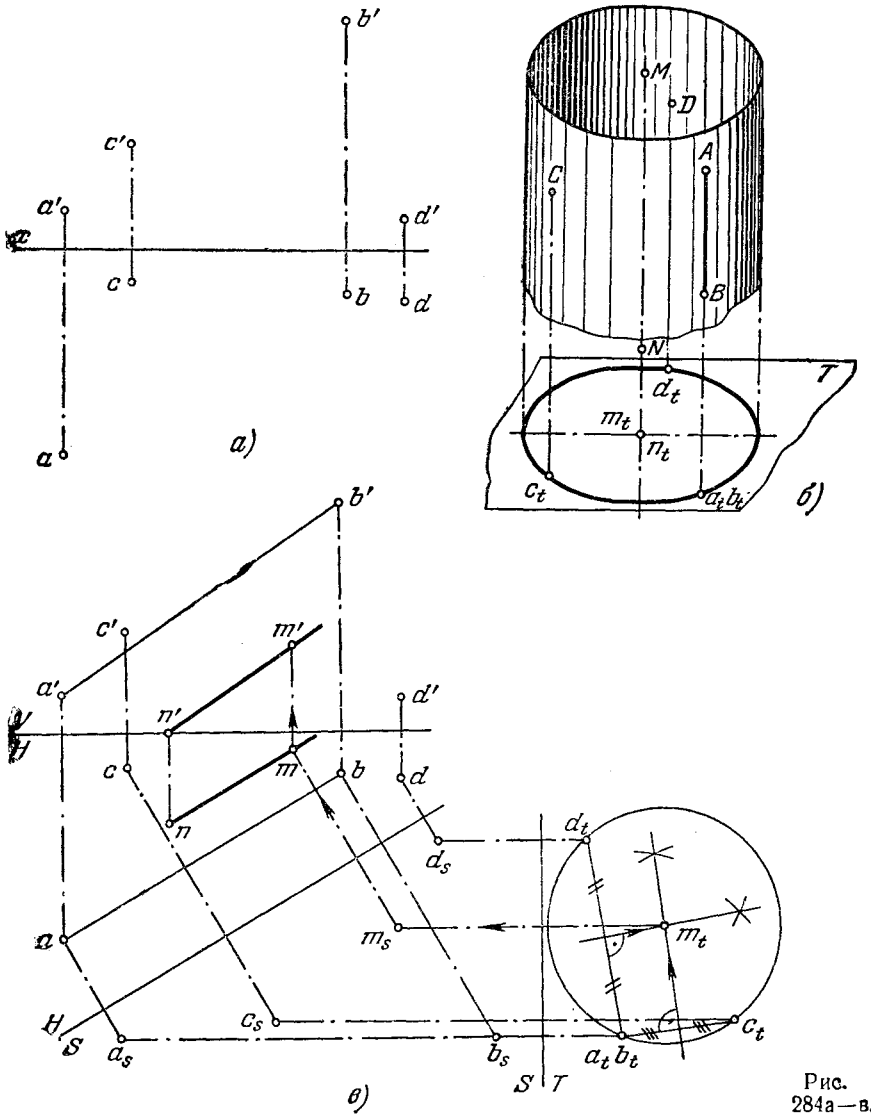


Рис. 284а—в.

Решение. Представляя себе пространственную картину, можно заключить, что искомая прямая является осью цилиндрической поверхности, образующие которой проходят через заданные точки (рис. 284, *б*).

Для построения этой поверхности проведем через любые две заданные точки, например A и B, прямую и примем ее за образующую цилиндрической поверхности. Теперь проведем пл. T перпендикулярно к прямой AB и найдем проекции $a_t(b_t)$, c_t, d_t. Проекция цилиндрической поверхности на пл. T является окружностью, проходящей через точки c_t, d_t и $a_t(b_t)$. Центр этой окружности — точка $m_t(n_t)$ — является проекцией искомой прямой.

Построение показано на рис. 284, *в*. Вводим пл. $S \perp H$ и $\parallel AB$, а затем пл. T, перпендикулярную к пл. S и к AB. Построив проекцию $a_t(b_t)$, c_t и d_t, находим m_t— проекцию одной из точек (M) искомой прямой MN.

Затем находим m_s, m и m'. Проводим $m'n' \parallel a'b'$ и $mn \parallel ab$.

Можно было бы соединить точки A и C, A и D, B и C, B и D, C и D и получить еще пять решений.

302. Провести прямую MN, равноудаленную от четырех заданных точек A, B, C и D (см. рис. 284, *а*). Дать два варианта решения: а) $MN \parallel BD$ и б) $MN \parallel AC$.

303*. Построить фронт. проекцию треугольника ABC, если даны его горизонт. проекция abc и горизонталь DC, а также известно расстояние l от точки K до плоскости этого треугольника (рис. 285, *а*).

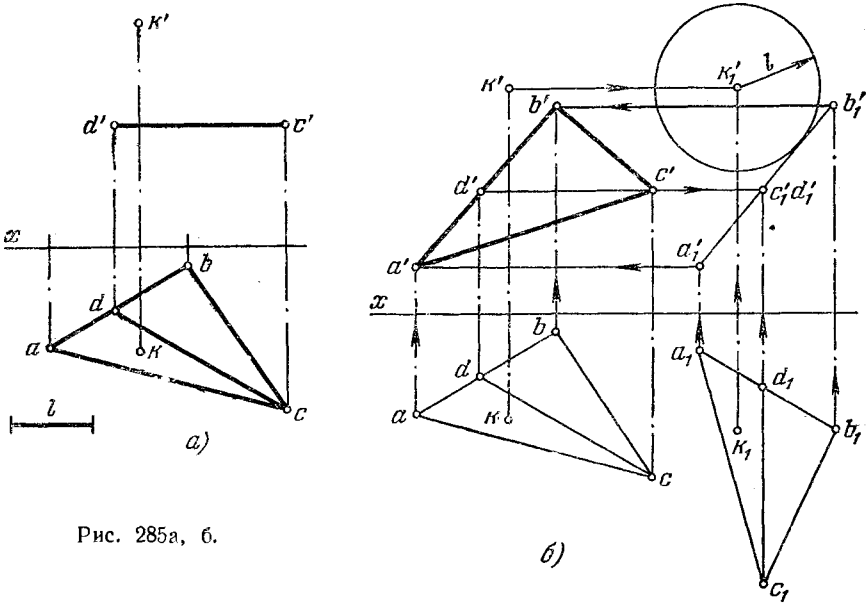


Рис. 285а, б.

Решение. Если представить себе сферу радиуса l как геометрическое место точек, удаленных на расстояние l от точки K, то искомая плоскость будет одной из плоскостей, касательных к этой сфере. При этом, если плоскость окажется фронтально-проецирующей, то ее фронт. след будет касательной прямой к фронт. проекции сферы — окружности радиуса l, и фронт. проекция треугольника ABC совпадет с этой касательной.

Поэтому преобразуем заданный чертеж так, чтобы плоскость треугольника ABC стала фронтально-проецирующей. Для этого применим поворот треугольника и точки K вокруг оси, перпендикулярной к пл. H, но положение этой оси не покажем (способ параллельного перемещения). При таком повороте (рис. 285, *б*) горизонт. проекция в целом лишь изменит положение относительно оси x. А чтобы

плоскость треугольника ABC стала фронтально-проецирующей, надо горизонталь DC расположить перпендикулярно к пл. V, т. е. проекцию dc вывести в положение $d_1c_1 \perp$ оси x.

Теперь, очертив из точки k_1 окружность радиуса l, мы можем провести через точку c_1' (d_1') касательную к окружности. На рис. 285, *б* проведена одна касательная, хотя можно провести еще одну, т. е. дать второе решение. Но так как методика построения не изменяется, то ограничиваемся одним решением, принимая в качестве фронт. проекции треугольника отрезок $a_1'b_1'$. Точки a_1' и b_1' определяются по точкам a_1 и b_1.

В заключение остается возвратиться к заданным проекциям abc, k и k', и получить проекции a' и b', исходя из построенных проекций a_1' и b_1', т. е. получить фронт. проекцию $a'b'c'$.

304. Построить горизонт. проекцию треугольника ABC, если даны его фронт. проекция $a'b'c'$ и фронталь AD, а также известно расстояние l от точки K до плоскости этого треугольника (рис. 286). Дать оба решения.

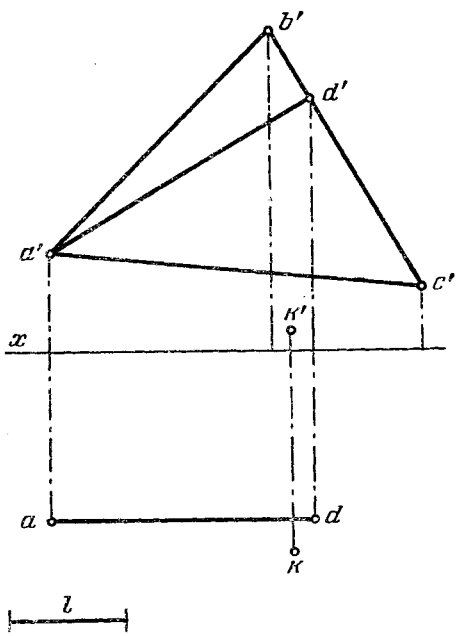


Рис. 286.

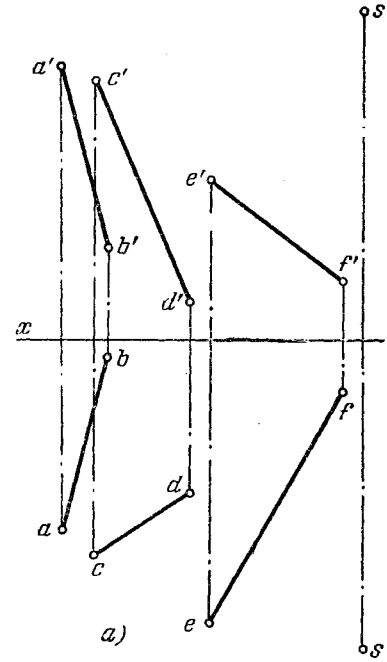


Рис. 287а.

305*. Через точку S провести прямую, равнонаклоненную к заданным прямым AB, CD и EF (рис. 287, *а*).

Решение. Искомая прямая является осью конуса с вершиной S, три образующих которого параллельны соответственно прямым AB, CD и EF (рис. 287, *б*).

Через s' и s (рис. 287, *в*) проводим проекции прямых, параллельных данным прямым (например, $s'1' \parallel a'b'$, $s—1 \parallel ab$, $s'2' \parallel c'd'$ и т. д.).

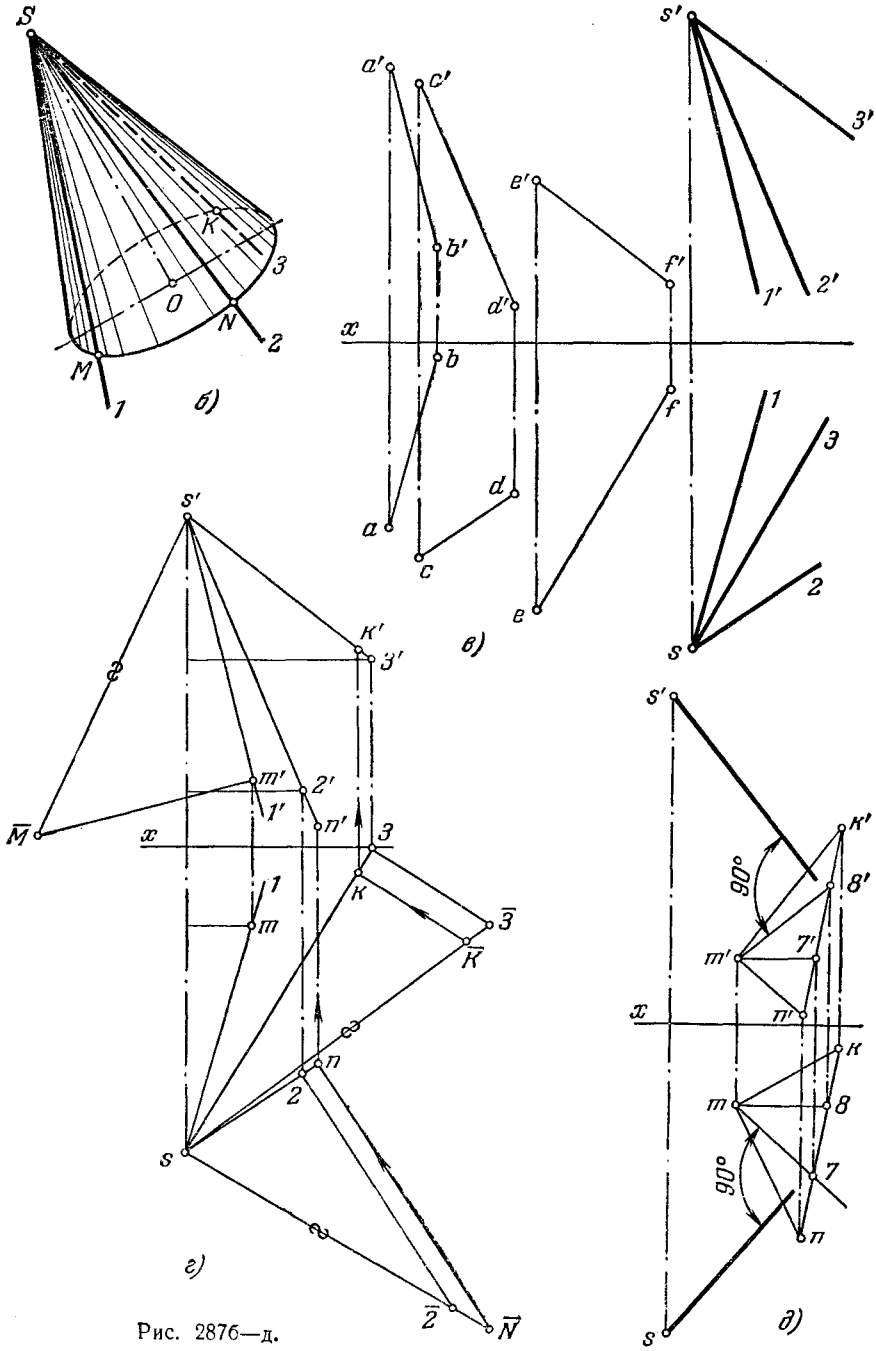

S
K
3
O
N
2
M
1
б)
a'
c'
b'
d'
x
b
a
d
c
e'
f'
f
e
в)
s'
3'
1'
2'
1
3
2
s
s'
K'
3'
m'
2'
1'
n'
M
x
3
1
m
K
3
K
n
2
s
г)
2
N
s'
K'
90°
8'
m'
7'
x
n'
K
m
8
90°
7
n
s
д)

Рис. 287б—д.

Взяв на прямой $S—1$ некоторый отрезок SM (рис. 287, *г*), откладываем на двух других прямых отрезки $SK=SN=SM$.

Точки K, M и N задают (рис. 287, *б*) сечение конуса плоскостью, перпендикулярной к его оси.

Получив точки k, k'; m, m'; n, n', строим треугольники kmn и $k'm'n'$ — проекции треугольника KMN, в плоскости которого надо найти точку, равноудаленную от точек K, M и N, т. е. центр окружности, описанной вокруг этого треугольника. Проведя через эту точку и через точку S прямую, можно получить требуемый ответ. Но достаточно будет только провести перпендикуляр из точки S на плоскость, определяемую треугольником KMN, что и сделано на рис. 287, *д* при помощи горизонтали $M—7$ и фронтали $M—8$.

306*. Ввести прямую AB в пл. P вращением вокруг оси, перпендикулярной к пл. H (рис. 288, *а*).

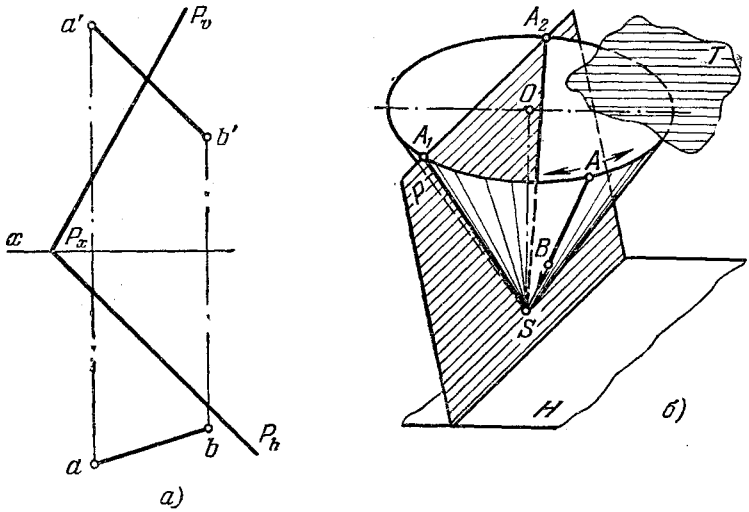


Рис. 288а, б.

Решение. Если найти точку пересечения прямой AB с пл. P, то останется повернуть только одну точку прямой так, чтобы эта точка оказалась в пл. P. Поэтому начинаем с того, что находим точку S пересечения прямой AB с пл. P (рис. 288, *б*), а далее проводим ось вращения через S перпендикулярно к пл. H. При вращении вокруг этой оси точка S остается в пл. P, а прямая AB описывает коническую поверхность. Линии пересечения (SA_1 и SA_2) этой поверхности с пл. P (P проходит через вершину конуса) представляют собой искомые положения прямой AB в пл. P.

Построение показано на рис. 288, *в*. Для нахождения точки S через прямую AB проведена фронтально-проецирующая пл. R. Точка A при повороте вокруг оси OS (рис. 288, *г*) описывает окружность радиуса Oa, лежащую в пл. T, которая пересекается с пл. P по горизонтали. Эта горизонталь пересекает окружность в точках с проекциями a_1 и a'_1, a_2 и a'_2. Проведя прямые $s'a'_1$ и $s'a'_2$, sa_1 и sa_2, находим на этих прямых положение точек b'_1, b'_2, b_1 и b_2. A_1B_1 и A_2B_2 — искомые положения прямой AB.

307. Вращением вокруг оси, перпендикулярной к пл. H (рис. 289), совместить данную прямую AB с а) гранью SDE, б) гранью SCE.

Указание. Начать с нахождения точки пересечения AB с соответствующей гранью.

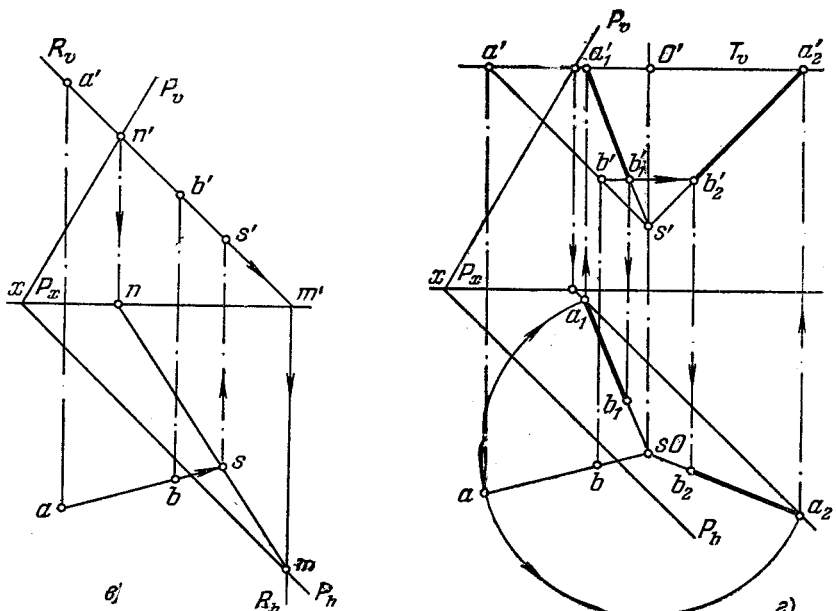


Рис. 288 в, г.

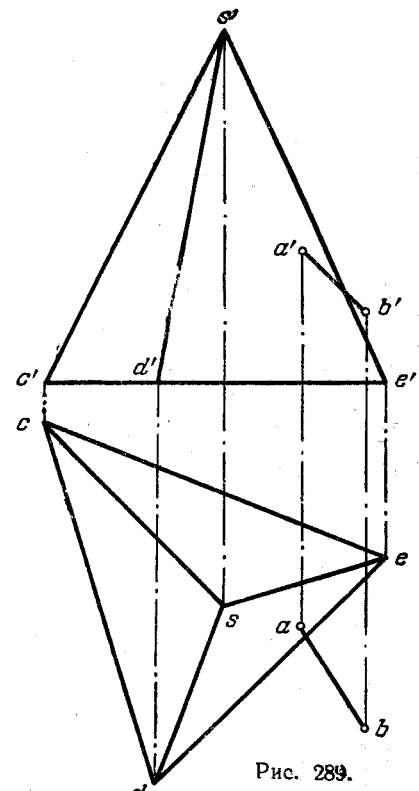
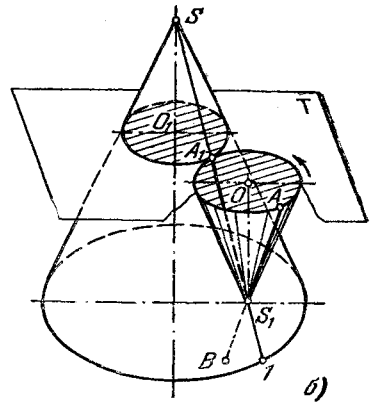
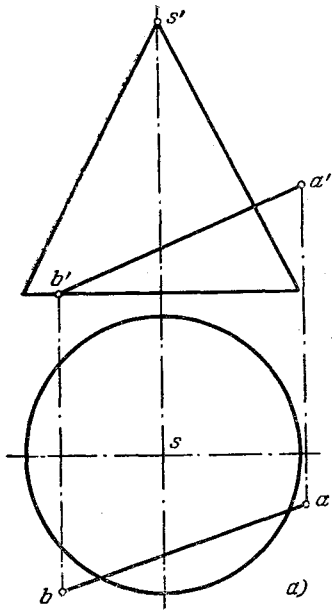


Рис. 289.

308*. Определить, можно ли прямую AB совместить с поверхностью конуса вращения поворотом ее вокруг оси, перпендикулярной к плоскости основания конуса (рис. 290, *а*).

Решение. На рис. 290, *б* показано, что прямая AB совпадает с поверхностью конуса вращения в том случае, если совпадет с его образующей в одном из ее положений. Это положение образующей получим, найдя точку S_1 пересечения прямой AB с поверхностью конуса. Образующая $S—1$, определяемая точками S и S_1, и есть та, с которой должна совпасть прямая AB, если она может быть совмещена с поверхностью конуса. Но чтобы такое совмещение получилось, должны оказаться равными между собой углы, составляемые образующей конуса и данной прямой AB с осью конуса или с прямой, проведенной через точку S_1 параллельно этой оси. Так как в данном случае ось конуса перпендикулярна к пл. H, проверку можно





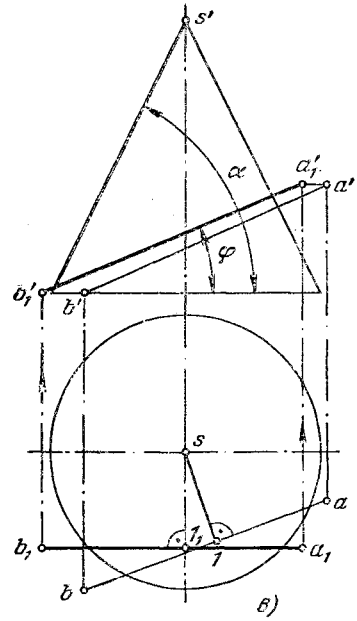


Рис. 290а—в.

свести к определению угла между AB и пл. H (рис. 290, *в*): приняв ось конуса за ось вращения для всей системы «конус и прямая», поворачиваем прямую AB до параллельности пл. V. Так как углы α и φ не равны между собой, то прямая AB не может быть введена на поверхность данного конуса поворотом вокруг оси, перпендикулярной к плоскости его основания.

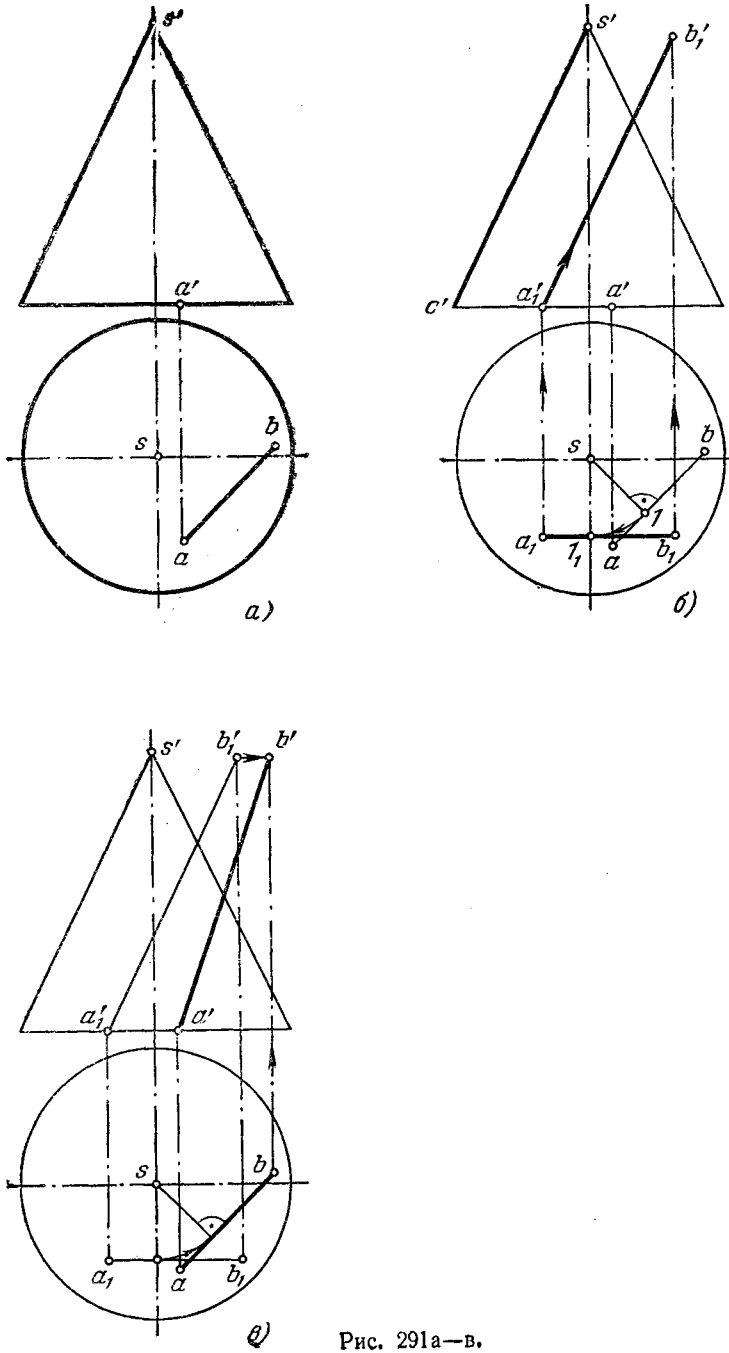


Рис. 291а—в.

309*. Найти фронт. проекцию прямой AB, исходя из условия, что эта прямая может быть совмещена с боковой поверхностью заданного конуса вращения поворотом вокруг оси, перпендикулярной к плоскости его основания (рис. 291, *а*).

Решение. Повернем систему «конус и прямая» вокруг оси конуса с тем, чтобы прямая AB стала параллельной пл. V (рис. 291, *б*). Получив точку a'_1 — фронт. проекцию точки A после поворота, проведем $a'_1 b'_1 \| s'c'$, т. е. получим равные углы между осью конуса и а) его образующей, б) прямой AB. Выводя конус и прямую в начальное положение, получим фронт. проекцию $a'b'$ (рис. 291, *в*) в соответствии с условиями задачи.

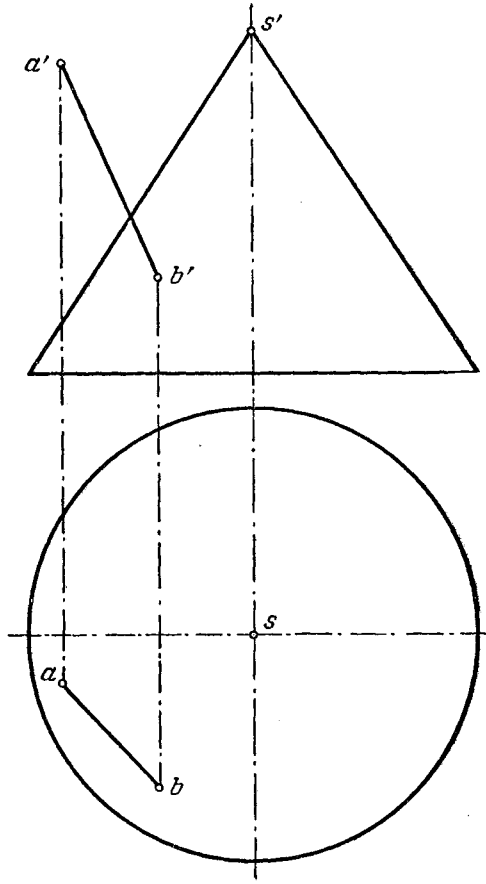


Рис. 292.

310. Ввести прямую AB на поверхность данного конуса (рис. 292) поворотом вокруг оси, перпендикулярной к плоскости его основания.

Указание. Произведя проверку и убедившись в том, что задача может быть решена, надо найти точку пересечения прямой AB с боковой поверхностью конуса. Эта точка вместе с вершиной конуса определяет его образующую в том ее положении, когда прямая AB совпадает с ней.

311*. Построить фронт. проекцию угла AKB, натуральная величина которого равна его горизонт. проекции akb (рис. 293, *а*).

Решение. Известно, что проекция острого (или тупого) угла может равняться проецируемому углу не только в случае параллельности плоскости угла и плоскости проекций. На рис. 293, *б* показано, что, например, все углы, стороны которых соответственно расположены в пл. P и Q, перпендикулярных к пл. H, имеют своей

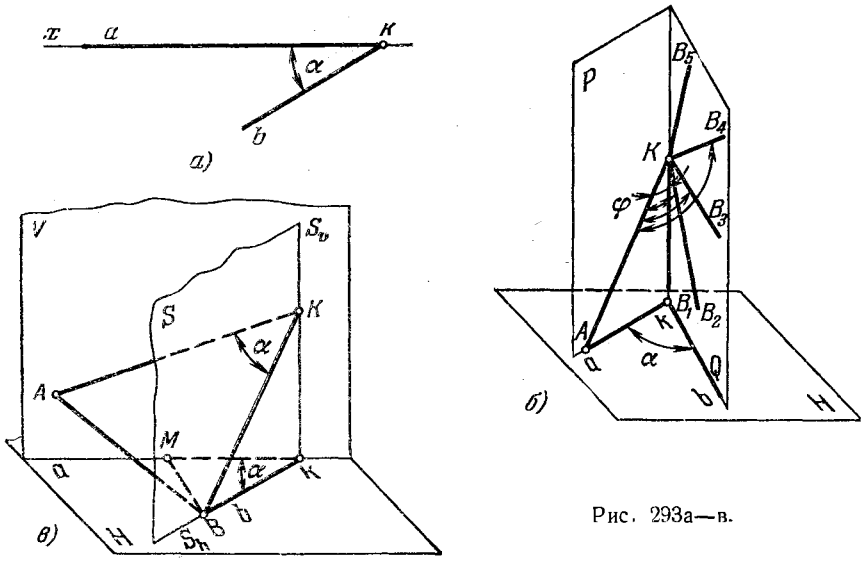


Рис. 293а—в.

горизонт. проекцией угол, равный углу akb. Очевидно, среди различных углов имеется угол, равный этой проекции.

Далее показано построение фронт. проекции угла, равного в натуре его заданной горизонт. проекции. Сделано это тремя способами.

1. Через стороны ak и bk угла akb (рис. 293, *в*), лежащего в пл. H, проводим две плоскости — пл. V и горизонтально-проецирующую пл. S. Угол α является линейным углом двугранного, образованного этими плоскостями. Стороны угла, равного его горизонт. проекции, должны лежать — одна в пл. V, другая в пл. S. Этот угол построен при помощи треугольника AKB, подобного некоторому треугольнику MkB, взятому на пл. H. Построение проводится так, чтобы стороны AB и BM были сходственными.

Задаемся некоторым коэффициентом подобия λ. На ребре двугранного угла выбираем точку K так, чтобы $BK=\lambda\cdot Bk$. Если теперь построить точку A с тем, чтобы $AK=\lambda\cdot Mk$ и $AB=\lambda\cdot BM$, то треугольники AKB и MkB окажутся подобными, и угол AKB будет равен α.

Для построения точки A используем два геометрических места точек: геометрическое место точек в пл. V, удаленных от точки K на расстояние $AK=\lambda\cdot Mk$ (т. е. окружность, проведенная из точки K радиусом $\lambda\cdot Mk$), и геометрическое место точек, отстоящих от точки B на расстояние $AB=\lambda\cdot BM$ (т. е. сфера радиуса AB с центром в точке B). Точка A должна лежать в пл. V, т. е. должна быть на окружности, по которой пл. V пересекает указанную сферу и центром которой является фронт. проекция точки B.

В пересечении обеих окружностей, расположенных в пл. V, получаем две точки, из которых на рис. 293, *в* показана одна — точка A.

Соответствующий чертеж приведен на рис. 293, *г*. Принимаем $\lambda=2$. Из точки b_0 (построение ее ясно из чертежа) проводим дугу радиуса $R_1=2kb$ до пересечения в точ-

ке k' с линией связи, проходящей через точку k. Из точки k' проводим дугу радиуса $R_2=2km$. Если теперь из точки b радиусом $R_3=2bm$ провести окружность, то получим проекцию упомянутой выше сферы.

Окружность, по которой эта сфера пересекается плоскостью V, имеет центр в точке b' и радиус, равный cb'. Точка a' лежит на пересечении дуг радиуса R_2 и радиуса, равного cb', точка a — на оси x. Угол $a'k'b'$ — искомая фронт. проекция угла, равного своей горизонт. проекции.

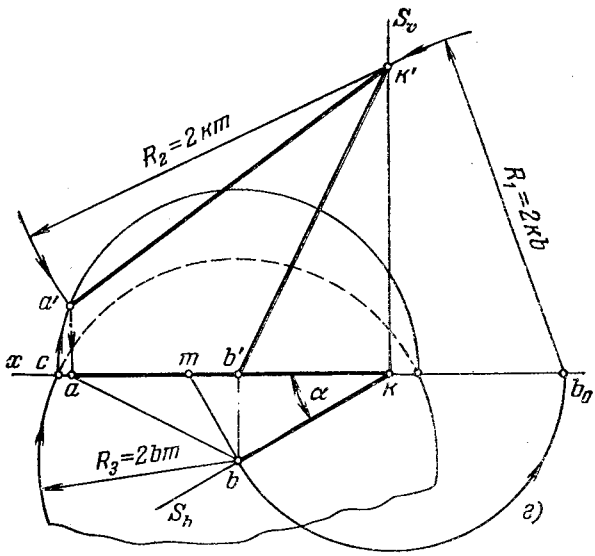


Рис. 293г.

2. Возьмем точку k (рис. 293, *д*) на ребре двугранного угла, образованного плоскостями V и P, проведенными через стороны ak и bk угла akb. Из этой точки проведем в пл. V прямые AK и A_1K, образующие между собой угол, равный α, и повернем прямую A_1K вокруг прямой AK. При этом образуется коническая поверхность с образующей A_1K и осью AK. Линия KB пересечения конической поверхности плоскостью P будет стороной угла AKB, в натуре равного α. Чтобы найти эту линию пересечения, надо построить прямую *1—2* пересечения пл. P с пл. T основания конуса. Тогда точки C и B пересечения окружности основания с прямой *1—2* определят образующие, по которым пл. P пересекает коническую поверхность.

Чертеж показан на рис. 293, *е*, причем плоскости V и P изображены прямоугольниками *I* и *II*. Через точку k' в прямоугольнике *I* проведены прямые $a'k'$ и $a_1'k'$ так, чтобы угол между ними был равен α. Через точку a_1' перпендикулярно к $a'k'$ проведен след T_v плоскости T — основания конуса. Точка $O'O$ — центр окружности основания конуса. Прямая с проекциями $1'2'$ и $1—2$ — линия пересечения плоскостей T и P.

Введя дополнительную пл. $S \perp V$ и $\perp AK$, построим проекции O_s и a_{1s}, а также 1_s2_s. Окружность, проведенная из точки o_s радиусом o_sa_{1s}, пересекает прямую 1_s2_s в точках c_s и b_s — проекциях точек, принадлежащих образующим KB и KC. На рис. 293, *е* показано построение фронт. проекции только точки B: по точке b_s построена точка b'. Угол $a'k'b'$ является фронт. проекцией угла, в натуре равного углу α.

3. В этом случае использовано совмещение плоскости искомого угла с пл. H (рис. 293, *ж*).

Проводим прямую ab — горизонт. след плоскости, в которой лежит рассматриваемый угол, и поворачиваем вокруг него точку K до совмещения ее с пл. H. Чтобы

при этом угол aK_0b оказался равным α, надо вписать угол aK_0b в окружность, проведенную через точки a, b и k. Тогда углы akb и aK_0b, как вписанные, опирающиеся на

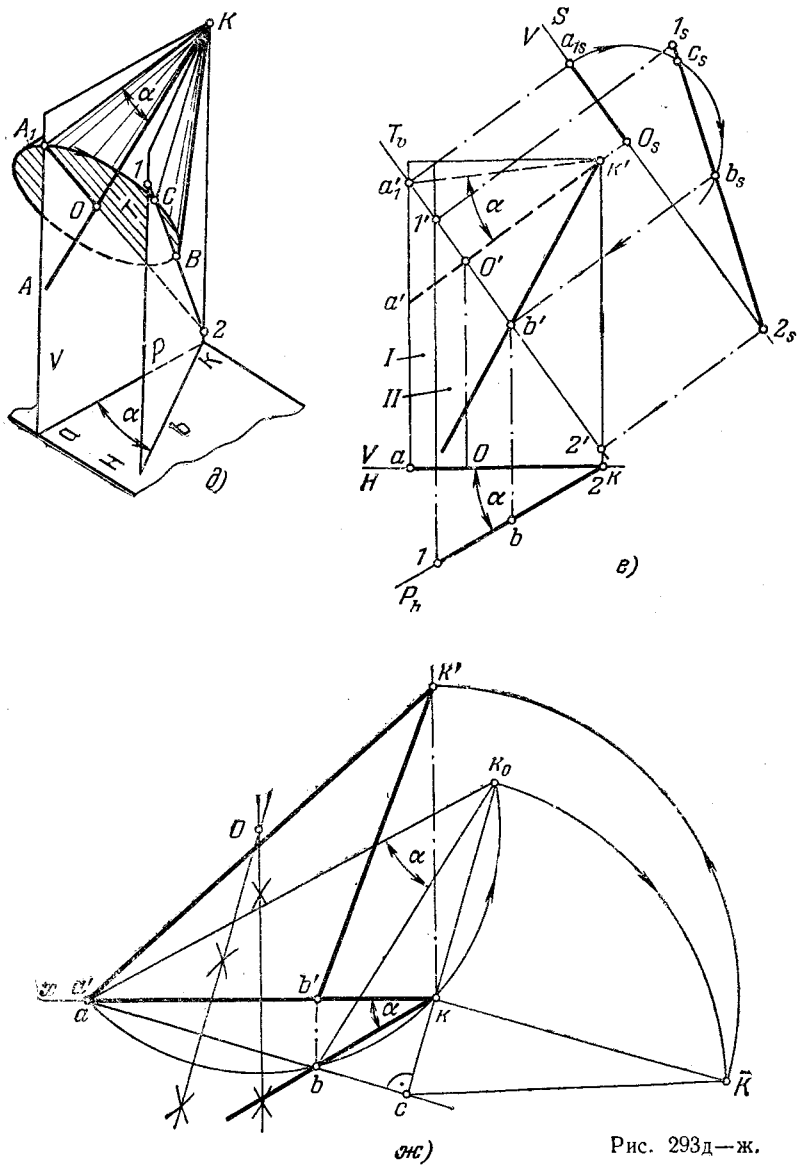


Рис. 293д—ж.

одну и ту же дугу, будут равны между собою. Остается найти точку K_0 в пересечении окружности, проведенной через точки a, b и k, со следом плоскости вращения точки K вокруг прямой ab. Зная натуральную величину $c\bar{K}$ радиуса вращения точки K

и его горизонт. проекцию ck, находим отрезок $k\overline{K}$ — превышение точки K над пл. H, а это дает нам возможность получить точку k'. Угол $a'k'b'$ является искомой фронт. проекцией угла AKB, равного своей горизонт. проекции. Во всех примерах мы ограничились показом построения лишь одного угла, хотя углов, натуральная величина которых равна заданной горизонт. проекции, множество.

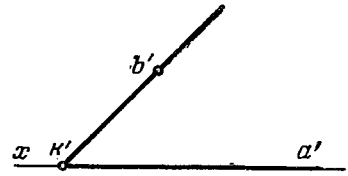


Рис. 294.

312. Построить горизонт. проекцию угла AKB, равного в натуре своей фронт. проекции $a'k'b'$ (рис.294). Решить всеми тремя способами.

313*. Найти направление фронт. следа фронтально-проецирующей плоскости, пересекающей заданный конус вращения так, чтобы профильная проекция эллипса сечения оказалась окружностью (рис. 295, *а*).

Решение. В общем случае профильная проекция эллипса, получаемого при пересечении конуса вращения, представленного на рис. 295, *а*, фронтально-

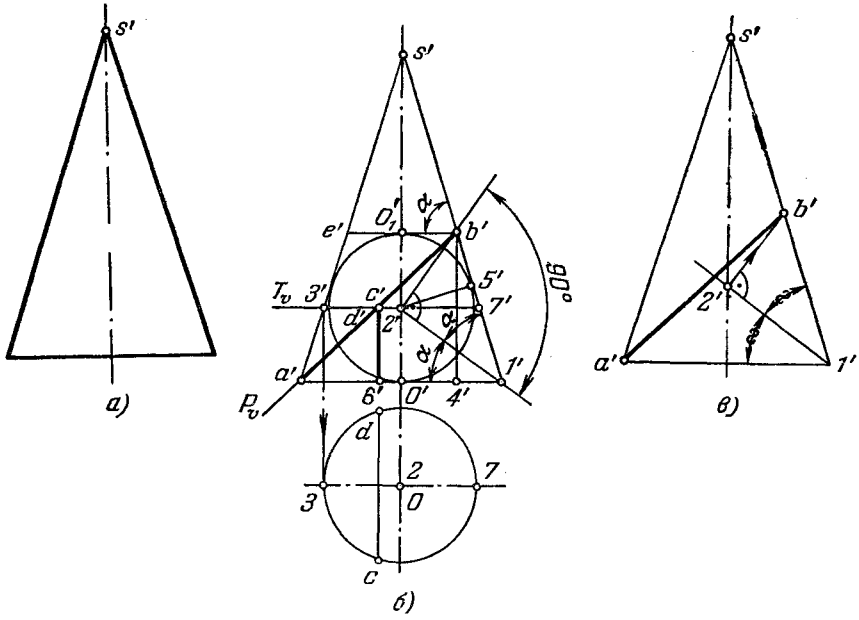


Рис. 295а—в.

проецирующей плоскостью P, является эллипсом (рис. 295, *б*), оси которого равны величинам отрезков $b'4'$ и cd.

Если окажется, что $b'4'=cd$, то эллипс сечения изобразится на пл. W окружностью. Этого можно достичь, если след P_v искомой плоскости направить по диагонали равнобочной трапеции $a'e'b'1'$ (рис. 295, *б*), в которую вписывается окружность с центром в точке $2'$. Для построения такой трапеции проводим биссектрису угла $a'1'b'$ до пересечения с осью симметрии трапеции в точке $2'$. Проводим из этой точки перпендикуляр к биссектрисе и находим точку b' (рис. 295, *в*).

314. Дан след P_h фронтально-проецирующей пл. P, пересекающей конус вращения по эллипсу. Построить фронт. след этой плоскости из условия, что профильная проекция эллипса является окружностью (рис. 296).

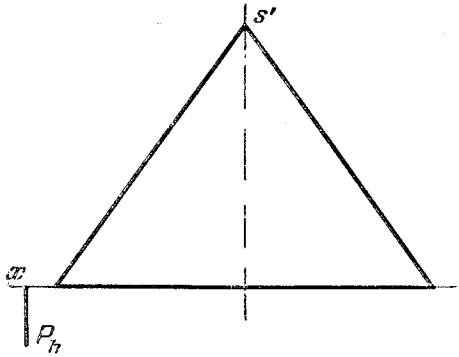


Рис. 296.

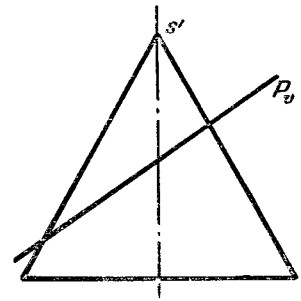


Рис. 297.

315. Будет ли (рис. 297) проецироваться на пл. W в виде окружности эллипс, получаемый при пересечении данного конуса вращения фронтально-проецирующей пл. P?

§ 25. Задачи для самостоятельного решения

316. Построить проекции равнобедренного треугольника ABC с основанием BC, лежащего в плоскости (рис. 298), заданной линией ската AM и точкой B (дана ее горизонт. проекция).

317. Пересечь две скрещивающиеся прямые AB и CD прямой KM, перпендикулярной к плоскости, заданной треугольником EFG (рис. 299).

318. Косая плоскость задана направляющими AB и CD и плоскостью параллелизма — горизонтально-проецирующей пл. P (дан горизонт. след P_h). Построить профильную проекцию линии пересечения косой плоскости профильной плоскостью S (рис. 300).

319. Построить фронт. и горизонт. проекции точки K, принадлежащей поверхности сжатого эллипсоида вращения (дана проекция k'', точка видима), и натуральный вид сечения $A—A$ (рис. 301).

320. Построить проекции сферы, касательной к данной сфере в точке K, расположенной на ее передней стороне (дана фронт. проекция точки). Радиус искомой сферы $R_1 = {}^2/_3\ R$ (рис. 302).

321. Построить проекции прямого кругового конуса, касательного к данному в заданной на его боковой поверхности видимой точке K (дана горизонт. проекция этой точки). Вершина S искомого конуса должна быть на пл. H. Высота и диаметр основания обоих конусов одинаковы (рис. 303).