

## ГЛАВА 4

## Применение статистики Ферми и статистики Бозе

---

В настоящей главе мы постараемся более глубоко рассмотреть смысл ферми- и бозе-статистик, а также показать, как они применяются к различным физическим проблемам. Статистики Ферми и Бозе обладают целым рядом характерных свойств, отличных от свойств классической статистики Больцмана, справедливой при выполнении условия

$$\frac{N}{V} \gg \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{\hbar^3}.$$

Таким образом, квантовые эффекты проявляются при низких температурах и высоких плотностях. Особенно важную роль играет применение квантовой статистики к электронам в твердом теле.

### ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

#### § 1. Основные формулы ферми-статистики

В системе фермionов<sup>1)</sup> средние числа заполнений одночастичных состояний  $\tau$  даются выражением (см. гл. 1, § 15)

$$\bar{n}_\tau = \frac{1}{e^{(\varepsilon_\tau - \mu)/kT} + 1}; \quad (4.1)$$

здесь  $\varepsilon_\tau$  — энергия, соответствующая квантовому состоянию  $\tau$ , а  $\mu$  — химический потенциал. В случае фермиевского распределения  $\mu$  называют *уровнем Ферми*, или *потенциалом Ферми*, иногда также *энергией Ферми* (хотя последний термин представляется нам не особенно удачным, но он все более и более входит в употребление). Если полная энергия системы выражается просто суммой одночастичных энергий, то средняя полная энергия определяется следующим образом:

$$E = \sum_{\tau} \varepsilon_{\tau} \bar{n}_{\tau} = \sum_{\tau} \frac{\varepsilon_{\tau}}{e^{(\varepsilon_{\tau} - \mu)/kT} + 1}. \quad (4.2)$$

<sup>1</sup> Частицы, подчиняющиеся статистике Ферми, называются фермionами.

Полное число частиц в системе равно

$$N = \sum_{\tau} \bar{n}_{\tau} = \sum_{\tau} \frac{1}{e^{(\varepsilon_{\tau}-\mu)/kT} + 1}, \quad (4.3)$$

а свободная энергия

$$F = N\mu - kT \sum_{\tau} \ln(1 + e^{-(\varepsilon_{\tau}-\mu)/kT}). \quad (4.4)$$

Выражения (4.1) — (4.3) могут быть интерпретированы следующими различными способами.

1. Заданы  $T$  и  $\mu$ . (Система находится в тепловом и материальном контакте с окружением.) В этом случае (4.1) дает средние числа заполнений для одиночастичных состояний, (4.2) — среднюю полную энергию, а (4.3) — среднее полное число частиц в системе.

2. Заданы  $T$  и  $N$ . Тогда (4.3) позволяет определить  $\mu$  как функцию переменных  $T$  и  $N$ , а (4.1) и (4.2) дают средние числа заполнений и среднюю полную энергию соответственно.

3. Заданы  $E$  и  $N$ . Тогда  $T$  и  $\mu$  могут быть найдены из (4.2) и (4.3) как функции переменных  $E$  и  $N$ , а (4.1) дает средние числа заполнений.

*Одночастичная плотность состояний.* Пусть  $V$  есть объем пространства, в котором заключены частицы. При увеличении  $V$  одночастичные уровни будут распределяться все более и более плотно. Если объем достаточно велик, то число состояний с энергиями между  $e$  и  $e + \Delta e$  будет равно

$$D(e) \Delta e;$$

функция  $D(e)$  называется плотностью одночастичных состояний.

С помощью функции  $D(e)$  выражения (4.2) — (4.4) можно переписать в виде

$$E = \int e f(e) D(e) de, \quad (4.2')$$

$$N = \int f(e) D(e) de, \quad (4.3')$$

$$F = N\mu - kT \int D(e) de \ln(1 + e^{-(e-\mu)/kT}), \quad (4.4')$$

где

$$f(e) = \frac{1}{e^{\beta(e-\mu)} + 1} \quad \left( \beta = \frac{1}{kT} \right). \quad (4.5)$$