$$\int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon-\mu)^n \frac{df}{d\varepsilon}\, d\varepsilon = -\frac{1}{kT} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\varepsilon-\mu)^n e^{\beta(\varepsilon-\mu)}}{\{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1\}^2}\, d\varepsilon = -(kT)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n e^x\, dx}{(e^x+1)^2} =$$

$$= -2\,(kT)^n n!\,(1-2^{-n+1})\,\zeta(n) \qquad (n \text{ — четное})\ ^{1)},$$

где

$$\zeta(n) = \sum_{l=1}^{\infty} l^{-n}, \qquad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

— ζ-функции Римана. Подставляя эти выражения в (4.7), получаем

$$I = \varphi(\mu) + \sum_{r=1}^{\infty} 2\,(1-2^{1-2r})\,\zeta(2r)\,(kT)^{2r}\varphi^{(2r)}(\mu).$$

Полагая $g = \varphi'(\varepsilon)$, приходим к (4.6а).

Энергия Ферми $\mu(T)$ *при низких температурах*. Формулы (4.6) применяются в очень многих случаях; рассмотрение их отнесено к задачам. Одним из весьма существенных результатов, получаемых с их помощью, является разложение

$$\mu = \mu_0 \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{6} \frac{d \ln D(\mu_0)}{d \ln \mu_0} \left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2 + \ldots \right\}. \tag{4.8}$$

§ 3. Энергетические зоны в кристаллах

В случае свободных электронов выражение для плотности состояний имеет очень простой вид

$$D(\varepsilon) = 2\,\frac{4\pi V}{h^3}\, p^2 \frac{dp}{d\varepsilon} = \frac{8\pi V}{h^3}\,(2m^3\varepsilon)^{1/2} \qquad \left(\varepsilon = \frac{p^2}{2m}\right); \tag{4.9}$$

множитель 2 появляется из-за вырождения по спину. На фиг. 77 приведен график функции $D(\varepsilon)$.

---

[1]) Интеграл вычисляется следующим образом:

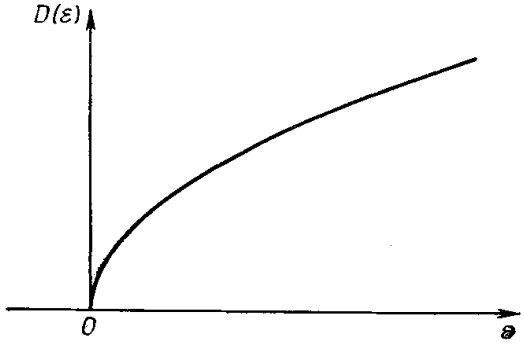
$$\int_0^{\infty} \frac{x^n e^x\, dx}{(e^x+1)^2} = -\int_0^{\infty} x^n \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{e^x+1}\right) dx = n \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{e^x+1}\, dx =$$

$$= n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-(k+1)x}\, dx = n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^n} =$$

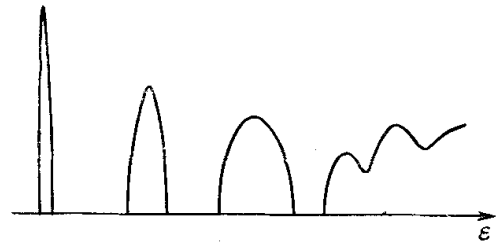
$$= n! \left\{ \sum_{l \text{ нечетн}} \frac{1}{l^n} - \sum_{l \text{ четн}} \frac{1}{l^n} \right\} = n! \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^n} - 2 \sum_{l \text{ четн}} \frac{1}{l^n} \right\} =$$

$$= n! \left(1 - \frac{2}{2^n}\right) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^n} = n!\,(1-2^{1-n})\,\zeta(n).$$

Плотность состояний электронов в кристаллическом твердом теле описывается более сложной функцией, так как на нее влияет периодичность структуры кристалла. В результате кривая плотности состояний распадается на большое число различных участков, как схематически показано на фиг. 78. Такой тип структуры плотности состояний называется *зонной структурой* спектра



Фиг. 77. Кривая плотности состояний для свободных электронов



Фиг. 78

электронов в кристалле. Вид зонной структуры определяется конкретными свойствами данного твердого тела.

Подробное объяснение причин возникновения зонной структуры выходит за рамки данной книги, так что мы добавим к сказанному лишь несколько слов. Как известно, электроны в изолированном атоме имеют дискретные энергетические уровни. Когда атомы сближаются друг с другом, образуя кристаллы, определенный электрон перестает принадлежать отдельному атому, а распределяется, так сказать, между всеми атомами кристалла. Это и обусловливает двоякую природу электронов кристалла: они одновременно являются как атомными, так и свободными. В результате дискретные атомные энергетические уровни размываются. Таким образом можно качественно объяснить возникновение зон, имеющих некоторую конечную ширину. Вообще говоря, установить соответствие между определенным атомным уровнем и зоной можно лишь для низколежащих энергетических зон. Напротив, более высокие зоны часто перекрываются, так что установить такое соответствие не всегда просто.

§ 4. Дырки

Величина

$$\bar{n}'_\tau = 1 - \bar{n}_\tau = \frac{1}{e^{-(\varepsilon_\tau - \mu)/kT} + 1} \tag{4.10}$$