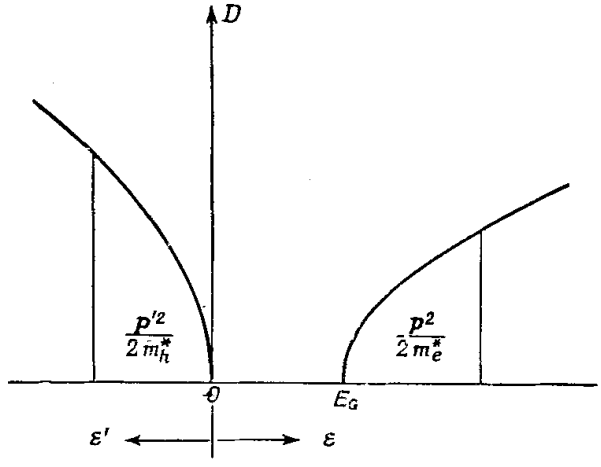
зоне, вообще говоря, довольно сложным образом зависят от импульса. Однако обычно мы имеем дело только с электронами, находящимися вблизи дна зоны проводимости, или с дырками, находящимися вблизи вершины валентной зоны. В этих случаях можно пользоваться простым приближением

$$\begin{aligned} \varepsilon(\boldsymbol{p}) &= E_G + \frac{1}{2m_e^*}\boldsymbol{p}^2 \qquad &\text{(электроны)},\\ \varepsilon'(\boldsymbol{p}') &= \frac{1}{2m_h^*}\boldsymbol{p}'^2 \qquad &\text{(дырки)}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Это означает, что электроны в зоне проводимости ведут себя как свободные электроны с массой m_e^*, а дырки в валентной зоне — как свободные позитроны с массой m_h^* и зарядом $|e|$. Величины



Фиг. 84.

m_e^* и m_h^* называются *эффективными массами*. Вообще говоря, эффективная масса является тензорной величиной и зависит от импульса частицы. В предположении (4.13) плотность состояний $D(\varepsilon)$ становится простой параболической функцией (фиг. 84) подобно тому, как это имеет место для свободных электронов.

§ 6. Статистика Бозе. Жидкий гелий[1])

Для бозонов справедливы следующие формулы (см. гл. 1, § 15):

$$\bar{n}_\tau = \frac{1}{e^{(\varepsilon_\tau-\mu)/kT}-1}, \tag{4.14}$$

$$E = \sum \varepsilon_\tau \bar{n}_\tau = \sum_\tau \frac{\varepsilon_\tau}{e^{(\varepsilon_\tau-\mu)/kT}-1}, \tag{4.15}$$

[1]) См. также книгу Хуанга [9].— *Прим. ред.*

$$N = \sum \bar{n}_\tau = \sum_\tau \frac{1}{e^{(\varepsilon_\tau - \mu)/kT} - 1}, \tag{4.16}$$

$$F = N\mu + kT \sum_\tau \ln\left(1 - e^{-(\varepsilon_\tau - \mu)/kT}\right). \tag{4.17}$$

В большинстве случаев число частиц N задано, так что соотношение (4.16) определяет μ как функцию от T и N/V. Функция

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} - 1} \tag{4.18}$$

называется *функцией распределения Бозе*. Как показано на фиг. 85, функция $f(\varepsilon)$ обращается в бесконечность при $\varepsilon \to \mu$. Поэтому, если выбрать за начало отсчета наименьшее значение одночастичной энергии, то

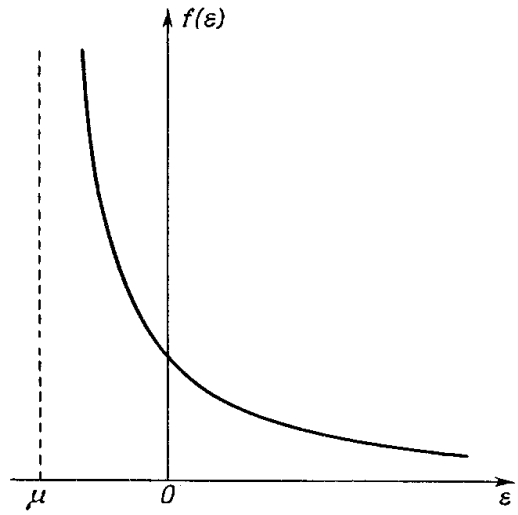
$$\mu \leqslant 0. \tag{4.19}$$

Если выполнено условие $|\mu| \gg kT$, то мы имеем невырожденную систему, и статистика Бозе может быть заменена статистикой Больцмана. При

$$|\mu| \sim kT \tag{4.20}$$

существует заметное вырождение. В случае свободных частиц последнее условие принимает вид

$$\frac{N}{V} \gtrsim \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}.$$



Фиг. 85. Функция распределения Бозе

Среди реально существующих бозонов это условие может выполняться только для атомов гелия, так как масса их мала, а плотность жидкого гелия, с одной стороны, достаточно высока, чтобы левая часть неравенства имела сравнительно большое значение, а с другой стороны, достаточно низка, чтобы жидкий гелий можно было рассматривать как газ.

Жидкий гелий II. Газообразный гелий превращается в жидкость при 4,22° К. При дальнейшем охлаждении жидкий гелий претерпевает фазовый переход второго рода при температуре 2,19° К, в окрестности которой наблюдается аномальный ход кривой теплоемкости. Фазу, существующую выше точки перехода, называют жидким гелием I, фазу, существующую ниже точки перехода,— жидким гелием II. Жидкий гелий II представляет собой весьма своеобразную жидкость, которая фактически

является квантовой жидкостью. Это означает, что в жидком гелии II некоторые квантовые эффекты проявляются в макроскопическом масштабе. Детальное объяснение этого явления выходит за рамки настоящей книги; здесь мы заметим лишь, что этот переход (λ-переход) можно интерпретировать как следствие *бозе-эйнштейновской конденсации*, которая является наиболее сильным проявлением вырождения бозе-системы[1]).

ПРИМЕРЫ

1. Вычислить энергию Ферми μ и внутреннюю энергию E идеального ферми-газа, состоящего из частиц со спином $^1/_2$, с точностью до членов порядка T^4 в случае достаточно сильного вырождения.

РЕШЕНИЕ

Плотность состояний в случае свободных частиц, заключенных в ящик объемом V, была рассмотрена в гл. 1, задача 6, и имеет вид

$$D(\varepsilon)=\frac{2V}{h^3}\frac{d}{d\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}4\pi p^2\,dp=2\cdot 2\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\varepsilon^{1/2}\qquad (p^2=2m\varepsilon). \tag{1}$$

Множитель 2 возник из-за спинового вырождения. При 0° К полностью заняты все энергетические уровни вплоть до уровня $\varepsilon=\mu_0$, который определяется соотношением

$$\int_0^{\mu_0}D(\varepsilon)\,d\varepsilon=4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\int_0^{\mu_0}\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon=\frac{8\pi}{3}V\left(\frac{2m}{h^2}\mu_0\right)^{3/2}=N, \tag{2}$$

т. е.

$$\mu_0=\frac{h^2}{2m}\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{2/3};$$

здесь N — полное число частиц в системе. Таким образом,

$$D(\varepsilon)=\frac{{}^3/_2 N\varepsilon^{1/2}}{\mu_0^{3/2}}. \tag{3}$$

В случае конечных температур следует использовать формулу (4.3′):

$$\int_0^{\infty}f(\varepsilon)\,D(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{3}{2}N\mu_0^{-3/2}\int_0^{\infty}\varepsilon^{1/2}f(\varepsilon)\,d\varepsilon=N. \tag{4}$$

---

[1]) См. монографию Кеезома [10].— *Прим. ред.*