

является квантовой жидкостью. Это означает, что в жидкогом гелии II некоторые квантовые эффекты проявляются в макроскопическом масштабе. Детальное объяснение этого явления выходит за рамки настоящей книги; здесь мы заметим лишь, что этот переход ( $\lambda$ -переход) можно интерпретировать как следствие бозе-эйнштейновской конденсации, которая является наиболее сильным проявлением вырождения бозе-системы<sup>1)</sup>.

### ПРИМЕРЫ

1. Вычислить энергию Ферми  $\mu$  и внутреннюю энергию  $E$  идеального ферми-газа, состоящего из частиц со спином  $1/2$ , с точностью до членов порядка  $T^4$  в случае достаточно сильного вырождения.

#### РЕШЕНИЕ

Плотность состояний в случае свободных частиц, заключенных в ящик объемом  $V$ , была рассмотрена в гл. 1, задача 6, и имеет вид

$$D(\varepsilon) = \frac{2V}{\hbar^3} \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^\infty 4\pi p^2 dp = 2 \cdot 2\pi V \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} \quad (p^2 = 2m\varepsilon). \quad (1)$$

Множитель 2 возник из-за спинового вырождения. При 0°К полностью заняты все энергетические уровни вплоть до уровня  $\varepsilon = \mu_0$ , который определяется соотношением

$$\int_0^{\mu_0} D(\varepsilon) d\varepsilon = 4\pi V \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\mu_0} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = \frac{8\pi}{3} V \left( \frac{2m}{\hbar^2} \mu_0 \right)^{3/2} = N, \quad (2)$$

т. е.

$$\mu_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3};$$

здесь  $N$  — полное число частиц в системе. Таким образом,

$$D(\varepsilon) = \frac{\frac{3}{2} N \varepsilon^{1/2}}{\mu_0^{3/2}}. \quad (3)$$

В случае конечных температур следует использовать формулу (4.3'):

$$\int_0^\infty f(\varepsilon) D(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{3}{2} N \mu_0^{-3/2} \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} f(\varepsilon) d\varepsilon = N. \quad (4)$$

<sup>1)</sup> См. монографию Кеезома [10]. — Прим. ред.

С помощью (4.6а), где следует положить  $\varepsilon_0 = 0$  и  $g(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}$ , получаем

$$\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{3/2} \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2 + \frac{7\pi^4}{640} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^4 + \dots \right\} = 1, \quad (5)$$

или

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_0 \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2 + \frac{7\pi^4}{640} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^4 + \dots \right\}^{-1/2} = \\ &= \mu_0 \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2 - \frac{\pi^4}{720} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^4 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

В первом приближении имеем

$$\mu = \mu_0 \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2 + \dots \right\};$$

во втором приближении

$$\mu = \mu_0 \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2 - \frac{\pi^4}{80} \left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^4 + \dots \right\}. \quad (7)$$

Из формулы (4.2') получаем для внутренней энергии выражение

$$E = \int_0^\infty \varepsilon D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{N}{\mu_0^{3/2}} \int_0^\infty \varepsilon^{3/2} f(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (8)$$

Используя далее (4.6а) и полагая  $g(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}$ , находим

$$E = \frac{3}{5} N \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{3/2} \mu \left\{ 1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2 - \frac{7\pi^4}{384} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^4 + \dots \right\}, \quad (9)$$

так что, учитывая (7), имеем

$$E = \frac{3}{5} N \mu_0 \left\{ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2 - \frac{\pi^4}{16} \left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^4 + \dots \right\}. \quad (10)$$

**Замечание.** На фиг. 102 приведены кривые  $\mu = \mu_0$  и  $\mu = \mu_0 [1 - 1/12\pi^2 (kT/\mu_0)^2]$ .

2. Показать, что при достаточно низких температурах удельная теплоемкость идеального ферми-газа равна

$$C_V = \frac{1}{3} \pi^2 k^2 T D(\mu_0),$$

где  $D(\varepsilon)$  — одночастичная плотность состояний.

#### РЕШЕНИЕ

Из (4.3') имеем при 0°К

$$\int_0^{\mu_0} D(\varepsilon) d\varepsilon = N, \quad (1)$$

а при  $T^{\circ}$  К

$$\int_0^{\infty} D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = N. \quad (2)$$

С помощью (4.6а) получаем

$$N = \int_0^{\mu} D(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{1}{6} \pi^2 (kT)^2 D'(\mu) + \dots \quad (3)$$

Вычитая (1) из выражения (3), находим

$$\int_{\mu_0}^{\mu} D(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 D'(\mu) + \dots = 0. \quad (4)$$

При достаточно низких температурах должно быть  $\mu - \mu_0 \ll \mu_0, \mu$ , так что (4) можно приближенно записать в виде

$$(\mu - \mu_0) D(\mu_0) + \frac{1}{6} \pi^2 (kT)^2 D'(\mu_0) + \dots = 0.$$

Отсюда

$$\mu \approx \mu_0 - \frac{1}{6} \pi^2 (kT)^2 \left( \frac{d}{d\varepsilon} \ln D(\varepsilon) \right)_{\varepsilon=\mu_0}. \quad (5)$$

С другой стороны, с помощью (4.6а) находим

$$E = \int_0^{\infty} e f(\varepsilon) D(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^{\mu} e D(\varepsilon) d\varepsilon + \\ + \frac{1}{6} \pi^2 (kT)^2 \left( \frac{d}{d\varepsilon} e D(\varepsilon) \right)_{\varepsilon=\mu} + \dots \quad (6)$$

Но приближенно

$$\int_0^{\mu} e D(\varepsilon) d\varepsilon \approx \int_0^{\mu_0} e D(\varepsilon) d\varepsilon + (\mu - \mu_0) \mu_0 D(\mu_0) \approx \\ \approx \int_0^{\mu_0} e D(\varepsilon) d\varepsilon - \frac{1}{6} \pi^2 (kT)^2 \mu_0 D'(\mu_0),$$

так что

$$E \approx \int_0^{\mu_0} e D(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{1}{6} \pi^2 (kT)^2 D(\mu_0) \quad (7)$$

и, следовательно,

$$C_V = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V \approx \frac{1}{3} \pi^2 k^2 T D(\mu_0).$$

Используя для  $D(\mu)$  выражение (4.9), получаем

$$D(\mu_0) = \frac{3N}{2\mu_0}$$

и

$$C_V \approx \frac{1}{2} \pi^2 N k \frac{T}{T_0} \quad \left( T_0 = \frac{\mu_0}{k} \right). \quad (8)$$

Кривые температурной зависимости величин  $C_V$  и  $E$  приведены на фиг. 86.

3. Рассмотрим собственный полупроводник, у которого ширина запрещенной зоны равна  $E_G$ . Пусть  $n$  и  $p$  обозначают соответственно плотность электронов проводимости и дырок. Предполагая, что электроны и дырки ведут себя как свободные частицы с эффективными массами  $m_e$  и  $m_h$ , получить соотношение

$$n = p = \\ = 2 \left\{ \frac{2\pi (m_e m_h)^{1/2} k T}{h^2} \right\}^{3/2} e^{-E_G/2kT}.$$

Показать, что энергия Ферми для электронов имеет вид

$$\mu = \frac{1}{2} E_G + \frac{3}{4} kT \ln \frac{m_h}{m_e}.$$

Энергия отсчитывается от дна валентной зоны и предполагается, что выполняется условие  $E_G \gg kT$ . Вычислить значение  $n$  ( $= p$ ) для случая, когда  $E_G = 0,7 \text{ эВ}$ ,  $T = 300^\circ \text{ К}$ ,  $m_h = m_e = m$ .

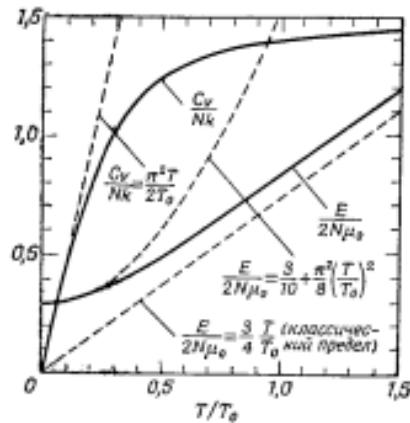
#### РЕШЕНИЕ

Полное число электронов определяется выражением

$$N = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} + \sum_j \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_j - \mu)} + 1}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_i$  — энергетические уровни в зоне проводимости, а  $\varepsilon_j$  — в заполненной (валентной) зоне. В собственном полупроводнике полное число электронных уровней в валентной зоне равно  $N$ , т. е.  $\sum_j 1 = N$ . Следовательно, из (1) имеем

$$\sum_i \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} = \sum_j \left\{ 1 - \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_j - \mu)} + 1} \right\} = \sum_j \frac{1}{e^{\beta(-\varepsilon_j + \mu)} + 1}. \quad (2)$$



Ф и г. 86

Это соотношение показывает, что число электронов проводимости (левая часть) и число дырок в валентной зоне (правая часть) равны друг другу:

$$n = p. \quad (3)$$

Используя приближенные выражения для  $e_i$  и  $e_j$

$$e_i = E_G + \frac{p^2}{2m_e}, \quad e_j = -\frac{p^2}{2m_h}, \quad (4)$$

где  $p$  — импульс частицы, мы можем записать  $n$  и  $p$  в виде

$$n = \frac{2}{h^3} \int \frac{dp}{e^{\beta(E_G - \mu + p^2/2m_e)} + 1}, \quad (5)$$

$$p = \frac{2}{h^3} \int \frac{dp}{e^{\beta(\mu + p^2/2m_h)} + 1}. \quad (6)$$

При 0°К как  $n$ , так и  $p$  равны нулю. При не очень высоких температурах, когда  $E_G - \mu \gg kT$  и  $\mu \gg kT$ , величины  $n$  и  $p$  можно считать малыми. Следовательно, мы можем считать системы электронов и дырок невырожденными. При этом получаем

$$n \sim \frac{2}{h^3} \int e^{-\beta(E_G - \mu + p^2/2m_e)} dp = 2 \left( \frac{2\pi m_e k T}{h^2} \right)^{3/2} e^{-(E_G - \mu)/kT}, \quad (7)$$

$$p \sim \frac{2}{h^3} \int e^{-\beta(\mu + p^2/2m_h)} dp = 2 \left( \frac{2\pi m_h k T}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\mu/kT}. \quad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в (3), имеем

$$e^{\mu/kT} = \left( \frac{m_h}{m_e} \right)^{3/4} e^{E_G/2kT}. \quad (9)$$

Теперь

$$n = p = 2 \left[ \frac{2\pi(m_e m_h)^{1/2} k T}{h^2} \right]^{3/2} e^{-E_G/2kT}. \quad (10)$$

Из (9) легко найти

$$\mu = \frac{1}{2} E_G + \frac{3}{4} k T \ln \frac{m_h}{m_e}. \quad (11)$$

Определяемая формулой (11) энергия Ферми лежит вблизи середины запрещенной зоны, так как  $\ln(m_h/m_e)$  есть величина порядка единицы, а температура  $T$  значительно меньше, чем  $E_G/k$ . Для  $E_G = 0,7$  эв имеем  $E_G/k = 0,81 \cdot 10^4$  °К. Это означает, что условия  $E_G/k \gg T$ ,  $E_G - \mu \gg kT$  и  $\mu \gg kT$  выполняются при обычных температурах. Полагая  $T = 300^\circ$  К и

$$m_e = m_h = m,$$

получаем

$$n = p = 4,83 \cdot 10^{13} \cdot 300^{3/2} e^{-0,41 \cdot 10^{4/300}} \approx 1,6 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}.$$

## ОТСТУПЛЕНИЕ 10

**Электронная теория металлов.** Основы электронной теории металлов были заложены Друде и Лоренцем [1]. В их теории предполагалось, что в металле существуют два типа электронов — свободные и связанные. Много лет спустя это предположение было обосновано с помощью зонной теории, составляющей часть современной квантовой теории твердого тела. Модель свободных электронов с успехом объясняет хорошую электро- и теплопроводность металлов. Вместе с тем каждый свободный электрон должен, согласно этой модели, давать вклад  $\frac{1}{2} k$  в теплоемкость в соответствии с одним из основных законов классической статистической механики — законом о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Однако такой результат противоречит известному закону Дюлонга и Пти. Эта трудность аналогична трудности с законом Рэля — Джинса в теории излучения абсолютно черного тела. Однако в отличие от последней трудность с теплоемкостью не могла быть разрешена только с помощью теории Планка, а была преодолена лишь после разработки квантовой механики и введения понятия статистики Ферми.

Создание современной электронной теории металлов — заслуга Зоммерфельда [2], который дал новую квантовомеханическую формулировку электронной теории Друде — Лоренца. Теория Зоммерфельда полностью разрешила трудности с теплоемкостью. Другим блестящим успехом современной электронной теории металлов была созданныя Паули [3] теория пармагнетизма свободного электронного газа<sup>1)</sup>.

**4. Рассмотрим полупроводник *n*-типа, в котором примесные уровни лежат на расстоянии  $E_D$  от дна зоны проводимости. Обозначим через  $N_D$ ,  $n_D$  и  $n$  соответственно число доноров, число донорных уровней и число электронов проводимости (в единице объема). Получить соотношение**

$$\frac{n(N_D - n_D)}{n_D} = \frac{1}{2} N_c e^{-E_D/kT},$$

где  $N_c = 2(2\pi m^* kT/h^2)^{3/2}$ ,  $m^*$  — эффективная масса электронов проводимости. Выяснить его физический смысл. Предполагается, что примесный уровень не может быть занят двумя электронами одновременно и что электроны проводимости представляют собой невырожденную систему.

**РЕШЕНИЕ**

Будем рассматривать образец, имеющий единичный объем. Свободная энергия  $F$  электронов на донорных уровнях имеет вид

$$F = -n_D E_D - kT \ln \left\{ \frac{N_D!}{n_D!(N_D - n_D)!} 2^{n_D} \right\} = \quad (1)$$

$$= -n_D E_D - kT \left\{ n_D \ln 2 - n_D \ln \frac{n_D}{N_D} - (N_D - n_D) \ln \frac{N_D - n_D}{N_D} \right\}. \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Ясное и доступное изложение основных идей современной теории твердого тела см. в книге [11]. — Прим. ред.

Во втором слагаемом в соотношении (4) под знаком логарифма стоит число всех возможных распределений  $n_D$  электронов (с положительным и отрицательным спинами) по  $N_D$  донорным уровням. Выражение (2) получено из (1) с помощью формулы Стирлинга. Химический потенциал  $\mu$  электронов на донорных уровнях равен

$$\mu = \frac{\partial F}{\partial n_D} = -E_D - kT \left\{ \ln 2 - \ln \frac{n_D}{N_D - n_D} \right\}, \quad (3)$$

так что

$$\frac{n_D}{N_D - n_D} = 2 \cdot e^{(E_D + \mu)/kT}, \quad (4)$$

или

$$n_D = \frac{N_D}{\frac{1}{2} e^{-(E_D + \mu)/kT} + 1}. \quad (5)$$

С другой стороны, число электронов проводимости равно

$$n = \frac{2}{h^3} \int \frac{dp}{e^{(e-\mu)/kT} + 1} \quad \left( e = \frac{p^2}{2m^*} \right). \quad (6)$$

(Множитель 2 обусловлен спиновым вырождением.) Учитывая предположение о невырожденности системы, перепишем (6) в виде

$$n = \frac{2}{h^3} \int e^{-(e-\mu)/kT} dp = 2 \left( \frac{2\pi m^* k T}{h^2} \right)^{3/2} e^{\mu/kT} = N e^{\mu/kT}. \quad (7)$$

Исключая  $\mu$  из (4) и (7), получаем

$$\frac{n(N_D - n_D)}{n_D} = \frac{1}{2} N e^{-E_D/kT}. \quad (8)$$

Фактически в приведенном выше рассуждении мы использовали представление о равновесной реакции диссоциации



где  $D$  обозначает донор вместе с его электроном,  $D^+$  — ионизированный донор, а  $e$  — электрон проводимости.

Если использовать обозначения  $[D] = n_D$ ,  $[D^+] = N_D - n_D$  и  $[e] = n$ , то соотношение (8), как легко видеть, приобретает форму закона действующих масс

$$\frac{[D^+][e]}{[D]} = K(T). \quad (10)$$

#### ДРУГОЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ

Большую статистическую сумму  $\Xi_D$  для системы электронов, распределенных по  $N_D$  примесным уровням, можно построить описанным ниже способом. Возможны следующие микроскопиче-

кие состояния донорного уровня: уровень не занят, уровень занят электроном с положительным спином, уровень занят электроном с отрицательным спином. Энергия каждого занятого состояния равна  $-E_D$ . Предполагается, что донорные уровни не зависят друг от друга. Имеем, таким образом,

$$\Xi_D = \{1 + 2e^{E_D/kT}\}^{N_D}, \quad (11)$$

где  $\lambda = e^{\mu/kT}$  — абсолютная активность для электронов. Среднее число электронов, распределенных по  $N_D$  донорным уровням, определяется величиной  $\lambda (\partial \ln \Xi_D / \partial \lambda)$

$$n_D = \lambda \frac{\partial \ln \Xi_D}{\partial \lambda} = \frac{2\lambda e^{E_D/kT}}{1 + 2\lambda e^{E_D/kT}} N_D = \frac{N_D}{\frac{1}{2} e^{-(E_D+\mu)/kT} + 1};$$

это выражение совпадает с (5). Дальнейший ход решения такой же, как в первом варианте. Ход рассуждений во втором способе решения аналогичен используемому при выводе распределения Ферми из статистической суммы для переменных  $T, \mu$ .

**З а м е ч а н и е.** Отличие выражения (5) от обычного распределения Ферми обусловлено использованием предположения о том, что на донорном уровне может находиться только один электрон. Если предположить, что два электрона с противоположно направленными спинами могут независимым образом занимать один и тот же донорный уровень, то мы получим вместо (5) следующее выражение:

$$n_D = \frac{2N_D}{e^{-(E_D+\mu)/kT} + 1}, \quad (12)$$

где множитель 2 появляется из-за спинового вырождения и, следовательно,

$$\frac{n(2N_D - n_D)}{n_D} = N_D e^{-E_D/kT}. \quad (13)$$

5. Рассмотрим идеальный бозе-газ, представляющий собой систему из  $N$  частиц, находящихся в объеме  $V$ . Обозначим через  $N_0$  число частиц в нижнем одиночественном состоянии (импульс  $p = 0$ ), а через  $N'$  — число частиц в более высоких состояниях ( $p \neq 0$ ). Показать, что при температурах, лежащих ниже некоторого критического значения  $T_c$ , величина  $N_0$  сравнима с  $N$  и что химический потенциал  $\mu$  в этой области равен нулю (бозе-Эйнштейновская конденсация).

## РЕШЕНИЕ

Обозначим через  $e_i$  одиночественные уровни энергии. Имеем

$$N = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(e_i - \mu)} - 1} \quad (\beta = \frac{1}{kT}), \quad (1)$$

или

$$N = N_0 + N', \quad N_0 = \frac{g_0}{e^{-\beta\mu} - 1}, \quad N' = \sum_{i \neq 0} \frac{1}{e^{\beta(e_i - \mu)} - 1}. \quad (2)$$

Здесь  $g_0$  — степень вырождения нижнего энергетического состояния  $e_0 = 0$ , которую мы можем считать равной единице. Выражение для  $N'$  можно преобразовать обычным образом, используя плотность состояний для свободных частиц  $D(e) = 2\pi V (2m/h^2)^{3/2} e^{1/2}$ :

$$\begin{aligned} N' &= 2\pi V \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{e^{1/2} de}{e^{\beta(e-\mu)} - 1} = \\ &= V \left( \frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{2}{V\pi} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{e^{x-\beta\mu} - 1} = \\ &= V \left( \frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} F_{3/2}(a) \quad (a = -\beta\mu). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь при интегрировании не учтено состояние с  $e_0 = 0$ , так как плотность состояний ( $\sim \sqrt{e}$ ) обращается в нуль в этой точке. Именно по этой причине мы выделили  $N_0$  из  $N$ . Функция

$$F_{3/2}(a) = \frac{2}{V\pi} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{e^{x+a} - 1} = \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-na}}{n^{3/2}}, \quad (4)$$

как легко видеть из приведенного разложения, может быть определена только при  $a = -\beta\mu > 0$ . Так как  $F_{3/2}(a)$  представляет собой монотонно убывающую функцию

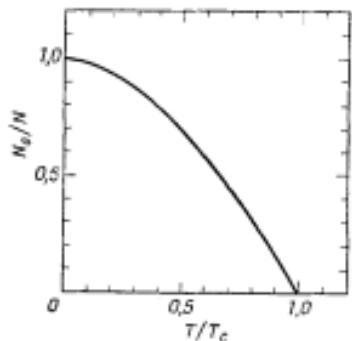
$$F_{3/2}(a) \leq F_{3/2}(0) = \sum_{n=1}^\infty n^{-3/2} \approx 2,612 \quad \left[ = \zeta \left( \frac{3}{2} \right) \right], \quad (5)$$

из (3) получим

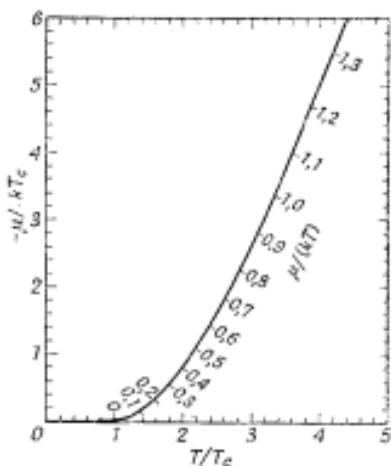
$$N' < V \left( \frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \cdot 2,612 = N'_{\text{макс}}(T). \quad (6)$$

Это означает, что существует верхний предел для числа частиц в высших состояниях и что этот предел уменьшается

с понижением температуры. Когда  $N'_{\max}(T)$  становится меньше полного числа частиц  $N$ , остающиеся  $N - N'_{\max}(T)$  частиц



Фиг. 87



Фиг. 88. Химический потенциал идеального бозе-газа

должны переходить в иное состояние  $\varepsilon_0 = 0$ . Критическая температура  $T_c$  определяется из условия

$$2,612 \left( \frac{2\pi m k T_c}{h^2} \right)^{3/2} = \frac{N}{V}. \quad (7)$$

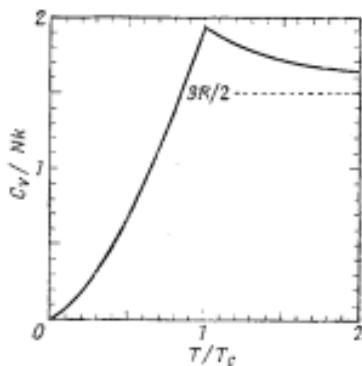
Ниже этой критической температуры химический потенциал  $\mu$  остается равным нулю, а величины  $N'$  и  $N_0$  определяются формулами

$$\begin{aligned} N' &= N \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2}, \\ N_0 &= N \left\{ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Кривые температурной зависимости величины  $N_0/N$ , химического потенциала и удельной теплоемкости для идеального бозе-газа приведены на фиг. 87—89.

**Замечание.** При  $T > T_c$  уравнение

$$N = N' = V \left( \frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} F_{3/2}(-\beta \mu) \quad (9)$$



Фиг. 89. Удельная теплоемкость идеального бозе-газа

имеет решение при  $\mu < 0$ . В этом случае величина  $N_0 = O(1)$  и ее можно пренебречь по сравнению с  $N' [= O(N)]$ . При уменьшении  $T$  до  $T_c$  величина  $\mu$  стремится к нулю, а при  $T < T_c$  имеем  $\mu = 0$  и  $N_0 = O(N)$  (см. [4])<sup>1)</sup>.

6. Показать, что химический потенциал газа фотонов равен нулю.

#### РЕШЕНИЕ

Число фотонов в сосуде не является постоянным, так что объем сосуда  $V$  и температура  $T$  определяют лишь его среднее значение. Это связано с тем, что фотоны (свет) могут испускаться и поглощаться внутри сосуда и его стенками. Поэтому теперь мы должны отказаться от условия постоянства числа частиц ( $N = \text{const}$ ), использованного при выводе распределения Бозе (см. гл. 1, задача 31). Соответственно химический потенциал, который был введен в качестве множителя Лагранжа, не входит в распределение Бозе. Это эквивалентно условию  $\mu = 0$  в (4.14).

З а м е ч а н и е. Если нам удалось определить статистическую сумму для канонического ансамбля, выделив ее главный член, то полное число фотонов можно найти из условия минимума свободной энергии  $F(T, V, N)$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T, V} = 0.$$

Это условие эквивалентно соотношению  $\mu = 0$ .

#### ДРУГОЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ

Электромагнитные волны в сосуде можно рассматривать как суперпозицию нормальных колебаний. Пусть  $v_i$  есть частота  $i$ -го нормального колебания,  $n_i$  — квантовое число этого колебания, которое может рассматриваться как квантовый гармонический осциллятор. Тогда энергия электромагнитной волны, характеризуемой квантовыми числами ( $n_0, n_1, \dots$ ), будет

$$E(n_0, n_1, \dots) = \sum_i n_i h v_i. \quad (1)$$

Энергию нулевых колебаний осциллятора мы опустили благодаря соответствующему выбору начала отсчета. Выражение (1) дает возможность рассматривать величины  $n_i$  как числа фотонов с энергией  $h v_i$ . Каноническая статистическая сумма для такого

<sup>1)</sup> См. также [12]. — Прим. ред.

фотонного газа дается выражением

$$Z(T, V) = \sum_{n_0=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \exp \left\{ -\frac{E(n_0, n_1, \dots)}{kT} \right\} = \prod_i (1 - e^{-\hbar v_i/kT})^{-1}, \quad (2)$$

а средние значения  $n_j$  определяются соотношением

$$\bar{n}_j = \frac{\sum_{n_j=0}^{\infty} n_j e^{-n_j \hbar v_j / kT}}{\sum_{n_j=0}^{\infty} e^{-n_j \hbar v_j / kT}} = \frac{1}{e^{\hbar v_j / kT} - 1}. \quad (3)$$

Функции  $Z(T, V)$  и  $\bar{n}_j$  можно интерпретировать соответственно как большую статистическую сумму и как функцию распределения для случая идеального газа с  $\mu = 0$ .

### ЗАДАЧИ

[A]

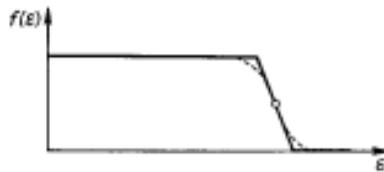
1. Полное число электронов в образце равно  $N$ . Плотность состояний электронов имеет вид

$$D = \text{const} \quad \text{при } \epsilon > 0,$$

$$D = 0 \quad \text{при } \epsilon < 0.$$

1. Вычислить энергию Ферми  $\mu_0$  при  $0^\circ\text{K}$ .
2. Вывести условие отсутствия вырождения системы.
3. Показать, что в случае сильного вырождения удельная теплоемкость пропорциональна  $T$ .

2. При конечных температурах функцию распределения Ферми  $f(\epsilon)$  можно (весьма приближенно) представить линией, изо-



Фиг. 90

броженной на фиг. 90. Используя это приближение, дать простейшее объяснение линейной зависимости удельной теплоемкости от температуры при низких температурах.