

фотонного газа дается выражением

$$Z(T, V) = \sum_{n_0=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \exp \left\{ -\frac{E(n_0, n_1, \dots)}{kT} \right\} = \prod_i (1 - e^{-\hbar v_i/kT})^{-1}, \quad (2)$$

а средние значения  $n_j$  определяются соотношением

$$\bar{n}_j = \frac{\sum_{n_j=0}^{\infty} n_j e^{-n_j \hbar v_j / kT}}{\sum_{n_j=0}^{\infty} e^{-n_j \hbar v_j / kT}} = \frac{1}{e^{\hbar v_j / kT} - 1}. \quad (3)$$

Функции  $Z(T, V)$  и  $\bar{n}_j$  можно интерпретировать соответственно как большую статистическую сумму и как функцию распределения для случая идеального газа с  $\mu = 0$ .

### ЗАДАЧИ

[A]

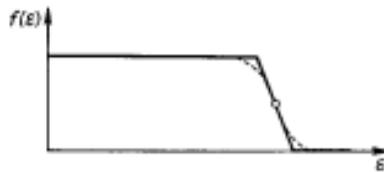
1. Полное число электронов в образце равно  $N$ . Плотность состояний электронов имеет вид

$$D = \text{const} \quad \text{при } \epsilon > 0,$$

$$D = 0 \quad \text{при } \epsilon < 0.$$

1. Вычислить энергию Ферми  $\mu_0$  при  $0^\circ\text{K}$ .
2. Вывести условие отсутствия вырождения системы.
3. Показать, что в случае сильного вырождения удельная теплоемкость пропорциональна  $T$ .

2. При конечных температурах функцию распределения Ферми  $f(\epsilon)$  можно (весьма приближенно) представить линией, изо-



Фиг. 90

броженной на фиг. 90. Используя это приближение, дать простейшее объяснение линейной зависимости удельной теплоемкости от температуры при низких температурах.

3. Пусть некоторая физическая величина  $I$ , характеризующая систему электронов, выражается интегралом, в который входит функция распределения Ферми  $f(\varepsilon)$ :

$$I = \int_0^{\infty} g(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon \equiv \int_0^{\infty} \psi(\varepsilon) D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (g = \psi D);$$

здесь  $D$  — плотность состояний. Для случая достаточно сильного вырождения получить следующие формулы:

$$\left( \frac{\partial I}{\partial T} \right)_\mu = \frac{1}{3} \pi^2 k^2 T g'(\mu_0) + O(T^2),$$

$$\left( \frac{\partial I}{\partial \mu} \right)_T = g(\mu_0) + O(T^2),$$

$$\left( \frac{\partial I}{\partial T} \right)_N = \frac{1}{3} \pi^2 k^2 T \psi'(\mu_0) D(\mu_0) + O(T^2).$$

[Указание. Последовательно применять процедуру, использованную в (4.7).]

4. Энергия электрона в магнитном поле  $H$  равна  $\pm \mu_B H$  в зависимости от того, параллелен или антипараллелен полю спиновый магнитный момент электрона. Вычислить парамагнитную восприимчивость системы свободных электронов при  $0^\circ\text{K}$  в случае полного вырождения.

5. Показать, что спиновая парамагнитная восприимчивость системы электронов при произвольной температуре имеет вид

$$\chi = 2\mu_B^2 \int_0^{\infty} D'(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon,$$

где  $D$  — одноэлектронная плотность состояний на единицу объема без учета спинового вырождения. Получить формулы для предельных случаев очень сильного и очень слабого вырождения и применить их к системе свободных электронов.

6. Предполагается, что в металлах всегда имеется некоторое количество электронов, которые могут перемещаться свободно. Если считать, что выполняется закон равномерного распределения энергии по степеням свободы, то атомная теплоемкость кристаллического натрия (атомный объем  $24 \text{ см}^3/\text{моль}$ ) при одном свободном электроне на атом будет равна  $4,5 R$ . Показать, каким образом можно получить этот результат; объяснить, почему атомные теплоемкости металлов обычно подчиняются закону Дюлонга

и Пти и почему вклад свободных электронов оказывается практически равным нулю в противоположность приведенному выше заключению.

7. Рассмотреть спиновую парамагнитную восприимчивость свободного электронного газа. Объяснить физический смысл различия между ее значениями для случаев сильного и слабого вырождения. Выяснить смысл отношения этих величин. Обратить особое внимание на выяснение физического смысла полученного соотношения.

8. Оценить удельную электронную теплоемкость и спиновую парамагнитную восприимчивость (на единицу массы) для Li и Na, предполагая, что валентные электроны в обоих случаях можно рассматривать как свободные. Плотности Li и Na равны соответственно 0,534 и 0,97 г/см<sup>3</sup>.

9. Показать, что уравнение состояния идеального ферми-газа может быть записано в виде

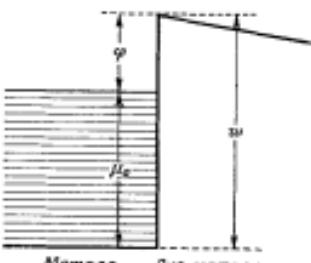
$$pV = \frac{2}{3} U,$$

и вывести формулу для сжимаемости в случае сильного вырождения. Оценить сжимаемость кристаллического натрия. Считать, что в кристаллическом натрии приходится по одному свободному электрону на атом. Атомный вес натрия равен 23, плотность 0,97 г/см<sup>3</sup>.

10. Пусть  $-w$  — потенциал свободных электронов в металле, а химический потенциал  $\mu_0$  при 0° К меньше  $-w$  на величину  $\varphi$  (фиг. 91). При конечных температурах электроны, обладающие большой энергией (т. е. находящиеся в верхней части распределения Ферми), могут вылететь из металла наружу. Используя данный металл в качестве катода и создавая определенную разность потенциалов между ним и каким-либо анодом, можно собрать все электроны, покинувшие металл. Показать, что возникающий при этом термоэлектронный ток  $I$  через единицу поверхности металла определяется формулой Ричардсона

$$I = AT^2 e^{-\varphi/kT}$$

( $\varphi$  обычно имеет порядок 1 эв, а  $\varphi/kT \sim 10^2$ ).



Фиг. 91

11. Рассмотрим образец металла, содержащий  $N$  атомов. Пусть химический потенциал системы электронов равен  $\mu$ , а энергетическая зона, содержащая  $2N$  электронных уровней  $e_i$ , занята  $2N - N'$  электронами. Показать, что эти электроны дают такой же вклад в термодинамические характеристики, как и электронный газ с энергетическими уровнями —  $e_i$  и химическим потенциалом —  $\mu$ .

12. Для системы, рассмотренной в примере 4, вычислить плотность электронов проводимости и их энергию Ферми в предельных случаях низких и высоких температур. (Указание. Использовать условие электронейтральности  $n = N_D - n_D$ .) Построить кривую зависимости  $\ln \sigma$  от  $1/kT$ , предполагая, что электропроводность  $\sigma$  полупроводника дается выражением

$$\sigma = \frac{e^2 n}{m^*} \tau,$$

где время релаксации  $\tau$  — постоянная. Каков физический смысл наклона этой кривой?

13. Рассмотрим полупроводник, содержащий  $N$  акцепторов на  $1 \text{ см}^3$ . Пусть акцепторные уровни лежат на расстоянии  $E_A$  от края валентной зоны. Предполагая, что плотность акцепторов достаточно мала, чтобы систему дырок можно было рассматривать как невырожденную, и считая, что на каждом акцепторном уровне может находиться только один электрон, получить температурную зависимость плотности дырок, возникающих в заполненной зоне.

14. Энергетический спектр фотонов имеет вид

$$E(q) = \hbar c q,$$

где  $q = |\mathbf{q}|$  ( $\mathbf{q}$  — волновой вектор фотона). Вычислить свободную энергию Гельмгольца, энтропию и внутреннюю энергию для фотонного газа и определить световое давление.

15. Показать, что в случае двумерного идеального бозе-газа бозе-эйнштейновская конденсация не имеет места.

### [Б]

16. Определить удельную теплоемкость  $C_V$  и парамагнитную восприимчивость  $\chi$  невырожденного свободного электронного газа. Рассмотреть, как ведут себя эти величины при переходе к классическому пределу высоких температур.

17. В однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$ , направленном по оси  $z$ , точка, представляющая собой проекцию движущегося электрона на плоскость  $xy$ , вращается по окружности с угловой частотой  $\omega_0 = eH/mc$ , определяемой силой Лоренца  $e|\mathbf{V} \times \mathbf{H}|/c$  (фиг. 92). Это вращательное движение можно рассматривать как квантованные гармонические колебания. Энергетические уровни электрона, таким образом, описываются формулой

$$E(l, p_z) = \frac{e\hbar}{mc} H \left( l + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2m} p_z^2 \quad (l = 0, 1, 2, \dots),$$

где  $p_z^2/2m$  — кинетическая энергия электрона, связанная с его поступательным движением вдоль оси  $z$ . Показать, что магнитный момент электрона равен

$$M = -N\mu_B L \left( \frac{\mu_B H}{kT} \right), \quad L(x) = \operatorname{cth} x - \frac{1}{x},$$

где  $\mu_B = e\hbar/2mc$  — магнетон Бора. Температура предполагается достаточно высокой, чтобы можно было использовать статистику Больцмана. Спином электронов и кулоновским взаимодействием между ними пренебречь.

*Указание.* Следует иметь в виду, что энергетический уровень, характеризуемый квантовым числом  $l$ , сильно вырожден, так как ему соответствует большое число уровней в нулевом магнитном поле. В энергетический уровень  $2\mu_B H (l + 1/2)$  в магнитном поле  $H$  объединяются все уровни, лежащие в случае нулевого магнитного поля в интервале

$$2\mu_B H l < \frac{(p_x^2 + p_y^2)}{2m} < 2\mu_B H (l + 1).$$

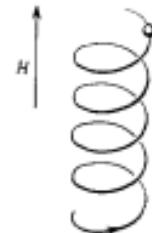
18. Показать, что магнитная восприимчивость  $\chi$  невырожденного электронного газа дается формулой

$$\chi = \frac{n(\mu_B^2 - 1/(2\mu_B^2))}{kT},$$

где  $n$  — плотность электронов,  $\mu_B$  — магнетон Бора, а  $\mu_B^2 = e\hbar/2m^*c$  — эффективный магнетон Бора для орбитального движения,  $m^*$  — эффективная масса электрона. Кулоновское взаимодействие между электронами не учитывать.

19. Показать, что ток фотоэлектронной эмиссии  $I$ , возникающей под действием света с частотой  $v$  и единичной интенсивностью, равен

$$I \sim AT^2 \Phi \left( \frac{\hbar(v - v_0)}{kT} \right),$$



Фиг. 92.  
Движение  
электрона в  
магнитном  
поле

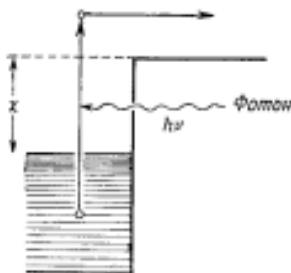
где

$$\varphi(\delta) = \int_0^{\infty} \ln(1 + e^{\delta-y}) dy,$$

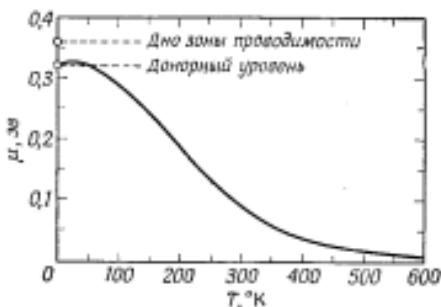
$v_0$  — пороговая частота фотоэффекта, определяемая работой выхода  $\chi$  ( $hv_0 = \chi$ ),  $A$  — некоторая постоянная. Получить, далее, следующее разложение для  $\varphi(\delta)$ :

$$\varphi = \begin{cases} e^\delta - \frac{e^{2\delta}}{2^2} + \frac{e^{3\delta}}{3^2} - \dots & (\delta \leq 0), \\ \frac{\pi^2}{6} + \frac{\delta^2}{2} - \left\{ e^{-\delta} - \frac{e^{-2\delta}}{2^2} + \frac{e^{-3\delta}}{3^2} - \dots \right\} & (\delta > 0). \end{cases}$$

**З а м е ч а н и е.** Внешний фотоэффект в металле возникает в том случае, когда электрон проводимости при поглощении фотона приобретает добавочную энергию, достаточную для того, чтобы покинуть металл, как схематически показано на фиг. 93. Можно считать, что компоненты импульса электрона, параллельные поверхности металла, не меняются при поглощении фотона.



Ф и г. 93



Ф и г. 94

20. Рассмотрим германиевый полупроводник, содержащий  $N_D = 10^{15} \text{ см}^{-3}$  доноров и  $N_A = 10^{14} \text{ см}^{-3}$  акцепторов. Донорные уровни лежат на расстоянии  $E_D = 0,04 \text{ эВ}$  ниже дна зоны проводимости. На фиг. 94 приведена кривая зависимости энергии Ферми  $\mu$  от температуры  $T$  для данного полупроводника. За начало отсчета принята середина запрещенной зоны.

Объяснить характер зависимости  $\mu$  от  $T$ . Для простоты можно считать, что эффективная масса электрона в зоне проводимости  $m^* = 0,4 m$ .

21. При учете спина электрона каждому донорному уровню следует поставить в соответствие два электронных состояния. Кулоновское взаимодействие между электронами, однако, препятствует одновременному заполнению уровня двумя электронами. В указанной ситуации определить магнитную восприимчивость системы электронов на донорных уровнях.

22. Показать, что внутренняя энергия идеального бозе-газа в случае слабого вырождения имеет вид

$$E = \frac{3}{2} kTV \left( \frac{2\pi m kT}{h^2} \right)^{3/2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{l\mu/kT}}{l^{3/2}},$$

где  $\mu$  — химический потенциал. Написать аналогичные разложения для уравнения состояния, энтропии и свободной энергии Гельмгольца.

[B]

23. При рассмотрении фермионов со спином  $1/2$ , обладающих высокой энергией, необходимо учитывать релятивистские эффекты. В этом случае энергия частицы имеет вид

$$e = c \sqrt{\mathbf{p}^2 + (mc)^2},$$

где  $\mathbf{p}$  — импульс,  $m$  — масса покоя, а  $c$  — скорость света в вакууме. Показать, что средние значения полного числа частиц  $N$ , полной энергии  $E$  и давление  $p$  выражаются следующими формулами:

$$N = 8\pi \frac{m^3 c^3}{h^3} V \int_0^\infty \frac{\sinh^2 \theta \cosh \theta d\theta}{e^{-\beta\mu + \beta mc^2 \sinh \theta} + 1},$$

$$E = 8\pi \frac{m^4 c^5}{h^3} V \int_0^\infty \frac{\sinh^2 \theta \cosh^2 \theta d\theta}{e^{-\beta\mu + \beta mc^2 \sinh \theta} + 1},$$

$$p = \frac{8\pi}{3} \frac{m^4 c^5}{h^3} \int_0^\infty \frac{\sinh^4 \theta d\theta}{e^{-\beta\mu + \beta mc^2 \sinh \theta} + 1};$$

здесь  $\beta = 1/kT$ ,  $\mu$  — химический потенциал, вычисленный с учетом энергии покоя  $mc^2$ , а переменная  $\theta$  определяется соотношением  $|\mathbf{p}| = mc \sinh \theta$ . Оценить значения приведенных величин при  $0^\circ\text{K}$ .

24. Предполагая, что релятивистский идеальный ферми-газ, рассмотренный в предыдущей задаче, полностью вырожден,

получить предельные выражения

$$E \approx E_0 + K = N \left( mc^2 + \frac{3}{5} \frac{|p_0|^2}{2m} \right), \quad pV \approx \frac{2}{3} K,$$

в нерелятивистском пределе

$$\frac{\hbar}{mc} \left( \frac{3\pi}{8\pi} \right)^{1/3} \ll 1$$

и

$$E \approx K = N \frac{3}{8} |p_0| c, \quad pV \approx \frac{1}{3} K,$$

в ультрарелятивистском пределе

$$\frac{\hbar}{mc} \left( \frac{3\pi}{8\pi} \right)^{1/3} \gg 1.$$

Здесь  $n = N/V$  — плотность числа частиц, а  $p_0$  — импульс Ферми, т. е. импульс, которому соответствует энергия, равная химическому потенциалу при  $0^\circ\text{K}$ .

25. Определить химический потенциал и теплоемкость ультрарелятивистского сильно вырожденного идеального ферми-газа (спин  $1/2$ ).

26. Рассмотрим идеальный бозе-газ из частиц, обладающих внутренними степенями свободы. Будем предполагать для простоты, что, кроме основного энергетического уровня  $\varepsilon_0 = 0$ , существует только один возбужденный уровень внутренней энергии частицы  $\varepsilon_1$ . Определить температуру бозе-Эйнштейновской конденсации как функцию энергии  $\varepsilon_1$ .

27. Найти несколько первых членов вириального разложения для идеального квантового газа в случае слабого вырождения.

28. Написать матрицу плотности для идеального ферми-газа в  $q$ -представлении. Спин частиц не учитывать.

29. Предполагая сильное вырождение  $kT \ll \mu$ , найти магнитную восприимчивость, обусловленную орбитальным движением электронов в слабом магнитном поле  $\mu_B H \ll kT$  (см. задачу 17).

*Указание.* Использовать формулу суммирования Эйлера

$$\sum_{l=a}^{b-1} f\left(l + \frac{1}{2}\right) \approx \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{24} (f'(b) - f'(a))$$

$$\left[ f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f\left(x - \frac{1}{2}\right) - f'(x) \ll f(x) \right].$$

30. В случае достаточно сильного магнитного поля ( $kT < \mu_B H \ll \mu$ ) в выражении для магнитной восприимчивости системы электронов, рассмотренной в задаче 29, появляется осциллирующий член, зависящий от  $H$ . Получить явный вид этого осциллирующего члена (эффект де-Гааза — ван Альфена).

*Указание.* Как показано в гл. 2 [см. (2.6)], плотность состояний  $D(\epsilon)$  в случае статистики Больцмана можно выразить через односоставную статистическую сумму  $Z(\beta)$  с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$D(\epsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\beta\epsilon} Z(\beta) d\beta;$$

здесь  $\beta = 1/kT$ , а  $c (> 0)$  есть абсцисса сходимости для  $Z(\beta)$ . Предполагается, что  $\epsilon > 0$ . Использовать результат, полученный в задаче 17.

### РЕШЕНИЯ

1.1. При  $0^\circ\text{K}$  электроны занимают все энергетические уровни вплоть до  $\epsilon = \mu_0$ . Следовательно,

$$D\mu_0 = N, \quad \mu_0 = \frac{N}{D}. \quad (1)$$

2. Химический потенциал  $\mu$  определяется из условия

$$N = D \int_0^{\infty} \frac{d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}. \quad (2)$$

Условие отсутствия вырождения имеет вид

$$e^{-\beta\mu} \gg 1. \quad (3)$$

В случае его выполнения (2) переходит в

$$\frac{N}{D} = \int_0^{\infty} e^{-\beta(\epsilon-\mu)} d\epsilon = \frac{e^{\beta\mu}}{\beta}.$$

Теперь можно заменить (3) условием

$$\frac{N}{DkT} \ll 1, \quad (4)$$

которое означает, что полное число электронов  $N$  мало по сравнению с числом энергетических уровней в интервале шириной  $kT$ , т. е.

$$N \ll DkT, \quad (5)$$

где  $DkT$  есть число состояний в интервале  $kT$ . Это и есть исходное условие.