

30. В случае достаточно сильного магнитного поля ($kT < \mu_B H \ll \mu$) в выражении для магнитной восприимчивости системы электронов, рассмотренной в задаче 29, появляется осциллирующий член, зависящий от H . Получить явный вид этого осциллирующего члена (эффект де-Гааза — ван Альфена).

Указание. Как показано в гл. 2 [см. (2.6)], плотность состояний $D(\epsilon)$ в случае статистики Больцмана можно выразить через односоставную статистическую сумму $Z(\beta)$ с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$D(\epsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\beta\epsilon} Z(\beta) d\beta;$$

здесь $\beta = 1/kT$, а $c (> 0)$ есть абсцисса сходимости для $Z(\beta)$. Предполагается, что $\epsilon > 0$. Использовать результат, полученный в задаче 17.

РЕШЕНИЯ

1.1. При 0°K электроны занимают все энергетические уровни вплоть до $\epsilon = \mu_0$. Следовательно,

$$D\mu_0 = N, \quad \mu_0 = \frac{N}{D}. \quad (1)$$

2. Химический потенциал μ определяется из условия

$$N = D \int_0^{\infty} \frac{d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}. \quad (2)$$

Условие отсутствия вырождения имеет вид

$$e^{-\beta\mu} \gg 1. \quad (3)$$

В случае его выполнения (2) переходит в

$$\frac{N}{D} = \int_0^{\infty} e^{-\beta(\epsilon-\mu)} d\epsilon = \frac{e^{\beta\mu}}{\beta}.$$

Теперь можно заменить (3) условием

$$\frac{N}{DkT} \ll 1, \quad (4)$$

которое означает, что полное число электронов N мало по сравнению с числом энергетических уровней в интервале шириной kT , т. е.

$$N \ll DkT, \quad (5)$$

где DkT есть число состояний в интервале kT . Это и есть исходное условие.

3. В случае $\beta\mu \gg 1$ из (2) получим

$$\begin{aligned} N &= D \left\{ \int_0^{\mu} d\varepsilon - \int_0^{\mu} \left[1 - \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \right] d\varepsilon + \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \right\} = \\ &= D \left\{ \mu - \int_0^{\mu} \frac{d\varepsilon}{e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} + \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \right\} \approx \\ &\approx D \left(\mu - \int_0^{\infty} \frac{dy}{e^{\beta y} + 1} + \int_0^{\infty} \frac{dy}{e^{\beta y} + 1} \right) = D\mu. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогично преобразуем выражение для внутренней энергии

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{\infty} \frac{D\varepsilon \, d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} = \\ &= D \left\{ \int_0^{\mu} \varepsilon \, d\varepsilon - \int_0^{\mu} \frac{\varepsilon \, d\varepsilon}{e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} - \int_{\mu}^{\infty} \frac{\varepsilon \, d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \right\} \approx \\ &\approx D \left\{ \frac{1}{2} \mu^2 + 2(kT)^2 \int_0^{\infty} \frac{x \, dx}{e^x + 1} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} D\mu^2 + \frac{1}{6} \pi^2 D (kT)^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая (6), легко показать, что первый член в выражении (7) не зависит от температуры, так что при низких температурах

$$\frac{dE}{dT} \approx \frac{1}{3} \pi^2 D k^2 T. \quad (8)$$

2. На фиг. 95 пунктирной линией изображена зависимость функции $D(\varepsilon)f(\varepsilon)$ от энергии. При использовании указанного в задаче приближения мы получаем сплошную линию. Разности ΔE внутренних энергий при температуре T° К и при 0° К соответствует разность абсцисс центров тяжести треугольника ABC (точка G') и прямоугольника $AA'B'B$ (точка G). Полагая $BC = 2\alpha kT$, где α — постоянная порядка единицы, получаем для координат точек G и G' :

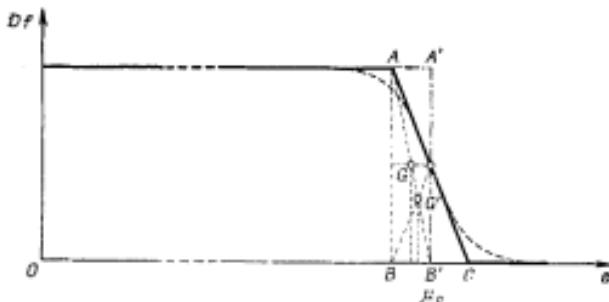
$$G: OB + \frac{1}{2} BB' = OB + \frac{1}{2} \alpha kT,$$

$$G': OB + \frac{1}{3} BC = OB + \frac{2}{3} \alpha kT.$$

Таким образом, имеем

$$\Delta E = \alpha kT D \times \frac{1}{6} \alpha kT = \frac{1}{6} \alpha^2 D (kT)^2, \quad (1)$$

где $\alpha kT D$ представляет собой число электронов в области $AA'B'B$. Если выбрать в качестве отрезка CA касательную к кривой, соот-



Ф и г. 95

ветствующей истинному распределению Ферми, то $2\alpha kT = 1/|f'(\mu)| = 4kT$. В этом случае получаем из (1)

$$C = \frac{d\Delta E}{dT} = \frac{4}{3} D k^2 T. \quad (2)$$

[Точное значение числового коэффициента в (2) равно $(1/3)\pi^2$, как было показано в задаче 1.]

3. Используя (4.5), получаем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_\mu = \frac{e-\mu}{kT^2} \frac{e^{\beta(e-\mu)}}{[e^{\beta(e-\mu)}+1]^2} = -\frac{e-\mu}{T} f'(\varepsilon),$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mu} \right)_T = -f'(\varepsilon).$$

Следуя процедуре, использованной в (4.7), имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial I}{\partial T} \right)_\mu &= -\frac{1}{T} \int_0^\infty (e-\mu) g(e) f'(e) de = \\ &= \frac{1}{6} \pi^2 k^2 T \left[\frac{d^2}{de^2}(e-\mu) g \right]_{e=\mu} + \dots = \\ &= \frac{1}{3} \pi^2 k^2 T g'(\mu) + O(T^2) \end{aligned} \quad (1)$$

и

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \mu} \right)_T = - \int_0^\infty g(e) f'(e) de = g(\mu) + O(T^2). \quad (2)$$

В случае $g = D$ получим $I = N$, а из условия

$$dN = \left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_T d\mu + \left(\frac{\partial N}{\partial T} \right)_\mu dT = 0$$

находим

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_N = -\frac{1}{3} \pi^2 k^2 T \frac{D'(\mu)}{D(\mu)} + O(T^3). \quad (3)$$

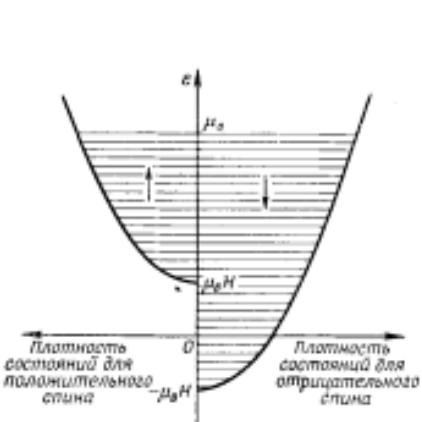
Используя (3), легко показать, что функции $g'(\mu)$ и $g(\mu)$ в (1) и (2) можно заменить соответственно на $g'(\mu_0)$ и $g(\mu_0)$. Получаем далее

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial I}{\partial T} \right)_N &= \left(\frac{\partial I}{\partial \mu} \right)_T \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_N + \left(\frac{\partial I}{\partial T} \right)_\mu = \\ &= -g(\mu) \frac{1}{3} \pi^2 k^2 T \frac{D'(\mu)}{D(\mu)} + \frac{1}{3} \pi^2 k^2 T g'(\mu) + O(T^3) = \\ &= \frac{1}{3} \pi^2 k^2 T \psi'(\mu_0) D(\mu_0) + O(T^3). \end{aligned} \quad (4)$$

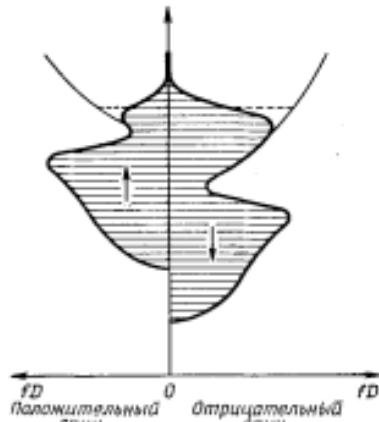
4. Энергия электрона имеет вид

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} \pm \mu_B H. \quad (1)$$

Два знака перед вторым слагаемым соответствуют двум направлениям спина. При 0° К электроны занимают все уровни вплоть



Фиг. 96



Фиг. 97

до ферми-уровня μ_0 . Это значит, что кинетическая энергия $p^2/2m$ электрона с положительным спином принимает значения от 0 до $\mu_0 - \mu_B H$, а электрона с отрицательным спином — значения

от 0 до $\mu_0 + \mu_B H$ (фиг. 96). Числа электронов с положительным и отрицательным спином равны соответственно

$$N_+ = \frac{4\pi V}{3h^3} p_+^3 \quad \left(\frac{1}{2m} p_+^2 = \mu_0 - \mu_B H \right), \quad (2)$$

$$N_- = \frac{4\pi V}{3h^3} p_-^3 \quad \left(\frac{1}{2m} p_-^2 = \mu_0 + \mu_B H \right). \quad (3)$$

Полный магнитный момент равен

$$\begin{aligned} M &= -\mu_B (N_+ - N_-) = -\frac{4\pi V}{3h^3} \mu_B (p_+^3 - p_-^3) = \\ &= \mu_B \frac{4\pi V}{3h^3} \{ [2m(\mu_0 + \mu_B H)]^{3/2} - [2m(\mu_0 - \mu_B H)]^{3/2} \}. \end{aligned}$$

В случае $\mu_0 \gg \mu_B H$ имеем

$$M = 3H\mu_B^{\frac{1}{2}} \frac{4\pi V}{3h^3} \frac{(2m\mu_0)^{3/2}}{\mu_0} + \dots = \frac{3}{2} \frac{\mu_B^{\frac{1}{2}} N}{\mu_0} H + \dots \quad (4)$$

Здесь мы учли, что $N = 2 \cdot 4\pi V (2m\mu_0)^{3/2} / 3h^3$. Окончательно получаем

$$\chi = \frac{3/2n\mu_B^{\frac{1}{2}}}{\mu_0} = \frac{3/2n\mu_B^2}{kT_0}.$$

5. Как и в предыдущей задаче, магнитный момент на единицу объема запишем в виде

$$\begin{aligned} M &= \mu_B \left\{ \int \frac{D(e) de}{e^{\beta(e - \mu_B H - \mu)} + 1} - \int \frac{D(e) de}{e^{\beta(e + \mu_B H - \mu)} + 1} \right\} = \\ &= \mu_B \int \{D(e + \mu_B H) - D(e - \mu_B H)\} f(e) de. \quad (1) \end{aligned}$$

Разложив D в ряд Тейлора для малых $\mu_B H$, имеем в первом порядке по H

$$\chi = \frac{M}{H} = 2\mu_B^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} D'(e) f(e) de. \quad (2)$$

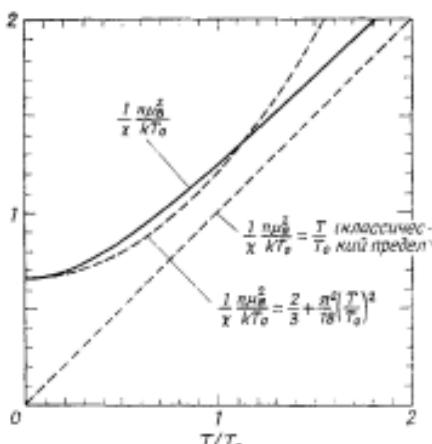
Графики функций $f(e) D(e \pm \mu_B H)$ приведены на фиг. 97.

1. При 0°K и при $e > \mu_0$ имеем $f(e) = 0$, так что

$$\chi_0 = 2\mu_B^{\frac{1}{2}} \int_0^{\mu_0} D'(e) de = 2\mu_B^{\frac{1}{2}} D(\mu_0). \quad (3)$$

2. В случае сильного вырождения используем результаты задачи 3. Полагая $\psi = 2\mu_B^{\frac{1}{2}} D'/D$, получаем

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial T} \right)_N = \frac{2\pi^2}{3} \mu_B^{\frac{1}{2}} k^2 T D(\mu_0) \left(\frac{D'}{D} \right)' = \frac{2\pi^2 k^2 T}{3} \mu_B^{\frac{1}{2}} D(\mu_0) \frac{d^2 \ln D(\mu_0)}{d\mu_0^2}. \quad (4)$$



Ф и г. 98

Учитывая (3), можно написать теперь

$$\chi = 2\mu_B^2 D(\mu_0) \left\{ 1 + \frac{1}{6} \pi^2 k^2 T^2 \frac{d^2 \ln D(\mu_0)}{d\mu_0^2} + \dots \right\}. \quad (5)$$

3. При отсутствии вырождения можно положить $f(e) = e^{-\beta(e-\mu)}$, так что

$$\int_0^\infty D'(e) e^{-\beta(e-\mu)} de = [De^{-\beta(e-\mu)}]_0^\infty + \beta \int_0^\infty D(e) e^{-\beta(e-\mu)} de = \frac{1}{2} \beta n,$$

и, следовательно,

$$\chi = \frac{n\mu_B^2}{kT}, \quad (6)$$

где n — число электронов в единице объема. В случае свободных электронов $D(e) = Ce^{1/2}$ и, следовательно,

$$\int_0^{\mu_0} D(e) de = \frac{2}{3} C \mu_0^{3/2} = \frac{1}{2} n,$$

$$\frac{d^2 \ln D(\mu_0)}{d\mu_0^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 \ln \mu_0}{d\mu_0^2} = -\frac{1}{2\mu_0^2}.$$

Теперь выражение (5) принимает вид

$$\chi = \frac{3}{2} \frac{n\mu_B^2}{\mu_0} \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{12} \frac{k^2 T^2}{\mu_0^2} + \dots \right\} =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{n\mu_B^2}{kT_0} \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 + \dots \right\}. \quad (7)$$

где $T_0 = \mu_0/k$ — температура вырождения; соответствующая кривая приведена на фиг. 98.

6. Если рассматривать свободные электроны как классический идеальный газ, то вклад от степеней свободы, связанных с поступательным движением электронов, в C_V — молярную теплоемкость при постоянном объеме — будет равен $3R/2$ в соответствии с законом о равномерном распределении энергии. Вместе с тем колебания решетки металла обладают $3N_0 - 6 \approx 3N_0$ (N_0 — число Авогадро) степенями свободы на моль и могут рассматриваться как система $3N_0$ гармонических осцилляторов. Считая, что они описываются классической статистикой, получаем вклад колебаний решетки в C_V , равный $3R$, а в сумме получаем для атомной теплоемкости металла значение $4,5 R$.

Если же рассматривать электроны как вырожденный ферми-газ, то следует учитывать, что электроны заполняют все уровни в зоне проводимости вплоть до уровня Ферми $\mu_0 = kT_0 (\gg kT)$. Тепловая энергия, равная по порядку величины kT , не может возбудить электронов с низколежащими уровнями в силу принципа Паули. Поглотить энергию kT и перейти на свободные уровни могут лишь электроны, находящиеся вблизи уровня Ферми. Это обусловлено тем, что в вырожденном случае функция распределения Ферми резко падает от 1 до 0 в области шириной порядка kT вблизи уровня Ферми. Таким образом, число электронов, которые могут испытать тепловое возбуждение, имеет величину порядка NT/T_0 , так что вклад их в атомную теплоемкость имеет порядок $(\frac{3}{2}) RT/T_0$, т. е. пренебрежимо мал при $T \ll T_0$. Полагая, что плотность состояний дается формулой (4.9), получаем для μ_0

$$\mu_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{3N_0}{\pi V_A} \right)^{2/3} = 4,166 \cdot 10^{-11} V_A^{-2/3} \text{ эрг}, \quad (1)$$

где V_A — атомный объем. Для Na при $V_A = 24 \text{ см}^3$ имеем $\mu_0 = 5,0 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$ ($= 3,0 \text{ эв}$), $T_0 = \mu_0/k = 3,6 \cdot 10^4 \text{ К}$, так что условие $T \ll T_0$ удовлетворяется при обычных температурах.

З а м е ч а н и е. Эффективная масса m^* электронов проводимости для Na равна 0,98 m .

7. Выше были получены формулы для спиновой парамагнитной восприимчивости в предельных случаях невырожденного газа [см. формулу (6) в решении задачи 5]

$$\chi_{\infty} = \frac{\mu_B^2}{kT} \quad (1)$$

и сильно вырожденного газа [формула (3)]

$$\chi_0 = \frac{3}{2} \frac{n\mu_B^2}{kT_0}. \quad (2)$$

Используя результат задачи 6, мы можем теперь рассматривать отношение

$$\frac{\chi_0}{\chi_\infty} = \frac{3}{2} \frac{T}{T_0} \quad (3)$$

как отношение числа электронов, которые могут испытывать тепловое возбуждение, к полному числу электронов сильно вырожденного ферми-газа. Иными словами, если применить формулу (1) к системе из $n' = n \cdot 3/2T/T_0$ классических электронов (невырожденный случай), то мы получим формулу (2). Такое поведение объясняется *принципом Паули*. Электрон с энергией ε не может поглотить квант тепловой энергии, если состояние с энергией $\varepsilon + kT$ уже занято. В то же время электроны с энергиями, лежащими в области порядка kT вблизи уровня Ферми, легко могут быть возбуждены.

З а м е ч а н и е. Выражение (1) представляет собой частный случай (при $s = 1/2$, $g = 2$) формул Ланжевена — Дебая

$$\chi_s = \frac{n\mu_B^2}{3kT}$$

[см. гл. 2, выражение (5) в решении задачи 9].

8. Будем использовать следующие формулы для идеального ферми-газа (см. пример 2, задачу 4 и пример 1):

$$C_V = \frac{N\pi^2 k^2 T}{2\mu_0},$$

$$\chi_s = \frac{3N\mu_B^2}{2\mu_0},$$

$$\mu_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3};$$

здесь N — полное число электронов в единице массы. Эти величины легко выразить через плотность ρ , молекулярный вес M , число валентных электронов z и число Авогадро N_0 , учитывая, что $N = zN_0/M$, а $N/V = \rho N$, так что

$$C_V = \frac{4}{3^{2/3}} \pi^{8/3} \frac{k^2 m N_0^{1/3}}{\hbar^2} \rho^{-2/3} \frac{z^{1/3}}{M^{1/3}} T \approx 0,3248 \cdot 10^{-4} \frac{z^{1/3}}{\rho^{2/3} M^{1/3}} T \text{ кал/с·град},$$

$$\chi_s = 4 \cdot 3^{1/3} \pi^{2/3} \frac{\mu_B^2 m N_0^{1/3}}{\hbar^2} \rho^{-2/3} \frac{z^{1/3}}{M^{1/3}} \approx 1,864 \cdot 10^{-3} \frac{z^{1/3}}{\rho^{2/3} M^{1/3}} \text{ CGSE}.$$

Полагая $z=1$, $\rho=0,534 \text{ г/см}^3$, $M=7$ для Li и $z=1$, $\rho=0,97 \text{ г/см}^3$, $M=23$ для Na, получаем (на единицу массы)

$$\text{Li: } C_V = 0,2579 \cdot 10^{-4} T \text{ кал/г·град}, \quad \chi_s = 1,4808 \cdot 10^{-6} \text{ CGSE},$$

$$\text{Na: } C_V = 0,1166 \cdot 10^{-4} T \text{ кал/г·град}, \quad \chi_s = 0,6691 \cdot 10^{-6} \text{ CGSE}.$$

9. С помощью большой статистической суммы Ξ получим

$$pV = kT \ln \Xi = kT \int_0^{\infty} D(\varepsilon) d\varepsilon \ln \{1 + e^{\beta(\mu-\varepsilon)}\}. \quad (1)$$

Для свободных электронов

$$D(\varepsilon) = Ce^{1/2}, \quad \frac{2C\mu_0^{3/2}}{3} = N, \quad \mu_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3}. \quad (2)$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} pV &= \frac{\binom{3}{2} N k T}{\mu_0^{3/2}} \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \ln [1 + e^{\beta(\mu-\varepsilon)}] = \\ &= \frac{\binom{3}{2} N k T}{\mu_0^{3/2}} \left\{ \left[\frac{2}{3} \varepsilon^{3/2} \ln (1 + e^{\beta(\mu-\varepsilon)}) \right]_0^{\infty} + \frac{2\beta}{3} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{3/2} d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \right\} = \\ &= \frac{N}{\mu_0^{3/2}} \int_0^{\infty} \varepsilon^{5/2} d\varepsilon f(\varepsilon) = \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \varepsilon D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{3} E. \end{aligned} \quad (3)$$

В случае сильного вырождения для E можно использовать выражение (10) из примера 1. При этом получим

$$p = \frac{2}{5} \frac{\mu_0}{v} + \frac{\pi^2}{6} \frac{k^2 T^3}{\mu_0 v} + \dots . \quad (4)$$

Учитывая, что $\mu_0 \sim V^{-2/3}$, находим выражение для скимаемости

$$\begin{aligned} \kappa &= -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = -\frac{1}{v (\partial p / \partial v)_T} = \\ &= \left\{ \frac{2}{3} \frac{\mu_0}{v} + \frac{\pi^2}{18} \frac{k^2 T^2}{\mu_0 v} + \dots \right\}^{-1} = \frac{3v}{2\mu_0} \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{18} \left(\frac{kT}{\mu_0} \right)^2 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

При 0° К имеем

$$\kappa_0 = \frac{3}{2} \frac{v}{\mu_0} = \frac{\binom{3}{2} V_A / N_0}{(\hbar^2 / 2m) (3N_0 / 8\pi V_A)^{2/3}} = 0,597 V_A^{5/3} \cdot 10^{-13} \text{ см}^2 / \text{дин},$$

так что для $V_A = 23 / 0,97 \text{ см}^3$ получаем $\kappa_0 = 11,7 \cdot 10^{-12} \text{ см}^2 / \text{дин}$.

10. Чтобы электрон мог вылететь из металла, кинетическая энергия его движения в направлении нормали к поверхности должна

на быть больше w . Полагая, что каждый электрон, для которого выполняется указанное условие, обязательно покинет поверхность металла, находим число электронов, уходящих в единицу времени через единицу площади поверхности

$$\mathfrak{N} = \int_{p_z > \sqrt{2m\omega}} dp_z \frac{p_z}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} dp_y \frac{2}{h^3} \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} + 1},$$

$$\varepsilon = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}; \quad (1)$$

здесь $p_z/m (= v_z)$ — скорость в направлении оси z , а $(2/h^3) \times e^{(\varepsilon - \mu)/kT} + 1$ — плотность числа электронов с энергией ε . Вводя обозначение $p_x^2 + p_y^2 = p'^2$, можно написать

$$\mathfrak{N} = \int_{p_z > \sqrt{2m\omega}} dp_z \frac{p_z}{m} \int_0^{\infty} 2\pi p' dp' \frac{2}{h^3} \frac{1}{\exp \left\{ \left(\frac{p_z^2 + p'^2}{2m} - \mu \right) / kT \right\} + 1} =$$

$$= \frac{4\pi m k T}{h^3} \int_{p_z > \sqrt{2m\omega}} \frac{p_z}{m} dp_z \ln \left[1 + \exp \frac{\mu - (p_z^2/2m)}{kT} \right] =$$

$$= \frac{4\pi m k T}{h^3} \int_w^{\infty} d\varepsilon_z \ln [1 + e^{(\mu - \varepsilon_z)/kT}]. \quad (2)$$

Теперь мы можем положить $\mu(T) = \mu_0$ и считать $w - \mu_0 = \varphi \gg kT$. Тогда, разлагая подынтегральную функцию в ряд по $\exp[\beta(\mu - \varepsilon_z)] \ll 1$ и оставляя лишь первый член разложения, получаем

$$\mathfrak{N} = \frac{4\pi m k T}{h^3} \int_w^{\infty} d\varepsilon_z e^{-(\varepsilon - \mu_0)/kT} =$$

$$= \frac{4\pi m (kT)^2}{h^3} e^{(\mu_0 - w)/kT} = \frac{4\pi m (kT)^2}{h^3} e^{-\varphi/kT}. \quad (3)$$

Для тока $J = e\mathfrak{N}$ имеем

$$J = \frac{4\pi m e k^2}{h^3} T^2 e^{-\varphi/kT}. \quad (4)$$

Замечание. Строго говоря, рассмотренный процесс не является термодинамически равновесным. Тем не менее мы считаем, что число электронов, достигающих поверхности металла в единицу времени, имеет такую же величину. Как и в случае термодинамического равновесия, хотя электроны непрерывно уходят через поверхность металла (термоэлектронный ток). Вместе с тем той же величине \mathfrak{N} в случае равновесия было бы

равно и число электронов \mathfrak{N}' , ударяющихся о поверхность металла снаружи. Плотность электронного газа вне металла можно считать малой и, применив статистику Больцмана, записать давление p в виде

$$\frac{p}{kT} = 2 \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\Phi/kT}; \quad (5)$$

здесь множитель 2 обусловлен спиновым вырождением. Мы отчитываем энергию от минимального значения кинетической энергии, так что химический потенциал равен $-\Phi$. Соотношение между величиной \mathfrak{N}' и давлением p дается ниже [см. гл. 6, формула (2) в решении задачи 4]:

$$\mathfrak{N}' = \frac{p}{(2\pi mkT)^{3/2}}. \quad (6)$$

Из (5) и (6) получаем выражение (3) для \mathfrak{N}' .

11. Термодинамические свойства свободного электронного газа из $2N - N'$ электронов, находящихся в рассматриваемой энергетической зоне, определяются свободной энергией Гельмольца

$$F = (2N - N')\mu - kT \sum_i \ln \{1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}\}, \quad (1)$$

$$2N - N' = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ \sum_i \ln [1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}] \right\}. \quad (2)$$

Эти два выражения с помощью тождественных преобразований можно привести к виду

$$\begin{aligned} F &= (2N - N')\mu - kT \sum_i \ln \{1 + e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)}\} - \sum_i (\mu - \varepsilon_i) = \\ &= \sum_i \varepsilon_i - N'\mu - kT \sum_i \ln \{1 + e^{\beta(-\mu - (-\varepsilon_i))}\} \end{aligned} \quad (3)$$

и

$$\begin{aligned} 2N - N' &= \sum_i \frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)}} = \sum_i \left\{ 1 - \frac{1}{1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}} \right\} = \\ &= 2N - \sum_i \frac{1}{1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}}, \end{aligned} \quad (4)$$

или

$$N' = \sum_i \frac{1}{1 + e^{\beta(-\varepsilon_i - (-\mu))}}. \quad (5)$$

В выражении (3) величина $\sum_i \varepsilon_i$ есть постоянная, поэтому она никак не сказывается на термодинамических свойствах и ее

можно опустить, выбрав новое начало отсчета энергии. Легко видеть, что выражения (3) и (5) как раз определяют свободную энергию Гельмгольца для системы электронов с уровнями энергии $-e_i$ и химическим потенциалом $-\mu$.

З а м е ч а н и е. Эту систему можно рассматривать как идеальный ферми-газ, состоящий из положительных дырок [см. (4.4)].

12. Используя условие электронейтральности $n = N_D - n_D$, получаем из соотношения (8) примера 4

$$\frac{n^2}{N_D - n} = \frac{1}{2} N_c e^{-E_D/kT}. \quad (1)$$

Отсюда можно определить n как функцию температуры T и плотности доноров N_D :

$$\frac{n}{N_D} = \frac{N_c}{4N_D} e^{-E_D/kT} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \frac{8N_D}{N_c} e^{E_D/kT}} \right\}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в выражение (7) примера 4, получаем (при $-\mu \gg kT$) $\mu = kT \ln \frac{n}{N_c} = -E_D + kT \ln \left\{ \frac{1}{4} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{8N_D}{N_c} e^{E_D/kT}} \right] \right\}$. (3)

При достаточно низких температурах всегда выполняется условие

$$e^{E_D/kT} \gg \frac{N_c}{8N_D}, \quad (4)$$

так что, пренебрегая 1 под корнем и -1 в скобках в выражениях (2) и (3), имеем

$$n = \left(\frac{1}{2} N_D N_c \right)^{1/2} e^{-E_D/2kT} = N_D \left(\frac{N_c}{2N_D} \right)^{1/2} e^{-E_D/2kT} \ll N_D, \quad (5)$$

$$\mu = -\frac{1}{2} E_D + \frac{1}{2} kT \ln \frac{N_D}{2N_c}. \quad (6)$$

При низких температурах второе слагаемое в (6) мало, так что $\mu \approx -E_D/2$. Это значит, что уровень Ферми лежит посередине между дном зоны проводимости и донорным уровнем, что соответствует очень слабой ионизации доноров. При достаточно высоких температурах N становится большим, а $e^{E_D/kT}$ стремится к единице, так что выполняется условие

$$\frac{8N_D}{N_c} e^{E_D/kT} \ll 1. \quad (7)$$

В этом случае имеем

$$n = N_D \left\{ 1 - \frac{2N_D}{N_c} e^{E_D/kT} + \dots \right\}, \quad (8)$$

$$\mu = kT \left\{ \ln \frac{N_D}{N_c} - \frac{2N_D}{N_c} e^{E_D/kT} + \dots \right\}. \quad (9)$$

Это значит, что уровень Ферми теперь лежит ниже примесного уровня и доноры ионизованы почти полностью. С помощью выражений (5) и (8) получаем следующие формулы для проводимости:

$$\sigma = \frac{e^2 \tau}{m^*} \left(\frac{2\pi m^* kT}{h^2} \right)^{3/4} N_D^{1/2} e^{-E_D/2kT}$$

(низкие температуры), (10)

$$\sigma = \frac{e^2 \tau}{m^*} N_D \text{ (высокие температуры).} \quad (11)$$

На фиг. 99 приведена зависимость $\ln \sigma$ от $1/T$. При низких температурах температурная зависимость σ [см. (10)] определяется главным образом экспоненциальным множителем, так как $T^{3/4}$ является медленно меняющейся функцией. Поэтому при низких температурах

$$\frac{\partial \ln \sigma}{\partial (1/T)} \sim -\frac{1}{2} E_D. \quad (12)$$

Отсюда можно определять величину E_D .

З а м е ч а н и е. Соотношение между донорным уровнем и уровнем Ферми может быть получено следующим путем. Положим $\mu/kT = x$ и перепишем соотношения (5) и (7) из примера 4 следующим образом:

$$\frac{n}{N_c} = e^x \quad (13)$$

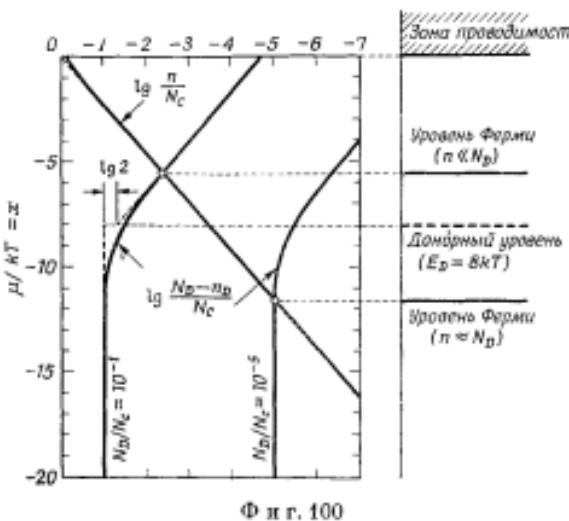
и

$$\frac{N_D - n_D}{N_c} = \frac{N_D/N_c}{1 + 2e^{E_D/kT} e^x}. \quad (14)$$

Величину $\mu = xkT$ можно определить графически, находя точку пересечения кривых, изображающих зависимость $\ln(n/N_c)$ и $\ln[(N_D - n_D)/N_c]$ от $x (< 0)$. Зависимость $\ln(n/N_c)$ от x линейна. [При $x \approx 0$ и $x > 0$ это, вообще говоря, не имеет места, так как в этом случае система является почти вырожденной или даже сильно вырожденной, так что соотношение (13) перестает быть справедливым.] При $x + E_D/kT \gg -\ln 2$ мы можем пре-небречь единицей в знаменателе в (14); при $x + E_D/kT \ll -\ln 2$, наоборот, знаменатель близок к единице. В результате мы имеем изображенную на фиг. 100 зависимость $\ln[(N_D - n_D)/N_c]$ от x . На фиг. 100 приведены две кривые, соответствующие двум различным значениям N_D/N_c .



Ф и г. 99



Ф и г. 100

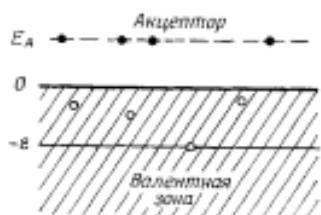
13. Проведем рассуждения, аналогичные использованным в примере 4. Среднее число электронов на акцепторных уровнях равно

$$n_A = \frac{N_A}{1/2^e^{(E_A - \mu)/kT} + 1} \quad (1)$$

[см. пример 4, соотношение (5)]. Энергия отсчитывается от края валентной зоны (фиг. 101). Число электронов в валентной зоне есть

$$n = \int_0^\infty \frac{2D(e) de}{e^{-(e+\mu)/kT} + 1}; \quad (2)$$

здесь $D(e)$ — плотность состояний в точке — e без учета спинового вырождения. Как легко видеть, число дырок в заполненной зоне определяется выражением



Ф и г. 101

$$\begin{aligned} p &= \int_0^\infty 2 \left\{ 1 - \frac{1}{e^{-(e+\mu)/kT} + 1} \right\} D(e) de = \\ &= \int_0^\infty \frac{2D(e) de}{e^{(e+\mu)/kT} + 1} = \int_0^\infty \frac{2D(e) de}{e^{(e-\mu')/kT} + 1}. \quad (3) \end{aligned}$$

В последнем выражении мы использу-

зовали величину $\mu' = -\mu$. Таким образом, мы имеем ферми-распределение дырок с энергией v и ферми-потенциалом μ' . Число дырок на акцепторных уровнях определяется соотношением

$$p_A = N_A - n_A = \frac{N_A}{1 + 2e^{-(E_A - \mu)/kT}} = \frac{N_A}{1 + 2e^{-(E_A + \mu')/kT}}, \quad (4)$$

Предполагая, что систему дырок можно рассматривать как невырожденную, получаем из (3)

$$p = 2 \left(\frac{2\pi m_h k T}{h^2} \right)^{3/2} e^{\mu'/kT} \equiv N_e e^{\mu'/kT} \quad (5)$$

и из (4)

$$\frac{p(N_A - p_A)}{p_A} = 2N_e e^{-E_A/kT}. \quad (6)$$

Это соотношение представляет собой закон действующих масс для реакции $A \rightarrow A^- + h$ (где h обозначает дырку).

Используя условие электронейтральности $p = N_A - p_A$, находим, что в случае низких температур

$$p = (2N_e N_A)^{1/2} e^{-E_A/2kT} = 2N_A^{1/2} \left(\frac{2\pi m_h k T}{h^2} \right)^{3/4} e^{-E_A/2kT},$$

а в случае высоких температур

$$p \sim N_A.$$

З а м е ч а н и е. Следует обратить внимание на влияние спинового вырождения на распределение дырок. В знаменателе выражения (4) появился множитель 2 вместо множителя $1/2$ в выражении (5) в примере 4. Донорный уровень обладает статистическим весом 2 по отношению к возможному заполнению его электроном. Наоборот, акцепторный уровень не имеет спинового вырождения с точки зрения возможности его заполнения дыркой. Если отбросить ограничение, что на каждом донорном и акцепторном уровне должен находиться самое большее один электрон, а считать, что на одном акцепторном уровне могут находиться два электрона (с положительным и отрицательным спинами), то вместо (1) и (2) получим

$$n_A = \frac{2N_A}{e^{-(E_A - \mu)/kT} + 1}, \quad p_A = \frac{2N_A}{e^{-(E_A + \mu')/kT} + 1}.$$

Эти выражения полностью аналогичны найденным в случае доноров.

14. Как было показано в примере 6, химический потенциал μ фотонного газа равен нулю, так что свободная энергия Гельмгольца $F (= N\mu - pV)$ становится равной $-pV$. Здесь p обозна-

чает давление излучения, а V — объем, занятый полем. Искомые величины мы можем получить, используя выражение (2) примера 6 для большой статистической суммы Ξ :

$$pV = kT \ln \Xi = -kT \sum_i \ln \{1 - e^{-\hbar v_i / kT}\}. \quad (1)$$

Здесь суммирование по i является по существу суммированием по возможным значениям волнового вектора \mathbf{q} и может быть заменено интегрированием. Учитывая два возможных направления поляризации фотонов, получаем, интегрируя по частям,

$$\begin{aligned} pV &= -kT \int_0^{\infty} \ln \{1 - e^{-\hbar c q / kT}\} \frac{2 \cdot 4 \pi q^2 dq}{(2\pi)^3} V = \\ &= -\frac{(kT)^4 V}{\pi^2 (\hbar c)^3} \int_0^{\infty} \ln (1 - e^{-x}) x^2 dx = \\ &= \frac{(kT)^4 V}{3\pi^2 (\hbar c)^3} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \quad \left(x = \frac{\hbar c q}{kT} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Последний интеграл равен $\pi^4/15$, так что окончательно имеем

$$pV = -F = V \frac{\pi^2 (kT)^4}{45 (\hbar c)^3} = \frac{4\sigma}{3c} VT^4. \quad (3)$$

Величина $\sigma = \pi^2 k^4 / 60 \hbar^3 c^2 = 5,672 \cdot 10^{-5}$ э/сек³·град³ называется постоянной Стефана — Больцмана.

Теперь легко получить выражения для энтропии S и внутренней энергии $U = F + TS$:

$$S = \frac{16\sigma}{3c} VT^3, \quad (4)$$

$$U = \frac{4\sigma}{c} VT^4 = 3pV. \quad (5)$$

15. Энергетические уровни свободных частиц (молекул идеального газа), занимающих двумерную область размером $L_x \times L_y$, имеют вид

$$\varepsilon(k_x, k_y) = \frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2)}{2m},$$

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L_x}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L_y}, \quad n_x, n_y = 0, \pm 1, \dots.$$

Будем далее использовать формулу, выведенную для статистики Бозе в самом общем случае:

$$N = \sum_i \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/kT} - 1}; \quad (1)$$

здесь N — полное число частиц, μ — химический потенциал, а сумма распространяется на все возможные энергетические уровни. Предполагая, что значения L_x и L_y достаточно велики, мы можем заменить суммирование интегрированием в плоскости $k_x k_y$:

$$N = \frac{L_x L_y}{(2\pi)^2} \int \frac{dk_x dk_y}{\exp \left[\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right) / kT \right] - 1}, \quad k_x^2 + k_y^2 = k^2. \quad (2)$$

Получаем далее

$$\begin{aligned} N &= \frac{L_x L_y}{(2\pi)^2} 2\pi \int_0^\infty \frac{k dk}{\exp \left[\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right) / kT \right] - 1} = \\ &= 2\pi L_x L_y \frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty \frac{dk}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} - 1}, \end{aligned} \quad (3)$$

или

$$N = L_x L_y \frac{2\pi m k T}{\hbar^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} e^{l\mu/kT}. \quad (4)$$

Известно, что уравнение такого вида относительно μ не имеет решений порядка $1/N$. Это значит, что в системе нет уровней, число молекул на которых было бы порядка N , т. е. бозе-эйнштейновская конденсация не имеет места.

ОТСТУПЛЕНИЕ 11

Броуновское движение. Исследуя пыльцу растений, ботаник Роберт Броун в 1828 г. обнаружил впервые, что она разделяется в воде на большое число мелких частиц, которые находятся в непрерывном беспорядочном движении, подобно пчелиному рою. В 1905 г. Эйнштейн [5] писал: «В этой работе будет показано, что, согласно молекулярно-кинетической теории теплоты, взвешенные в жидкости тела микроскопических размеров вследствие молекулярного теплового движения должны совершать движения такой величины, что они легко могут быть обнаружены под микроскопом. Возможно, что рассматриваемые здесь движения тождествены с так называемым «броуновским молекулярным движением»; однако доступные мне данные относительно последнего настолько неточные, что я не мог составить себе об этом определенного мнения».

Если рассматриваемое здесь движение вместе с ожидаемыми закономерностями действительно будет наблюдаться, то классическая термодинамика уже для микроскопически различных областей не может считаться вполне справедливой, и тогда возможно точное определение истинных атомных размеров. Если же, наоборот, предсказание этого движения не подтвердится, то это будет веским аргументом против молекулярно-кинетического представления о теплоте.

211111022111232300000011001041122334534221213202210222123222322222213
8422...

Приведенный здесь ряд чисел получен Вестгреном, наблюдавшим под микроскопом через определенные промежутки времени число коллоидных частиц, находящихся в заданном элементе объема коллоидного раствора. Этот ряд чисел может быть прекрасно проанализирован с помощью теории броуновского движения, построенной Смолуховским в 1906 г., вскоре после появления первой работы Эйнштейна. Даже в состоянии равновесия в физической системе никогда не прекращается тепловое движение молекул. Это непрестанное движение молекул, с одной стороны, делает статистическую механику наиболее необходимым и весьмаенным методом теоретической физики, а, с другой стороны, является причиной неприменимости классической термодинамики к описанию явлений, подобных броуновскому движению. Стохастическая теория броуновского движения остается до сих пор одним из самых удивительных разделов теоретической физики. Основные классические работы в этой области содержатся в сборнике [6]¹⁾.

16. Используя выражение для плотности состояний, приведенное в примере 4 [соотношение (3)], запишем внутреннюю энергию E и спиновый магнитный момент M свободного электронного газа в виде

$$E = N \frac{3}{2} \mu_0^{-3/2} \int_0^{\infty} e^{3/2} f(e) de, \quad (1)$$

$$M = N \mu_B \frac{3}{4} \mu_0^{-3/2} \int_0^{\infty} e^{1/2} \{f(e - \mu_B H) - f(e + \mu_B H)\} de \quad (2)$$

[см. выражение (1) в решении задачи 5]; здесь $f(e) = 1/[\exp(\beta(e - \mu) + 1)]$ — функция распределения Ферми. Величины N и μ связаны соотношением

$$N = N \frac{3}{2} \frac{4}{\mu_0^{3/2}} \int_0^{\infty} e^{1/2} f(e) de; \quad (3)$$

делая подстановку $\beta e = x$, его можно преобразовать к виду

$$\frac{2}{3} \left(\frac{\mu_0}{kT} \right)^{3/2} = \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{e^{x-\beta\mu} + 1} \quad \text{или} \quad \frac{2}{3} \left(\frac{T_0}{T} \right)^{3/2} = F_{1/2} \left(\frac{\mu}{kT} \right).$$

Здесь $T_0 = \mu_0/k$, а

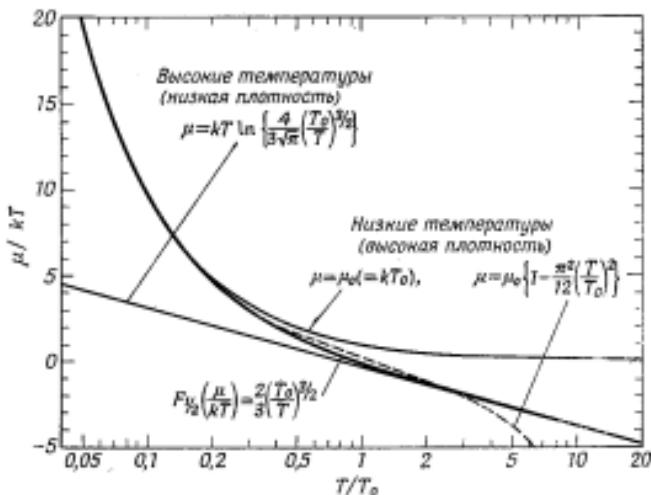
$$F_{1/2}(\beta\mu) = \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{e^{x-\beta\mu} + 1}.$$

Нетрудно показать, что $F_{1/2}(\mu/kT) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow -\infty$, $F_{1/2}(\mu/kT) \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow \infty$, а также, что $F_{1/2}$ является монотонной

¹⁾ См. также прекрасную монографию Чандraseкара [13]. — Прим. ред.

точно возрастающей функцией μ (фиг. 102). Если ввести температуру T_1 с помощью соотношения

$$\frac{2}{3} \left(\frac{T_0}{T_1} \right)^{3/2} = F_{1/2}(0) = \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^x + 1} dx = \\ = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) (1 - 2^{-1/2}) \zeta\left(\frac{3}{2}\right), \quad \zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 2,612,$$



Фиг. 102

то $\mu < 0$ при $T > T_1$. Таким образом, при достаточно высоких температурах мы можем вычислить интегралы, входящие в (1) — (3), используя разложение

$$f(\varepsilon) = \frac{e^{\beta(\mu-\varepsilon)}}{1+e^{\beta(\mu-\varepsilon)}} = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} e^{l\beta(\mu-\varepsilon)},$$

в результате получим

$$E = N \frac{3}{2} \mu_0^{-3/2} (kT)^{3/2} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{e^{l\beta\mu}}{l^{5/2}}, \quad (1')$$

$$M = N \mu_B \frac{3}{4} \mu_0^{-3/2} (kT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{e^{l\beta\mu}}{l^{5/2}} \cdot 2 \sinh(l\beta\mu_B H), \quad (2')$$

$$N = N \frac{3}{2} \mu_0^{-3/2} (kT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{e^{l\beta\mu}}{l^{3/2}}. \quad (3')$$

Учитывая, что

$$\mu_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3},$$

или

$$N \frac{3}{2} \mu_0^{-3/2} (kT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 2 \left(\frac{2\pi mkT}{\hbar^2} \right)^{3/2} V, \quad (4)$$

видим, что первые члены разложений (1'), (2') и (3') соответствуют классическому пределу (невырожденный случай). Будем изучать характер перехода к классическому пределу, рассматривая второй член разложений ($l=2$). Из (3') получим

$$2V \left(\frac{2\pi mkT}{\hbar^2} \right)^{3/2} \left\{ e^{\beta\mu} - \frac{1}{2^{3/2}} e^{2\beta\mu} + \dots \right\} = N. \quad (5)$$

Полагая

$$2 \left(\frac{2\pi mkT}{\hbar^2} \right)^{3/2} \equiv N_c, \\ \eta \equiv \frac{N}{N_c V} = \frac{N}{2V} \frac{\hbar^3}{(2\pi mkT)^{3/2}}, \quad (6)$$

имеем

$$e^{\beta\mu} - 2^{-3/2} e^{2\beta\mu} + \dots = \eta.$$

При высоких температурах ($\eta \ll 1$) можно разрешить это уравнение методом последовательных приближений и получить

$$e^{\beta\mu} = \eta + 2^{-3/2} e^{2\beta\mu} + \dots = \eta + 2^{-3/2} \eta^2 + \dots . \quad (7)$$

Подставляя (7) в разложения (1') и (2'), находим

$$E = \frac{3}{2} N k T \eta^{-1} \{ e^{\beta\mu} - 2^{-3/2} e^{2\beta\mu} + \dots \} = \frac{3}{2} N k T \{ 1 + 2^{-3/2} \eta + \dots \}, \quad (8)$$

$$M = N \mu_B \eta^{-1} \{ e^{\beta\mu} \operatorname{sh}(\beta\mu_B H) - 2^{-3/2} e^{2\beta\mu} \operatorname{sh}(2\beta\mu_B H) + \dots \} = \\ = N \mu_B \{ \operatorname{sh}(\beta\mu_B H) + 2^{-3/2} \eta [\operatorname{sh}(\beta\mu_B H) - \operatorname{sh}(2\beta\mu_B H)] + \dots \}. \quad (9)$$

Для удельной теплоемкости и магнитной восприимчивости получаем теперь выражения

$$C_V = \frac{3}{2} N k \{ 1 - 2^{-3/2} \eta + \dots \}, \quad (10)$$

$$\chi = \frac{N \mu_B^2}{V k T} \{ 1 - 2^{-3/2} \eta + \dots \}. \quad (11)$$

Поправочные члены пропорциональны $(T_0/T)^{3/2}$ и стремятся к нулю с возрастанием температур.

17. Следуя указанию, найдем вырождение l -го уровня. Для простоты будем считать, что рассматриваемая система электронов находится в объеме L^3 . В нулевом магнитном поле ($H = 0$) число энергетических уровней в области $dp_x dp_y$ вблизи p_x, p_y равно

$$\frac{L^2}{\hbar^2} dp_x dp_y. \quad (1)$$

При наличии магнитного поля H , направленного по оси z , эти уровни объединяются в уровни, подобные уровням гармонического осциллятора (фиг. 103). Таким образом, вырождение каждого нового уровня равно

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{\hbar^2} \int \int \int & dp_x dp_y = \\ 2\mu_B H l < \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} < 2\mu_B H(l+1) \\ &= \frac{L^2}{\hbar^2} \int_{2\mu_B H l < \frac{p^2}{2m} < 2\mu_B H(l+1)} 2\pi p dp = \frac{L^2}{\hbar^2} [\pi p^2]_{p^2/2m=2\mu_B H l}^{p^2/2m=2\mu_B H(l+1)} = \\ &= \frac{L^2}{\hbar^2} \pi \cdot 4\mu_B H m = \frac{L^2 e H}{\hbar c}. \end{aligned} \quad (2)$$

Одноэлектронная статистическая сумма Z_1 запишется теперь в виде

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{L}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \sum_{l=0}^{\infty} \frac{L^2 e H}{\hbar c} \exp \left\{ -\beta \left[2\mu_B H \left(l + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_z^2}{2m} \right] \right\} = \\ &= \frac{(2\pi mkT)^{1/2}}{\hbar} L \cdot \frac{L^2 e H}{\hbar c} \frac{e^{-\beta \mu_B H}}{1 - e^{-2\beta \mu_B H}} = \\ &= V \left(\frac{2\pi mkT}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{\mu_B H / kT}{\operatorname{sh}(\mu_B H / kT)} \quad \left(\beta = \frac{1}{kT} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая, что статистическая сумма Z для N электронов равна

$$Z = \frac{Z_1^N}{N!}, \quad (4)$$

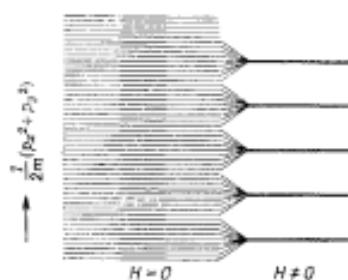
получаем

$$M = kT \frac{\partial \ln Z}{\partial H} = NkT \frac{\partial}{\partial H} \ln \frac{\mu_B H / kT}{\operatorname{sh}(\mu_B H / kT)} = -N\mu_B L \left(\frac{\mu_B H}{kT} \right). \quad (5)$$

Замечание. Уравнения движения для электрона в магнитном поле H , направленном по оси z , имеют вид

$$mv_x' = -\frac{eH}{c} v_y, \quad mv_y' = \frac{eH}{c} v_x, \quad mv_z' = 0.$$

Полагая $eH/mc = \omega_0$, получаем $v_x = -\omega_0 v_y$, $v_y = \omega_0 v_x$. Сравнивая полученные уравнения с каноническими уравнениями движения $\dot{p} = -\omega_0^2 q$, $\dot{q} = p$ для гармонического осциллятора с гамильтонианом $\mathcal{H} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 q^2$, нетрудно видеть, что переменные v_x и v_y являются канонически сопряженными динамическими переменными. Таким образом, движение электрона в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, квантуется, подобно движению гармонического осциллятора, а энергетические уровни имеют вид $\hbar\omega_l$ ($l = 0, 1, 2, \dots$). Вырождение $L^2 eH/hc$ каждого такого уровня можно рассматривать как неопределенность положения центра кругового движения электрона.



Фиг. 103. Уровни, соответствующие движению в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, сливаются в уровни гармонического осциллятора

18. Эта задача по существу объединяет задачи 4 и 17. Энергетические уровни электрона даются формулой

$$E = \frac{1}{2m^*} p_z^2 + 2\mu_B^* H \left(l + \frac{1}{2} \right) \pm \mu_B H.$$

Используя решения задач 4 и 17, можно записать статистическую сумму для случая большевикской статистики в виде

$$Z = \frac{1}{N!} Z_1^N,$$

$$Z_1(\beta) = V \left(\frac{2\pi m^*}{\beta h^2} \right)^{3/2} \frac{\beta \mu_B^* H}{\sinh(\beta \mu_B^* H)} 2 \operatorname{ch}(\beta \mu_B H),$$

так что

$$Z(\beta, H) = Z(\beta, 0) \left[\frac{\beta \mu_B^* H}{\sinh(\beta \mu_B^* H)} \operatorname{ch}(\beta \mu_B H) \right]^N. \quad (1)$$

Теперь

$$M = kT \frac{\partial \ln Z}{\partial H} = N \mu_B \operatorname{th}(\beta \mu_B H) - N \mu_B^* L(\beta \mu_B^* H), \quad (2)$$

так что при $H \rightarrow 0$

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{N \left(\mu_B^* - \frac{1}{3} \mu_B^{*2} \right)}{kT}. \quad (3)$$

19. Мы предполагаем, что система электронов в металле представляет собой идеальный ферми-газ частиц массой m^* . Как указано в замечании к задаче, электрон со скоростью p_z/m^*

может покинуть металл ($\varepsilon > 0$) после поглощения фотона с энергией $h\nu$ в том случае, если его скорость удовлетворяет условию

$$h\nu + \frac{p_z^2}{2m^*} > \chi + \mu,$$

т. е.

$$p_z > \sqrt{2m^*(\chi + \mu - h\nu)} = p_0. \quad (1)$$

Пусть a есть вероятность того, что приближающийся к поверхности со стороны металла электрон с импульсом p_z , удовлетворяющим условию (1), поглотит некоторый фотон. Поток S электронов, обладающих свойством (1), т. е. число падающих на единицу поверхности металла в единицу времени электронов с импульсом p_z , удовлетворяющим условию (1), дается выражением

$$S = \frac{2}{h^3} \int_{p_0}^{\infty} \frac{p_z}{m^*} dp_z \int_{-\infty}^{\infty} dp_x dp_y \left\{ \exp \frac{[(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m^*] - \mu}{kT} + 1 \right\}^{-1}. \quad (2)$$

Это выражение аналогично выражению (1) в задаче 10. Вводя полярные координаты в плоскости $p_x p_y$ и полагая $(p_x^2 + p_y^2)/2m^* kT = u$, можно написать

$$\begin{aligned} S &= \frac{4\pi m^* kT}{h^3} \int_{p_0}^{\infty} dp_z \frac{p_z}{m^*} \int_0^{\infty} du \left\{ \exp \left[u + \frac{(p_z^2/2m^*) - \mu}{kT} \right] + 1 \right\}^{-1} = \\ &= \frac{4\pi m^* kT}{h^3} \int_{p_0}^{\infty} dp_z \frac{p_z}{m^*} \left\{ -\ln \left[1 + \exp \left(-u - \frac{(p_z^2/2m^*) - \mu}{kT} \right) \right] \right\} \Big|_{u=0}^{u=\infty} = \\ &= \frac{4\pi m^* kT}{h^3} \int_{p_0}^{\infty} dp_z \frac{p_z}{m^*} \ln \left\{ 1 + \exp \frac{\mu - (p_z^2/2m^*)}{kT} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Чтобы нижний предел интегрирования стал равным нулю, перейдем к переменной $y = [(p_z^2/2m^*) - \mu - \chi + h\nu]/kT$. Теперь

$$S = \frac{4\pi m^* (kT)^2}{h^3} \int_0^{\infty} dy \ln \left\{ 1 + \exp \left[\frac{h(v - v_0)}{kT} - y \right] \right\} = AT^2 \varphi(\delta). \quad (4)$$

Так I получим, умножив S на заряд электрона — e и введенную выше вероятность a

$$I = -aeS.$$

Найдем теперь разложение функции $\varphi(\delta)$ ($\delta = h(v - v_0)/kT$).

При $\delta \leq 0$ имеем $e^{\delta-y} < 1$ и искомое разложение может быть получено путем почленного интегрирования ряда для \ln :

$$\begin{aligned}\varphi(\delta) &= \int_0^\infty dy \ln(1 + e^{\delta-y}) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{e^{n\delta}}{n} \int_0^\infty e^{-ny} dy = \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} e^{n\delta},\end{aligned}\quad (5)$$

При $\delta > 0$, разбив пределы интегрирования, получим

$$\begin{aligned}\varphi(\delta) &= \left(\int_0^\delta + \int_\delta^\infty \right) dy \ln(1 + e^{\delta-y}) = \\ &= \int_0^\delta dx \ln(1 + e^x) + \int_\delta^\infty dx \ln(1 + e^{-x}) = \\ &= \int_0^\delta dx \{x + \ln(1 + e^{-x})\} + [x \ln(1 + e^{-x})]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{x dx}{e^x + 1}.\end{aligned}\quad (6)$$

Последний интеграл определяет $\varphi(0)$ и равен $\frac{1}{2}\zeta(2) = \pi^2/12$ (см. примечание на стр. 255). Первый интеграл в (6) можно преобразовать следующим образом:

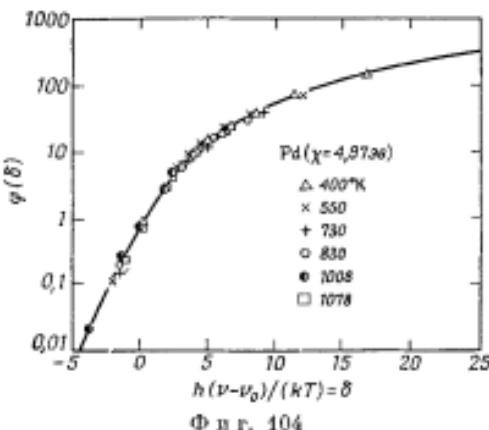
$$\begin{aligned}\int_0^\delta dx \ln(1 + e^{-x}) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n} \int_0^\delta e^{-nx} dx = \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} (1 - e^{-n\delta}) = \varphi(0) - \varphi(-\delta).\end{aligned}\quad (7)$$

Таким образом, получаем окончательно

$$\varphi(\delta) = \frac{1}{2}\delta^2 + 2\varphi(0) - \varphi(-\delta) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\delta^2}{2} - \varphi(-\delta), \quad (8)$$

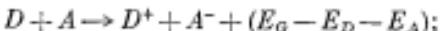
причем для $\varphi(-\delta)$ можно использовать разложение (5). График функции $\varphi(\delta)$ приведен на фиг. 104.

З а м е ч а н и е. Настоящая теория хорошо объясняет явление внешнего фотоэффекта в металлах вблизи пороговой частоты v_0 . Кривая зависимости $\ln(J/AT^2)$ от $h(v - v_0)/kT$ называется диаграммой Фаулера. Используя экспериментальные данные, с помощью этой кривой можно получить значение v_0 , а затем и работу выхода χ .



Ф и г. 104

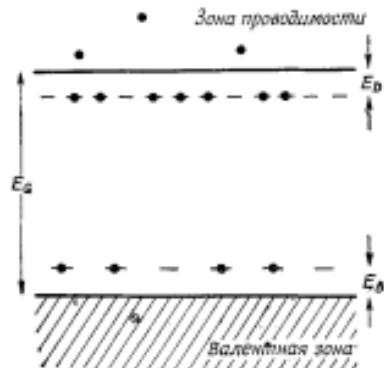
20. 1. При 0° К электронная конфигурация соответствует минимуму энергии. Электроны от доноров переходят на акцепторные уровни до тех пор, пока все акцепторные уровни не будут заполнены. Соответствующая реакция может быть записана в виде



здесь E_G — ширина запрещенной зоны, E_D — разность энергий между дном зоны проводимости и донорным уровнем, а E_A — разность энергий между акцепторным уровнем и краем валентной зоны (фиг. 105). После заполнения всех акцепторных уровней примерно $\frac{1}{10}$ часть донорных уровней окажется пустой, так как $N_D \sim 10N_A$. При таком заполнении уровней энергия Ферми будет соответствовать энергии донорного уровня

$$\mu(0^\circ\text{K}) = \frac{1}{2} E_G - E_D. \quad (1)$$

2. При достаточно высоких температурах электроны могут переходить из валентной зоны в зону проводимости. Когда плотность дырок в валентной зоне и плотность электронов в зоне проводимости станут много больше значений N_D и N_A , можно пренебречь влиянием донорных и акцепторных уровней и считать, что полупроводник обладает собственной проводимостью



Ф и г. 105

стью. В этом случае уровень Ферми лежит в середине запрещенной зоны E_G , так что

$$\mu(\infty) = 0 \quad (2)$$

(см. пример 3).

3. Покажем теперь, что при промежуточных температурах (между $T = 0$ и $T = \infty$) энергия Ферми μ принимает значения между (1) и (2). Пусть n обозначает плотность электронов проводимости, n_D — плотность электронов на донорных уровнях, p_A — плотность дырок на акцепторных уровнях, p — плотность дырок в заполненной зоне. Имеем

$$\begin{aligned} n &= \int_0^{\infty} \frac{D_e(e) de}{\exp \left\{ \left(e + \frac{1}{2} E_G - \mu \right) / kT \right\} + 1} \approx \\ &\approx g_e \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \exp \frac{\mu - E_G/2}{kT} = N_e \exp \frac{\mu - E_G/2}{kT}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$n_D = \frac{N_D}{\frac{1}{2} \exp \left\{ \left(-E_D + \frac{1}{2} E_G - \mu \right) / kT \right\} + 1}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} p &= \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{1}{\exp \left\{ \left(-\frac{1}{2} E_G - e' - \mu \right) / kT \right\} + 1} \right] D_e(e') de' = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{D_e(e') de'}{\exp \left\{ \left(\frac{1}{2} E_G + e' + \mu \right) / kT \right\} + 1} \approx \\ &\approx g_v \left(\frac{2\pi m_h kT}{h^2} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{-(\mu + E_G/2)}{kT} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} p_A &= N_A - \frac{N_A}{\frac{1}{2} \exp \left\{ (-E_G/2 + E_A - \mu) / kT \right\} + 1} = \\ &= \frac{N_A}{1 + 2 \exp \left\{ [(E_G/2) - E_A + \mu] / kT \right\}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Мы предположили здесь, что зона проводимости состоит из g_e отдельных зон и масса электрона в зоне проводимости равна m_e . (Этого приближения достаточно для получения качественных результатов.) Аналогичные предположения сделаны и в отношении валентной зоны. Мы не будем приводить здесь подробного обсуждения вопроса о справедливости этих предположений.

Условие электронейтральности (равенство числа положительных и отрицательных зарядов) может быть записано в виде

$$N_D - n_D + p = N_A - p_A + n, \quad (7)$$

так как $[D^+] = N_D - n_D$ и $[A^-] = N_A - p_A$. Вообще говоря, подставляя выражения (3) — (6) в условие (7), мы получим уравнение четвертого порядка относительно $e^{\mu/kT}$. Здесь, однако, достаточно провести упрощенное рассмотрение. При средних температурах можно пренебречь числом дырок, находящихся на акцепторных уровнях и в валентной зоне. Тогда условие (7) принимает вид

$$n + n_D = N_D - N_A. \quad (8)$$

Полагая

$$\exp \frac{(-E_G/2) + \mu}{kT} = x,$$

получаем

$$N_c x + \frac{2N_D x}{e^{-E_D/kT} + 2x} = N_D - N_A, \quad (9)$$

где $N_c = g_c (0,4)^{3/2} T^{3/2} \cdot 2,37 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$, как следует из соотношения (3). Учитывая, что $E_D/kT = 460/T$, $N_D = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ и $N_A = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, найдем, что соотношение

$$N_c (T_1) \sim 2N_D e^{E_D/kT_1},$$

или

$$N_c (T_1) e^{-E_D/kT_1} \sim 2N_D, \quad (10)$$

выполняется при $T_1 \approx 80^\circ\text{K}$. (Заметим, что $\frac{3}{2} \ln T_1 \approx 460/T_1$.) При $T < T_1$ имеем $N_c \ll 2N_D e^{E_D/kT}$, так что в соответствии с соотношением (4) $n \ll n_D$. Пренебрегая поэтому величиной $N_c x (= n)$ в (9), имеем приближенно

$$\mu = \frac{1}{2} E_G - E_D + kT \ln \frac{N_D - N_A}{2N_D} \quad (T \ll T_1). \quad (11)$$

Учитывая, что $(N_D - N_A)/2N_A \approx \frac{1}{2}$, мы видим, что третье слагаемое в соотношении (11) положительно, так что μ возрастает с температурой. При $T > T_1$ нельзя считать, что n значительно меньше n_D . Полагая теперь

$$N_c \gg 2N_D e^{E_D/kT}, \quad (12)$$

получаем из (9)

$$x \sim \frac{N_D - N_A}{N_c} \sim \frac{N_D}{N_c}, \quad (13)$$

так что

$$\mu = \frac{1}{2} E_G - kT \ln \frac{N_c}{N_D - N_A} \quad (n \sim N_D - N_A).$$

Используя (13), получаем из (12) $2x \ll \exp(-E_D/kT)$; следовательно, в соотношении (9) второе слагаемое в левой части значительно меньше первого. Учитывая, что $N_D - N_A \sim N_D$, легко видеть, что в том случае, когда выполняется условие (12), $x \sim N_D/N_c$ является приближенным решением уравнения (9). Таким образом, энергия μ уменьшается с ростом температуры (при $T > T_1$) и должна иметь максимум в области $T \sim T_1$. Действительно, при $N_D - N_A \sim N_D$ уровень Ферми должен лежать приблизительно посередине между донорным уровнем и дном зоны проводимости, так же как в том случае, когда в полупроводнике имеются только доноры (см. пример 4). В области температур от $T \ll T_1$ до температур, при которых μ достигает максимума, имеем $n < n_D$. Эту область иногда называют переходной областью, так как здесь на донорных уровнях еще находится значительное число электронов. В той области, где выполняются условия (12) и (13), на донорных уровнях уже почти не остается электронов и число n электронов проводимости практически равно постоянному значению $N_D - N_A$. Эта область температур называется областью насыщения. При дальнейшем повышении температуры существенную роль начинает играть возбуждение электронов из валентной зоны. Это — область собственной проводимости. Соответствующую температуру можно оценить, рассматривая полупроводник с собственной проводимостью (см. пример 3) и полагая плотность электронов проводимости равной значению N_D , соответствующему насыщению. Подставляя в выражение (10) примера 3 значение $E_G/2 \sim 0,36$ эВ, имеем

$$n \sim \left(\frac{m_e m_h}{m} \right)^{3/4} \cdot 4,83 \cdot 10^{15} T^{3/2} e^{-4140/T} \text{ см}^{-3}.$$

Если $n \sim 10^{15}$ см⁻³, то $T^{3/2} \exp(-4140/T) \sim 1$, т. е. $3/2 \times 2,3 \lg T \sim 4140/T$ и, следовательно, $T \sim 450^\circ\text{K}$. Итак, изменение μ с температурой можно охарактеризовать следующим образом. При 0°K уровень Ферми совпадает с донорным уровнем. При низких температурах μ возрастает с повышением температуры, а затем, пройдя через максимум при температуре порядка нескольких десятков градусов Кельвина, начинает убывать. При высоких температурах (порядка нескольких сотен градусов Кельвина) μ стремится к значению, соответствующему середине запрещенной зоны. Соответствующая кривая приведена на фиг. 94.

21. Большая статистическая сумма для электронов, находящихся на N_D донорных уровнях, имеет вид

$$\begin{aligned} \Xi = & \{1 + \lambda [e^{(E_D - \mu_B H)/kT} + e^{(E_D + \mu_B H)/kT}]\}^{N_D} = \\ & = \left[1 + 2\lambda e^{E_D/kT} \operatorname{ch} \frac{\mu_B H}{kT} \right]^{N_D}. \end{aligned} \quad (1)$$

Три члена в скобках соответствуют незаполненному состоянию, состоянию, занятому электроном с положительным спином, и состоянию, занятому электроном с отрицательным спином; $\lambda = e^\mu/kT$ — абсолютная активность. Энергия отсчитывается от дна зоны проводимости. Энергия электрона на донорном уровне равна $-E_D + \mu_B H$ или $-E_D - \mu_B H$ в зависимости от того, положителен или отрицателен спин электрона. Из (1) имеем

$$M = kT \frac{\partial \ln \Xi}{\partial H} = N_D \mu_B \frac{2\lambda e^{\frac{E_D}{kT}} \operatorname{sh}(\mu_B H/kT)}{1 + 2\lambda e^{\frac{E_D}{kT}} \operatorname{ch}(\mu_B H/kT)}. \quad (2)$$

Для малых H получаем восприимчивость на единицу объема

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{N_D \mu_B^2}{kT} \frac{1}{\frac{1}{2} e^{-(E_D + \mu)/kT} + 1} = \frac{n_D \mu_B^2}{kT}. \quad (3)$$

Выражение (3) означает, что спины n_D электронов на донорных уровнях ориентируются независимым образом. Это легко понять с точки зрения формулы Ланжевена — Дебая.

другой способ решения

Как в примере 4, мы можем написать

$$F = n_+ (-E_D + \mu_B H) + n_- (-E_D - \mu_B H) - kT \ln \frac{N_D!}{n_+! n_-! (N_D - n_+ - n_-)!}; \quad (4)$$

здесь n_+ и n_- — числа донорных уровней, занятых соответственно положительным и отрицательным спинами. Используя формулу Стирлинга, получаем

$$F = -(n_+ + n_-) E_D + (n_+ - n_-) \mu_B H + kT \left\{ n_+ \ln \frac{n_+}{N_D} + n_- \ln \frac{n_-}{N_D} + (N_D - n_+ - n_-) \ln \frac{N_D - n_+ - n_-}{N_D} \right\}, \quad (5)$$

Имеем далее

$$\frac{\partial F}{\partial n_+} = \frac{\partial F}{\partial n_-} = \mu \quad (\text{энергия Ферми для электронов}) \quad (6)$$

и

$$M = -\left(\frac{\partial F}{\partial H} \right)_{T, n_+, n_-} = -(n_+ - n_-) \mu_B. \quad (7)$$

Из (6) находим теперь

$$\begin{aligned} n_+ &= \frac{\lambda e^{(E_D - \mu_B H)/kT}}{1 + 2\lambda e^{E_D/kT} \operatorname{ch}(\mu_B H/kT)}, \\ n_- &= \frac{\lambda e^{(E_D + \mu_B H)/kT}}{1 + 2\lambda e^{E_D/kT} \operatorname{ch}(\mu_B H/kT)}, \end{aligned} \quad (8)$$

в то время как (7) дает приведенное выше выражение (2).

22. Внутренняя энергия определяется формулой (4.15). Заменим суммирование интегрированием по $\varepsilon = p^2/2m$, имеем

$$E = 2\pi V \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{e^{3/2} d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}, \quad \beta = \frac{1}{kT}.$$

В случае слабого вырождения ($\mu < 0$) мы можем разложить подынтегральную функцию в ряд по $e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$ ($\ll 1$):

$$\begin{aligned} E &= 2\pi V \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{3/2} e^{\beta(\mu-\varepsilon)} d\varepsilon = \\ &= 2\pi V \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} (kT)^{5/2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{5/2}} e^{l\beta\mu} \int_0^\infty x^{3/2} e^{-x} dx = \\ &= \frac{3}{2} kTV \left(\frac{2\pi m kT}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{l\mu/kT}}{l^{5/2}}. \end{aligned}$$

Нетрудно установить, что, как и в задаче 9, $pV = 2/3E$. Разложения для F и S можно получить с помощью соотношений $F = \mu N - pV = \mu N - 2/3E$, $S = (E - F)/T = [5/3E - N\mu]/T$.

23. С учетом весового множителя 2, обусловленного спином, получаем, что число состояний с импульсом, абсолютная величина которого лежит между $p = |\mathbf{p}|$ и $p + dp$, определяется выражением

$$2 \frac{V}{\hbar^3} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi V}{\hbar^3} (mc)^3 \sin^2 \theta \operatorname{ch} \theta d\theta.$$

Полагая $\varepsilon = c(p^2 + m^2c^2)^{1/2} = mc^2 \operatorname{ch} \theta$, получаем из (4.3), (4.2) и (4.4)

$$N = \sum \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} = 8\pi V \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \int_0^\infty \frac{\sin^2 \theta \operatorname{ch} \theta d\theta}{\exp\{\beta(mc^2 \operatorname{ch} \theta - \mu)\} + 1}, \quad (1)$$

$$E = \sum \frac{e}{e^{\beta(e-\mu)} + 1} = 8\pi V \frac{m^4 c^5}{\hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sinh^2 \theta \cosh^2 \theta d\theta}{\exp \{\beta (mc^2 \cosh \theta - \mu)\} + 1}, \quad (2)$$

$$pV = N\mu - F = kT \sum \ln (1 + e^{-\beta(e-\mu)}),$$

или

$$\begin{aligned} p &= 8\pi \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \int_0^\infty \frac{1}{\beta} \sinh^2 \theta \cosh \theta d\theta \ln \{ 1 + \exp [-\beta (mc^2 \cosh \theta - \mu)] \} = \\ &= \frac{8\pi}{3} \frac{m^4 c^5}{\hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sinh^4 \theta d\theta}{\exp \{\beta (mc^2 \cosh \theta - \mu)\} + 1}. \end{aligned} \quad (3)$$

При $T = 0^\circ \text{К}$ ($\beta \rightarrow \infty$) функция распределения Ферми становится ступенчатой функцией. Следовательно, полагая

$$\mu_0 = mc^2 \cosh \theta_0, \quad (4)$$

находим

$$\frac{N}{V} = 8\pi \frac{m^3 c^3}{\hbar^3} \int_0^{\theta_0} \sinh^2 \theta \cosh \theta d\theta = \frac{8\pi}{3} \frac{m^3 c^3}{\hbar^3} \sinh^3 \theta_0, \quad (5)$$

$$\frac{E}{V} = 8\pi \frac{m^4 c^5}{\hbar^3} \int_0^{\theta_0} \sinh^2 \theta \cosh^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} \frac{m^4 c^5}{\hbar^3} (\sinh (4\theta_0) - 4\theta_0), \quad (6)$$

$$P = \frac{8\pi}{3} \frac{m^4 c^5}{\hbar^3} \int_0^{\theta_0} \sinh^4 \theta d\theta = \frac{\pi}{3} \frac{m^4 c^5}{\hbar^3} \left\{ \frac{1}{4} \sinh (4\theta_0) - 2 \sinh (2\theta_0) + 3\theta_0 \right\}. \quad (7)$$

Вводя предельный импульс Ферми p_0 , так что $|p_0| = p_0 = mc \sinh \theta_0$, имеем из (5)

$$\frac{N}{V} = \frac{8\pi}{3} \frac{p_0^3}{\hbar^3}. \quad (8)$$

Как легко видеть, соотношения (5) и (8) определяют химический потенциал μ_0 (или θ_0) как функцию от N/V .

24. Для полностью вырожденной системы воспользуемся формулами (5) — (7) предыдущей задачи. Полагая в соответствии с (5)

$$\frac{\hbar}{mc} \left(\frac{3\pi}{8\pi} \right)^{1/3} = \sinh \theta_0,$$

мы можем исследовать различные случаи: $\sinh \theta_0 \ll 1$ и $\sinh \theta_0 \gg 1$ или соответственно $p_0 \ll mc$ и $p_0 \gg mc$. Для случая $p_0 \ll mc$

используем выражение для энергии в нерелятивистском приближении, $\epsilon = mc^2 + p^2/2m$. Теперь требуемый результат получается непосредственно с помощью формул из примеров 1 и 2. Мы можем получить их также, используя разложения

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(4\theta_0) - 4\theta_0 &= \frac{1}{3!} (4\theta_0)^3 + \frac{1}{5!} (4\theta_0)^5 + \dots \approx \\ &\approx \frac{32}{3} \left(\frac{p_0}{mc} \right)^3 \left\{ 1 + \frac{3}{10} \left(\frac{p_0}{mc} \right)^2 \right\}, \\ \frac{1}{4} \operatorname{sh}(4\theta_0) - 2\operatorname{sh}(2\theta_0) + 3\theta_0 &= \\ &= \frac{1}{4 \cdot 5!} (4\theta_0)^5 - \frac{2}{5!} (2\theta_0)^5 + \dots \approx \frac{8}{5} \left(\frac{p_0}{mc} \right)^5. \end{aligned}$$

В случае $p_0 \gg mc$ используем ультрарелятивистское выражение для энергии $\epsilon = cp$. Полагая $p_0 \sim 1/2mc \exp \theta_0$ ($\theta_0 \gg 1$), мы можем считать теперь приближенно в формулах (6) и (7) предыдущей задачи

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(4\theta_0) - 4\theta_0 &\approx \frac{1}{2} e^{4\theta_0} = 8 \left(\frac{p_0}{mc} \right)^4, \\ \frac{1}{4} \operatorname{sh}(4\theta_0) - 2\operatorname{sh}(2\theta_0) + 3\theta_0 &\approx \frac{1}{8} e^{4\theta_0} = 2 \left(\frac{p_0}{mc} \right)^4. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Обсудим теперь соотношение между давлением и кинетической энергией. В случае газа, содержащегося в сосуде объемом V , величина импульса p частицы в допустимом квантовом состоянии пропорциональна $V^{-1/3}$. Следовательно, в нерелятивистском случае, когда $\epsilon = mc^2 + p^2/2m$, кинетическая энергия K пропорциональна $V^{-2/3}$ (член mc^2 можно не принимать во внимание). Таким образом, используя соотношение $p = -(\partial E/\partial V)_S$, получаем $p = 2K/3V$. В ультрарелятивистском случае $\epsilon = cp$, т. е. энергия пропорциональна $V^{-1/3}$, и мы имеем $p = E/3V = K/3V$.

25. Полагая $\epsilon = cp$ (см. решение задачи 24), находим из (4.2) и (4.3)

$$\frac{N}{V} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} = \frac{8\pi}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}, \quad (1)$$

$$\frac{E}{V} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon p^2 dp}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} = \frac{8\pi}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}. \quad (2)$$

В случае сильного вырождения будем использовать формулу (4.6а). Полагая $g(\epsilon) = \epsilon^s$, находим

$$\int_0^\infty \epsilon^s f(\epsilon) d\epsilon = \frac{\mu^{s+1}}{s+1} + \frac{(\pi kT)^2}{6} s \mu^{s-1} + \frac{7(\pi kT)^4}{360} s(s-1)(s-2) \mu^{s-3} + \dots \quad (3)$$

Для случаев $s=2$ и $s=3$ имеем

$$\frac{N}{V} = \frac{8\pi\mu^3}{3h^3c^3} \left\{ 1 + \left(\frac{\pi kT}{\mu} \right)^2 \right\}, \quad (4)$$

$$\frac{E}{V} = \frac{2\pi\mu^4}{h^3c^3} \left\{ 1 + 2 \left(\frac{\pi kT}{\mu} \right)^2 + \frac{7}{45} \left(\frac{\pi kT}{\mu} \right)^4 \right\}. \quad (5)$$

Из (4) находим

$$\mu = \mu_0 \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi kT}{\mu_0} \right)^2 + \dots \right\}, \quad \mu_0 = hc \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{1/3} \quad \left(n = \frac{N}{V} \right). \quad (6)$$

Подставляя это значение μ в (5), получаем

$$\frac{E}{V} = \frac{2\pi\mu_0^4}{h^3c^3} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \left(\frac{\pi kT}{\mu_0} \right)^2 + \dots \right\},$$

так что

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{4} \mu_0 \left\{ 1 + \frac{2}{3} \left(\frac{\pi kT}{\mu_0} \right)^2 + \dots \right\} \quad (7)$$

и, следовательно, теплоемкость при постоянном объеме C_V определяется выражением

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{V, N} = Nk \frac{\pi^2 k^2 T}{\mu_0} + \dots = N \frac{2\pi^{7/3} k^2 T}{3^{1/3} h c n^{1/3}} + \dots \quad (8)$$

Если ограничиться здесь только первым членом, то зависимость C_V от температуры имеет такой же характер, как и в нерелятивистском случае; однако теперь коэффициент умножается на

$$\frac{(3n)^{1/3}}{2\pi} \frac{h}{mc},$$

т. е. имеет значительно большую величину. Мы предлагаем читателю вычислить самостоятельно теплоемкость при постоянном давлении.

З а м е ч а н и е. С системами релятивистских фермионов, рассмотренными выше, мы сталкиваемся при изучении строения звезд, состоящих из частиц высоких энергий.

26. Используем метод решения, приведенный в примере 5. Энергия частицы равна сумме кинетической энергии $e_p = p^2/2m$ и энергии внутреннего уровня $e_1 (= 0, e_1)$. В соответствии с выражением (1) примера 5 напишем

$$N = \sum_j \sum_p \frac{1}{e^{\beta(e_p + e_1 - \mu)} - 1} = \sum_p \frac{1}{e^{\beta(e_p - \mu)} - 1} + \sum_p \frac{1}{e^{\beta(e_p + e_1 - \mu)} - 1}. \quad (1)$$

При температурах, лежащих выше температур бозе-Эйнштейновской конденсации, мы можем заменить сумму по e_p интегралом, так что

$$N' = V \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \{ F_{3/2}(-\beta\mu) + F_{3/2}(-\beta(\mu - e_1)) \}. \quad (2)$$

Функция $F_{3/2}(x)$ определена соотношением (3) примера 5. При $\mu = 0$ частицы, находящиеся в состоянии, характеризуемом внутренней энергией $e_0 = 0$, будут собираться на уровне, соответствующем нулевой кинетической энергии ($p = 0$). Частицы же, находящиеся в состоянии с внутренней энергией e_1 , не будут участвовать в этой конденсации. Температура конденсации T_c определяется условием $N' = N$. При $T < T_c$ величина N' станет меньше N , а оставшиеся $N - N'$ частиц конденсируются на нижнем уровне

$$\frac{N'}{V} = \left(\frac{2\pi mkT_c}{h^2} \right)^{3/2} \{ F_{3/2}(0) + F_{3/2}\left(\frac{e_1}{kT_c}\right) \}. \quad (3)$$

Используя соотношение (4) примера 5, находим

$$F_{3/2}(\beta e_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\beta e_1}}{n^{3/2}}.$$

При $e_1 \rightarrow \infty$ [$F_{3/2}(\beta e_1) \ll 1$] получаем теперь из (3) уравнение для определения T_c^0 :

$$2,612 \left(\frac{2\pi mkT_c^0}{h^2} \right)^{3/2} = \frac{N}{V}, \quad (4)$$

так что

$$\left(\frac{T_c^0}{T_c} \right)^{3/2} = 1 + \frac{1}{2,612} (e^{-e_1/kT_c} + \dots). \quad (5)$$

Полагая $e^{-e_1/kT_c} \ll 1$, имеем

$$T_c = T_c^0 \left\{ 1 - \frac{2}{3} \frac{1}{2,612} e^{-e_1/kT_c} + \dots \right\} \approx \\ \approx T_c^0 \{ 1 - 0,255 e^{-e_1/kT_c^0} + \dots \}.$$

Как и следовало ожидать, критическая температура T_c лежит ниже, чем T_c^0 .

27. В случае слабого вырождения химический потенциал μ отрицателен для бозе-газа и положителен для ферми-газа. В этом случае мы можем вычислить

$$\begin{aligned} pV &= kT \ln \Xi, \\ N &= kT \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \mu}, \\ \Xi &= \prod_i (1 \mp e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)})^{\mp 1} \end{aligned}$$

с помощью разложения по степеням $e^{\beta(\mu - \varepsilon)}$ (< 1). (Здесь и в дальнейшем верхний знак относится к статистике Бозе, а нижний — к статистике Ферми.) Имеем

$$pV = \mp kT \sum_i \ln \{1 \mp e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}\} = kT \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n-1} \frac{\lambda^n}{n} C_n, \quad (1)$$

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n-1} \lambda^n C_n, \quad (2)$$

$$C_n = \sum_i e^{-n\beta\varepsilon_i} = 2\pi gV \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} e^{1/2} e^{-n\beta\varepsilon} d\varepsilon = \frac{gV}{\lambda_T^3} \frac{1}{n^{3/2}}, \quad (3)$$

где g — статистический вес, соответствующий внутренним степеням свободы, а $\lambda_T = h/(2\pi mkT)^{1/2}$. Подставляя (3) в (2), получаем

$$N = \frac{gV}{\lambda_T^3} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n-1} \frac{\lambda^n}{n^{3/2}}. \quad (2')$$

Будем искать λ в виде ряда по степеням $x = N\lambda_T^3/gV$

$$\lambda = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots; \quad (4)$$

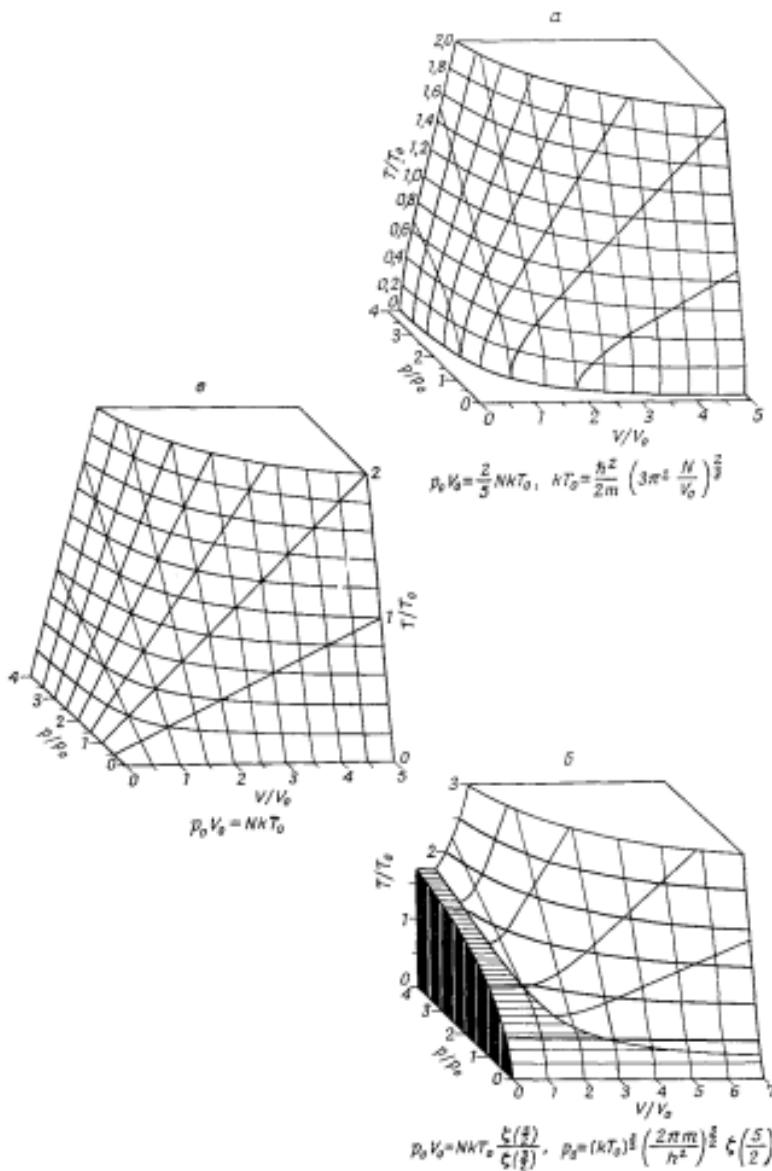
из (2') находим: $a_1 = 1$; $a_2 = \mp (1/2)^{3/2}$; $a_3 = 1/4 - (1/3)^{3/2}$,

Подставляя полученную таким образом величину λ в (1), имеем

$$\begin{aligned} pV &= V k T \left[1 \mp \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda_T^3 N}{gV} + \left(\frac{1}{8} - \frac{2}{3^{5/2}} \right) \left(\frac{\lambda_T^3 N}{gV} \right)^2 \mp \dots \right] = \\ &= N k T \left[1 \mp 2^{-5/2} \frac{n}{n_c} + \left(\frac{1}{8} - \frac{2}{3^{5/2}} \right) \left(\frac{n}{n_c} \right)^2 \mp \dots \right]. \quad (5) \end{aligned}$$

Здесь использовано обозначение $n_c = g(2\pi mkT/\hbar^2)^{3/2}$.

Замечание. На фиг. 106 приведены поверхности, соответствующие уравнениям состояния квантовых газов.



Фиг. 106. Поверхность уравнения состояния для идеального газа Ферми — Дирака (а), идеального газа Бозе — Эйнштейна (б) и идеального классического газа (с)

28. Полная волновая функция системы N фермионов, находящихся в состояниях с волновыми векторами $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_N$, имеет вид

$$\Psi_{k_1, \dots, k_N}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{V^{N!} V^N} \sum_P (-1)^P \exp \left(i \sum_{j=1}^N \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}_{Pj} \right). \quad (1)$$

Здесь P обозначает операцию перестановки частиц, которые мы пронумеровали числами $(1, 2, \dots, N)$. При этом j переходит в P_j . Символ \sum_P обозначает суммирование по всем перестановкам, а величина $(-1)^P$ равна $+1$ или -1 в зависимости от того, является ли перестановка четной или нечетной. Матричный элемент матрицы плотности для канонического ансамбля запишем в виде

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \rho | \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N \rangle &= \\ &= \frac{1}{Z} \sum'_{k_1, \dots, k_N} \exp \left(-\frac{\hbar^2}{2mkT} \sum_{j=1}^N \mathbf{k}_j^2 \right) \Psi_{k_1, \dots, k_N}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \times \\ &\quad \times \Psi_{k'_1, \dots, k'_N}^*(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N); \end{aligned} \quad (2)$$

здесь Z — статистическая сумма, а суммирование распространено на все возможные различные квантовые состояния. Состояние $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_N)$ и состояние, получаемое из него перестановкой \mathbf{k}_j , следует рассматривать как тождественные. Это ограничение, налагаемое на сумму в (2), можно учесть с помощью множителя $1/N!$. Подставляя (1) в (2), получаем теперь

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \rho | \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N \rangle &= \\ &= \frac{1}{Z(N!)^2 V^N} \sum_P \sum_{P'} (-1)^P (-1)^{P'} \times \\ &\quad \times \sum_{k_1, \dots, k_N} \exp \left(-\frac{\hbar^2}{2mkT} \sum_{j=1}^N \mathbf{k}_j^2 \right) \exp \left\{ i \sum_{j=1}^N \mathbf{k}_j \cdot (\mathbf{r}_{Pj} - \mathbf{r}'_{P'j}) \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

При достаточно большом объеме V суммирование по \mathbf{k} можно заменить интегрированием

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \exp \left\{ -\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2mkT} + i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_{Pj} - \mathbf{r}'_{P'j}) \right\} &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2mkT} + i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_{Pj} - \mathbf{r}'_{P'j}) \right\} dk_x dk_y dk_z = \\ &= \frac{1}{\lambda_T^3} \exp \left(-\frac{\pi}{\lambda_T^2} |\mathbf{r}_{Pj} - \mathbf{r}'_{P'j}|^2 \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\lambda_T = 2\pi\hbar/\sqrt{2\pi mkT}$. Представляя перестановку P' в виде двух последовательных перестановок P и Q , мы можем заменить суммирование по P' суммированием по Q . Учитывая, что $(-1)^{P'} = (-1)^P(-1)^Q$, получаем

$$\langle \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \rho | \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N \rangle = \\ = \frac{1}{Z(N!)^2 \lambda_T^{3N}} \sum_P \sum_Q (-1)^Q \exp \left(-\frac{\pi}{\lambda_T^2} \sum_{Pj} |\mathbf{r}_{Pj} - \mathbf{r}'_{PQj}|^2 \right). \quad (5)$$

Сумму по Pj в экспоненте, распространяющуюся на все значения j , мы можем заменить суммированием по j , так что экспоненциальный множитель становится не зависящим от P :

$$\langle \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \rho | \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N \rangle = \\ = \frac{1}{Z(N!)^2 \lambda_T^{3N}} \sum_Q (-1)^Q \exp \left(-\frac{\pi}{\lambda_T^2} \sum_{j=1}^N |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_{Qj}|^2 \right). \quad (6)$$

Статистическую сумму $Z (= \text{Sp } \rho)$ можно записать в виде

$$Z = \frac{1}{N!} \sum_Q (-1)^Q \frac{1}{\lambda_T^{3N}} \int \dots \int_V \exp \left(-\frac{\pi}{\lambda_T^2} \sum_{j=1}^N |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_{Qj}|^2 \right) \times \\ \times d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N. \quad (7)$$

Набор чисел ($Q1, Q2, \dots, QN$) мы разобьем на подгруппы, соответствующие разбиению перестановки Q на циклические перестановки. Видим далее, что экспонента в (7) связывает лишь числа, принадлежащие одной определенной подгруппе. Числа из разных подгрупп оказываются несвязанными. Например, в случае перестановки

$$P \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 3, & 1, & 2, & 5, & 4 \end{pmatrix}$$

мы имеем подгруппу (1, 2, 3), связанную членом $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^2 + |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^2 + |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2$, и подгруппу (4, 5), связанную членом $|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_5|^2 + |\mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_4|^2$. Каждая подгруппа из l членов дает вклад в интеграл (7), равный множителю

$$J_l = \frac{1}{\lambda_T^{3l}} \int \dots \int_V \exp \left\{ -\frac{\pi}{\lambda_T^2} (|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^2 + |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^2 + \dots + \right. \\ \left. + |\mathbf{r}_{l-1} - \mathbf{r}_l|^2 + |\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_1|^2) \right\} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_l. \quad (8)$$

Если вместо последней переменной \mathbf{r}_1 ввести новую переменную \mathbf{r}'_1 , то интеграл в (8) можно рассматривать как свертку для преобразования Гаусса. При достаточно больших $V (\gg \lambda_T^2)$ мы можем

распространить пределы интегрирования до бесконечности и использовать следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x-y)^2/a}}{\sqrt{a\pi}} \frac{e^{-(y-z)^2/b}}{\sqrt{b\pi}} dy = \frac{e^{-(x-z)^2/(a+b)}}{\sqrt{(a+b)\pi}} \quad (a, b > 0). \quad (9)$$

Считая затем $r_1 = r'_1$, получаем

$$J_1 = \frac{V}{\lambda_T^3 t^{3/2}} \quad (V \gg \lambda_T^3). \quad (10)$$

Пусть перестановка Q разбивается на подгруппы по N_l подгрупп из l чисел. Тогда

$$N = \sum_{l=1}^N l N_l. \quad (11)$$

Каждому Q соответствует определенный набор чисел (N_1, N_2, \dots) . Теперь можем записать (7) в виде

$$Z = \frac{1}{N!} \sum_Q (-1)^Q \prod_l J_l^{N_l} = \frac{1}{N!} \sum_Q (-1)^Q \prod_l \left(\frac{V}{\lambda_T^3 t^{3/2}} \right)^{N_l}. \quad (12)$$

Заданный набор (N_1, N_2, \dots) не определяет Q однозначным образом. Число всех возможных способов разбиения N элементов на группы, при котором имеется N_1 групп по 1 элементу, N_2 групп по 2 элемента, \dots , N_l групп по l элементов, равно $N! / \prod_l (l!)^{N_l} N_l!$ Учитывая порядок элементов в каждой подгруппе, получаем, что

$$\frac{N!}{\prod_l (l^{N_l} N_l!)}$$

перестановок дают один и тот же вклад в выражение (12), равный

$$\prod_l \left(\frac{V}{\lambda_T^3 t^{3/2}} \right)^{N_l}.$$

Каждая перестановка Q может быть представлена в виде последовательных перестановок двух чисел. Циклическую перестановку l чисел можно представить как $l - 1$ перестановку двух чисел.

Имеем поэтому $(-1)^Q = (-1)^{\sum_l (l-1) N_l}$. Теперь (12) приобретает вид

$$Z' = \sum'_{(N_1, N_2, \dots)} \prod_{l=1}^N \frac{1}{N_l!} \left\{ \frac{(-1)^{l-1} V}{l^{3/2} \lambda_T^3} \right\}^{N_l}, \quad (13)$$

причем суммирование производится по всем возможным наборам (N_1, N_2, \dots) .

Замечание 1. Чтобы проверить справедливость формулы (13), вычислим с ее помощью большую статистическую сумму

$$\begin{aligned} & \sum_{N=0}^{\infty} e^{\mu N / kT} \sum'_{(N_1, N_2, \dots)} \prod_{l=1}^N \frac{1}{N_l!} \left\{ \frac{(-1)^{l-1} V}{l^{5/2} \lambda_T^3} \right\}^{N_l} = \\ & = \prod_{l=1}^{\infty} \sum_{N_l=0}^{\infty} \frac{1}{N_l!} \left\{ \frac{(-1)^{l-1} V}{l^{5/2} \lambda_T^3} e^{\mu l / kT} \right\}^{N_l} = \\ & = \exp \left\{ \frac{V}{\lambda_T^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l^{5/2}} e^{\mu l / kT} \right\} = \\ & = \exp \left\{ \sum_k \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} [e^{(\mu - \varepsilon_k) / kT}]^l \right\} = \\ & = \exp \sum_k \ln \{1 + e^{(\mu - \varepsilon_k) / kT}\} = \prod_k \{1 + e^{(\mu - \varepsilon_k) / kT}\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь мы использовали формулы (8) и (10) для $\sum e^{-\beta \varepsilon_k}$.

Замечание 2. В случае идеального бозе-газа в формуле (6) не содержится множитель $(-1)^Q$, а в формуле (13) соответственно — множитель $(-1)^{l-1}$.

29. Энергетические уровни и кратности их вырождения приведены в решении задачи 17. В соответствии с (4.4) свободная энергия Гельмгольца (с учетом потенциальной энергии в магнитном поле) для системы электронов имеет вид

$$\begin{aligned} F = N\mu - kT \frac{4\pi V m \mu_B H}{h^3} \times \\ \times \sum_{l=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left\{ 1 + \exp \frac{\mu - 2\mu_B H \left(l + \frac{1}{2} \right) - p_z^2 / 2m}{kT} \right\} dp_z. \end{aligned} \quad (1)$$

В случае $\mu_B H \ll kT$ значение подынтегральной функции очень мало меняется при замене l на $l+1$, поэтому можно использовать формулу Эйлера; тогда

$$\begin{aligned} F \approx N\mu - \frac{4\pi m V}{h^3} \mu_B H kT \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \ln \left\{ 1 + \exp \frac{\mu - 2\mu_B H x - p_z^2 / 2m}{kT} \right\} + \\ + \frac{\pi m V}{3h^3} (\mu_B H)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{1 + \exp \{[p_z^2 / 2m - \mu] / kT\}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Переходя в первом интеграле к переменным p_z с помощью соотношения $\varepsilon = 2\mu_B H x + p_z^2/2m$, интегрируя по p_z и полагая во втором интеграле $p_z^2/2m = \varepsilon$, получаем

$$F \approx N\mu - \frac{2\pi(2m)^{3/2}}{h^3} kTV \int_0^\infty \ln \{e^{(\mu-\varepsilon)/kT} + 1\} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon + \\ + \frac{\pi(2m)^{3/2}}{6h^3} (\mu_B H)^2 V \int_0^\infty \frac{e^{-1/2} d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} + 1}. \quad (3)$$

Здесь первые два члена дают выражение для свободной энергии в нулевом магнитном поле с заменой, однако, величины μ_0 химическим потенциалом для $H \neq 0$. Третий член представляет собой поправку первого порядка, обусловленную квантованием уровней по Ландау. Учитывая, что $(\partial F/\partial\mu)_{T,V,N} = 0$, получаем восприимчивость при заданном N :

$$\chi = -\frac{1}{VH} \left(\frac{\partial F}{\partial H} \right)_{T,V,N,\mu}. \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что вклад в χ дает только третий член выражения для F . При $\mu \gg kT$ получаем с точностью до членов первого порядка по kT/μ :

$$\chi \approx -\frac{2\pi(2m)^{3/2}}{3h^3} \mu_B^2. \quad (5)$$

Заменяя μ на μ_0 и учитывая множитель 2, обусловленный спином, получаем, что выражение (5) для восприимчивости отличается лишь множителем $-1/3$ от найденного в задаче 4. Знак «минус» означает, что мы имеем дело с диамагнетизмом.

З а м е ч а н и е. Подробные вычисления с помощью формулы суммирования Эйлера приведены в статье Дингла [7]. Формула (5) (с учетом спинового множителя 2) была впервые выведена Ландау.

30. Из (4.4') путем повторного интегрирования по частям находим

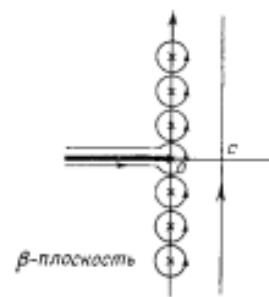
$$F - N\mu = \int_0^\infty \Omega_1(\varepsilon) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} d\varepsilon, \\ \Omega_1(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Z(\beta) \frac{e^{\beta\varepsilon}}{\beta^2} d\beta. \quad (1)$$

Теперь интегрирование по энергии можно провести следующим образом. Используя выражение (3) в решении задачи 17, запишем

$$\Omega_1(\varepsilon) = V \frac{(2\pi m)^{3/2} \mu_B H}{\hbar^3} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{\beta\varepsilon} d\beta}{\beta^{5/2} \operatorname{sh}(\beta \mu_B H)}. \quad (2)$$

Подынтегральная функция имеет точку ветвления при $\beta = 0$ и полюса первого порядка в точках $\beta = il\pi/\mu_B H$ ($l = \pm 1, \pm 2, \dots$).

Разрез выбираем вдоль отрицательной действительной полусоси. Контур интегрирования можно деформировать так, чтобы он состоял из окружностей, проведенных около полюсов, и обходил линию разреза, как показано на фиг. 107. Интеграл по контуру вокруг линии разреза дает медленно меняющуюся функцию от ε , так что мы можем его не рассматривать. Интегралы по окружностям вокруг полюсов, определяемые вычетами в полюсах, дают осциллирующую функцию от ε . Полагая $\beta \mu_B H = il\pi + z$, имеем



Фиг. 107

$$\Omega_1^{\text{осци}}(\varepsilon) = V \frac{(2\pi m)^{3/2} (\mu_B H)^{5/2}}{\hbar^3} \sum_{l=\pm 1, \pm 2, \dots} \frac{(-1)^l}{2\pi i} \oint \frac{e^{il\pi\varepsilon/\mu_B H} e^{\beta\varepsilon} \operatorname{sh} z}{(il\pi + z)^{5/2} \operatorname{sh} z} dz. \quad (3)$$

Поскольку интегрирование по z проводится по контуру, лежащему вблизи $z=0$, мы положим $\operatorname{sh} z \approx z$ и $z=0$ в остальных сомножителях, так что

$$\begin{aligned} \Omega_1^{\text{осци}}(\varepsilon) &= V \frac{(2\pi m)^{3/2} (\mu_B H)^{5/2}}{\hbar^3} \sum_{l=\pm 1, \pm 2, \dots} \frac{(-1)^l}{(il\pi)^{5/2}} e^{il\pi\varepsilon/\mu_B H} = \\ &= -V \frac{(2\pi m)^{3/2}}{\hbar^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\mu_B H)^{5/2}}{(\pi l)^{5/2}} (-1)^l 2 \cos \left(\frac{l\pi\varepsilon}{\mu_B H} - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя это выражение в (1), можем выполнить теперь интегрирование по ε . Заметим далее, что производная $d\beta/d\varepsilon$ существенно отлична от нуля лишь в области ширины kT вблизи $\varepsilon = \mu$. Каждый член в (4) испытывает осцилляции с частотой $\mu_B H/l$. Если $\mu_B H \ll kT$, интегрирование осциллирующей функции по области ширины порядка kT даст весьма малую величину. Если же $kT < \mu_B H$, то значение интеграла становится существенным, и мы имеем эффект де-Гааза — ван Альфена. Наиболее осторожно следует вычислять интеграл при $kT \sim \mu_B H$.

Имеем

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \int_0^\infty \cos \left(\frac{l\pi\mu}{\mu_B H} - \frac{\pi}{4} \right) \frac{\partial f}{\partial z} dz = \\
 &= -\operatorname{Re} \left\{ e^{(l\pi\mu/\mu_B H) - i\pi/4} \frac{2}{kT} \int_0^\infty \frac{e^{i(l\pi(\varepsilon-\mu)/\mu_B H)}}{[e^{(\varepsilon-\mu)/2kT} + e^{-(\varepsilon-\mu)/2kT}]^2} d\varepsilon \right\} = \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ e^{(l\pi\mu/\mu_B H) - i\pi/4} \int_{-\mu/2kT}^\infty \frac{e^{2\pi ikTz/\mu_B H}}{\operatorname{ch}^2 z} dz \right\}. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Нижний предел интегрирования мы можем заменить на $-\infty$, так как во всяком случае $\mu \gg kT$. Теперь можно замкнуть контур интегрирования полуокружностью в верхней полуплоскости и вычислить интеграл, взяв вычеты в полюсах второго порядка $z = i(n + 1/2)\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Вводя новую переменную $y = z - i(n + 1/2)\pi$ и полагая $\operatorname{ch} z = i(-1)^n \operatorname{sh} y$, получаем

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2\pi ikTz/\mu_B H}}{\operatorname{ch}^2 z} dz &= - \sum_{n=0}^\infty e^{-\pi^2 lkT(2n+1)/\mu_B H} \int_0^\infty \frac{e^{2\pi ikTy/\mu_B H}}{\operatorname{sh}^2 y} dy = \\
 &= \frac{2\pi^2 lkT/\mu_B H}{\operatorname{sh} \{\pi^2 lkT/\mu_B H\}}, \quad (6)
 \end{aligned}$$

так что

$$I = -\frac{2\pi^2 lkT/\mu_B H}{\operatorname{sh} \{\pi^2 lkT/\mu_B H\}} \cos \left(\frac{l\pi\mu}{\mu_B H} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (7)$$

Теперь из (4) и (1) имеем

$$\begin{aligned}
 F_{\text{осн}} - N\mu &= V \frac{(2\pi m)^{5/2}}{\hbar^3} \frac{2kT}{\sqrt{\pi}} (\mu_B H)^{3/2} \times \\
 &\times \sum_{l=1}^\infty \frac{(-1)^l}{l^{5/2}} \frac{\cos \left\{ (l\pi\mu/\mu_B H) - \frac{1}{4}\pi \right\}}{\operatorname{sh} \{\pi^2 lkT/\mu_B H\}}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Таким образом, вклад, вносимый в восприимчивость осциллирующим членом, оказывается равным

$$\begin{aligned}
 \chi_{\text{осн}} &= -\frac{1}{VH} \left(\frac{\partial F_{\text{осн}}}{\partial H} \right)_{T, V, N, \mu} \approx \mu_B^2 \frac{(2\pi m\mu)^{5/2}}{\hbar^3} \frac{2\sqrt{\pi} kT}{(\mu_B H)^2} \left(\frac{\mu_B H}{\mu} \right)^{1/2} \times \\
 &\times \sum_{l=1}^\infty \frac{(-1)^l}{l^{5/2}} \frac{\sin \{ (l\pi\mu/\mu_B H) - \pi/4 \}}{\operatorname{sh} \{\pi^2 lkT/\mu_B H\}}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Здесь мы пренебрегли членами более высокого порядка по $\mu_B H / kT$ и μ / kT .

Замечание. Если взять плотность электронов n в виде

$$n \approx 4\pi \frac{(2m\mu)^{3/2}}{3h^3}$$

(без учета спинового весового множителя), то первый член ($l = 1$) выражения (9) дает

$$\chi_{\text{осц}} \approx -\frac{n\mu_B^2}{kT} \frac{3\pi}{2} \left(\frac{kT}{\mu_B H} \right)^2 \left(\frac{\mu_B H}{\mu} \right)^{1/2} \frac{\sin[(\pi\mu/\mu_B H) - \pi/4]}{\operatorname{sh}(\pi^2 kT/\mu_B H)} \quad (10)$$

Мы видим, таким образом, что функция $\chi_{\text{осц}}/[H^{3/2} \operatorname{sh}(\pi^2 kT/\mu_B H)]$ является периодической функцией от $1/H$ с периодом $2\mu_B/\mu$. Условие $kT < \mu_B H$, необходимое для появления этого члена, означает также, что величина $\operatorname{sh}(\pi^2 kT/\mu_B H)$ является малой. Условию $\mu_B H = \pi^2 kT$ соответствует магнитное поле (в эрстедах) $H = 1,469 \cdot 10^5 T$ (T — в градусах Кельвина). Это значит, что наблюдать эффект весьма затруднительно, за исключением случая низких температур. Вследствие наличия множителя $(\mu_B H/\mu)^{1/2}$ в выражении (10) величина $\chi_{\text{осц}}$ мала по сравнению с постоянным членом, вычисленным в задаче 29, так что экспериментальное наблюдение $\chi_{\text{осц}}$ требует большой точности.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Lorentz H. A., Theory of Electrons, Leipzig, 1909. (Имеется перевод: Г. А. Лоренц, Теория электронов, Л.—М., 1934.)
2. Sommerfeld A., Bethe H., Elektronentheorie der Metalle, в книге Handbuch der Physik, Bd. 24/2, Berlin, 1933. (Имеется перевод: Г. Бете, А. Зоммерфельд, Электронная теория металлов, Л.—М., 1938.)
3. Pauli W., Zs. Phys., 41, 81 (1926).
4. London F., Superfluids, New York, 1954.
5. Einstein A., Ann. d. Phys., 17, 549 (1905); 19, 371 (1906). (Имеется перевод в сб. «Броуновское движение», М.—Л., 1936.)
6. Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, London, 1954.
7. Dingle R. B., Proc. Roy. Soc., A211, 500 (1952).
- 8*. Шокли В., Теория электронных полупроводников, ИЛ, 1953.
- 9*. Хуанг К., Статистическая механика, изд-во «Мир», 1966.
- 10*. Кеэзом В., Гелий, ИЛ, 1949.
- 11*. Займан Дж., Принципы теории твердого тела, изд-во «Мир», 1966.
- 12*. Боголюбов Н. Н., Лекции по квантовой статистике, Киев, 1949.
- 13*. Чандraseкар С., Стохастические проблемы в физике и астрономии, ИЛ, 1947.