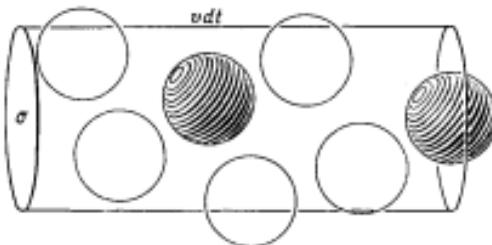


от центра рассеяния (фиг. 133). Это соответствует следующему предположению:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Число столкновений} \\ \text{за время } \Delta t \end{array} \right) = \Delta V \left(\begin{array}{c} \text{Вероятность} \\ \text{нахождения} \\ \text{частиц в единичном объеме} \\ \text{пространства} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \text{Число} \\ \text{центров} \\ \text{рассеяния} \end{array} \right), \quad (6.3)$$

где второй множитель в правой части соответствует функции распределения (1.9).



Ф и г. 133

Например, если в единичном объеме имеется s центров рассеяния, каждый из которых обладает сечением σ , то число частиц со скоростями между v и $v + dv$, рассеивающихся на этих центрах за единицу времени, дается выражением

$$\frac{d\mathfrak{N}}{dt} = s \sigma v n f(v) dv. \quad (6.4)$$

Здесь n — плотность числа частиц, $f(v)$ — функция распределения частиц по скоростям [нормированная так, что $\int f(v) dv = 1$]. Смысл этой формулы ясен из фиг. 133, где изображен цилиндр объемом $v dt \times \sigma$.

Допущение молекулярного хаоса означает, что при рассмотрении временных интервалов Δt , удовлетворяющих условию (6.2), частота столкновений может быть вычислена с помощью выражения (6.4). Такое допущение позволяет вывести уравнение Больцмана (см. § 3). Другими словами, динамические связи между последующими столкновениями быстро теряются из-за большого числа и случайного распределения центров рассеяния.

§ 3. Уравнение переноса Больцмана

Вязкие силы в потоке газа связаны с переносом импульса молекул, теплопроводность — с переносом энергии, а диффу-

зационные процессы — с переносом массы. Эти и подобные им явления, например электропроводность, носят название *явления переноса*. Коэффициент вязкости, теплопроводность, постоянная диффузии и электропроводность называются *коэффициентами переноса*, или *кинетическими коэффициентами* для соответствующих процессов. Одной из основных задач кинетической теории является вычисление этих коэффициентов на базе точных микроскопических законов движения частиц.

В кинетической теории обычно рассматривают функцию распределения молекул в μ -пространстве (см. гл. 1, § 2). Удобно определить функцию распределения f таким образом, чтобы величина $f(x, p, t) dx dp$ соответствовала числу частиц, которые содержатся в элементе объема dx в окрестности x и имеют импульсы, лежащие между p и $p + dp$. Уравнение, описывающее изменение во времени такой функции распределения, носит название уравнения Больцмана. Оно имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial p} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{столк}, \quad (6.5)$$

где x — координата, p — импульс, а \mathbf{F} — внешняя сила, действующая на частицу.

Дрейфовый член. Уравнение (6.5) можно записать в следующей форме:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{столк} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{дрейф}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{дрейф} \equiv -\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial p}; \quad (6.6)$$

член $(\partial f / \partial t)_{дрейф}$ называют дрейфовым; он описывает скорость изменения функции распределения f , обусловленную бесстолкновительным движением частиц. За время dt такое движение приводит к следующим изменениям координаты и импульса:

$$x \rightarrow x' = x + \mathbf{v} dt, \quad p \rightarrow p' = p + \dot{p} dt = p + \mathbf{F} dt,$$

которые определяют поток в μ -пространстве. Изменение f должно удовлетворять уравнению непрерывности

$$f(x', p', t + dt) = f(x, p, t),$$

или

$$f(x + \mathbf{v} dt, p + \mathbf{F} dt, t + dt) = f(x, p, t). \quad (6.7)$$

Второе уравнение (6.6) можно легко получить из (6.7).

Столкновительный член. Правая часть уравнения (6.5) учитывает влияние столкновения частиц друг с другом или с центрами рассеяния. В элементарной теории этот член находит более или менее интуитивным путем с помощью допущений, приведенных в § 2. Дадим несколько примеров.

1. Классические частицы (например, невырожденные электроны) рассеиваются частицами другого типа (центрами рассеяния). Пусть $\sigma_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ — дифференциальное сечение рассеяния частицы одним из центров α -го сорта. Это означает, что частота таких столкновений с центрами рассеяния α -го сорта, в результате которых частица, имевшая импульс \mathbf{p} , приобретает импульс, лежащий в интервале \mathbf{p}' , $\mathbf{p}' + d\mathbf{p}'$, описывается выражением (частота столкновений есть число актов рассеяния в единицу объема за единицу времени):

$$s_\alpha \sigma_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{p}') d\mathbf{p}' \cdot v(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}), \quad (6.8)$$

где s_α — плотность числа центров рассеяния α -го типа. В таком случае столкновительный член можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{столк}} = & - \sum_\alpha s_\alpha \int \sigma_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{p}') d\mathbf{p}' \cdot v(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) + \\ & + \sum_\alpha s_\alpha \int \sigma_\alpha(\mathbf{p}', \mathbf{p}) v(\mathbf{p}') f(\mathbf{p}') d\mathbf{p}'. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Первый член в правой части соответствует переходам из состояния \mathbf{p} , а второй — переходам в состояние \mathbf{p} из всех возможных состояний \mathbf{p}' ¹⁾.

2. Рассеяние вырожденных частиц инородными центрами рассеяния. В этом случае вероятность рассеяния (6.8) должна быть заменена следующей:

$$s_\alpha \sigma_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{p}') d\mathbf{p}' v(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) \{1 - f(\mathbf{p}')\}. \quad (6.10)$$

В силу принципа Паули процесс рассеяния ($\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'$) может произойти только в том случае, когда состояние \mathbf{p}' не занято. Такое ограничение приводит к уменьшению частоты столкновений. Указанный эффект учитывается последним множителем в (6.10) (если электроны не вырождены, то этот множитель не существует, так как $f \ll 1$). Соответственно изменяется и выражение (6.9):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{столк}} = & - \sum_\alpha s_\alpha \int \sigma_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{p}') v(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) \{1 - f(\mathbf{p}')\} d\mathbf{p}' + \\ & + \sum_\alpha s_\alpha \int \sigma_\alpha(\mathbf{p}', \mathbf{p}) v(\mathbf{p}') f(\mathbf{p}') \{1 - f(\mathbf{p})\} d\mathbf{p}'. \end{aligned} \quad (6.11)$$

¹⁾ Более строгий вывод кинетического уравнения с учетом корреляции между сталкивающимися частицами см. в Монографии И. Н. Боголюбова [15]. См. также приложение Улленбека к книге [16], где очень хорошо изложены основные предположения, которые делаются при выводе кинетического уравнения.— Прим. ред.

3. Столкновения между частицами (классический случай). Пусть $\Phi(p_1, p_2; p'_1, p'_2)$ — плотность вероятностей, описывающая процесс столкновения частиц с импульсами p_1 и p_2 , в результате которого они переходят в состояние с импульсами p'_1 и p'_2 . При этом столкновительный член может быть записан в форме

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{стол}} = - \iiint \Phi(p_1, p_2; p'_1, p'_2) f(p_1) f(p_2) d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}'_2 + \\ + \iiint \Phi(p'_1, p'_2; p_1, p_2) f(p'_1) f(p'_2) d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}'_2 d\mathbf{p}_2. \quad (6.12)$$

Тогда столкновительный член уравнения Больцмана записывается просто как

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{стол}} = \Gamma[f], \quad (6.13)$$

где символом $\Gamma[f]$ обозначен действующий на функцию f интегральный оператор, который может быть как линейным, так и нелинейным. Поскольку в столкновениях не происходит процессов рождения и уничтожения частиц, полное число частиц не меняется, в связи с чем должно выполняться условие

$$\int \Gamma[f] d\mathbf{p} = 0. \quad (6.14)$$

С другой стороны, для равновесной функции распределения f_e должно выполняться соотношение

$$\Gamma[f_e] \equiv 0, \quad (6.15)$$

так как процессы столкновений фактически и являются тем микроскопическим механизмом, который приводит систему в состояние равновесия.

Главной задачей кинетической теории, основанной на уравнении Больцмана, является решение уравнения (6.5) при заданных механизме столкновения и внешней силе \mathbf{F} и определенных граничных и начальных условиях. При этом приходится рассматривать интегро-дифференциальное уравнение, которое обычно является нелинейным; исключение составляют лишь некоторые счастливые случаи [см., например, (6.9)]. Точное его решение, следовательно, получить очень трудно. Однако если отклонение g от равновесия невелико, то, положив

$$f = f_e + g, \quad (6.16)$$

можно линеаризовать уравнение Больцмана. При этом оно становится линейным интегро-дифференциальным уравнением.

Часто столкновительный член заменяется простым приближенным выражением

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{стол}} = \frac{f - f_0}{\tau} \equiv -\frac{g}{\tau}. \quad (6.17)$$

Это соответствует предположению о том, что вследствие столкновений отклонение функции распределения от равновесного значения просто экспоненциально затухает со временем. При этом τ иногда считают просто константой, или, в более общем случае, функцией от p . Эта константа характеризует скорость релаксации от неравновесного к равновесному состоянию, в связи с чем ее часто называют временем релаксации. Величина τ — одного порядка с временем свободного пробега, но не равна ему. Такой упрощенный подход полезен для качественного понимания многих задач, хотя и является весьма нестрогим.

ПРИМЕРЫ

1. Показать, что если в (1.68) полумакроскопическая переменная α описывает состояние малой подсистемы I рассматриваемой системы, то распределение флуктуаций этой переменной может быть записано в виде

$$P(\alpha') = Ce^{-W_{\min}(\alpha^*, \alpha')/kT^*},$$

где $W_{\min}(\alpha^*, \alpha')$ соответствует минимальной работе, которую следует совершить, чтобы перевести подсистему I из равновесного состояния α^* в состояние $\alpha^* + \alpha'$ при учете взаимодействия с остальной частью системы, а T^* — значение температуры в состоянии равновесия, т. е. температура подсистемы II.

РЕШЕНИЕ

Соотношение (1.68) применимо ко всей системе I + II. Пусть при переходе подсистемы I из состояния α^* в состояние $\alpha^* + \alpha'$ полная система I + II переходит из состояния A^* в $A^* + A'$. При этом совершается некоторая работа, которая в случае квазистатического (или обратимого) перехода должна иметь минимальную величину; таким образом, можно написать

$$W_{\min}(\alpha^*, \alpha') = \int_{A^*}^{A^* + A'} (dU - T dS), \quad (1)$$

где U и S — соответственно внутренняя энергия и энтропия полной системы I + II, T — температура системы на каждой из промежуточных стадий процесса. Так как изменение α' соот-