РЕШЕНИЕ

В начальный момент поршень P_2 прижат к перегородке S и газ находится между перегородкой и поршнем P_1 в пространстве объемом V_1, где он имеет давление p_1 и температуру T_1. Затем поршень P_1 начинает медленно двигаться к перегородке так, чтобы давление p_1 сохранилось постоянным. Одновременно с этим поршень P_2 медленно отодвигается. Это движение продолжается до тех пор, пока поршень P_1 не придвинется вплотную к перегородке S. Между P_2 и S к этому моменту образуется область объемом V_2, заполненная газом под давлением p_2. Полная работа, совершенная двумя поршнями, имеет вид

$$A = -\int_{V_1}^{0} p_1\,dV - \int_{0}^{V_2} p_2\,dV = p_1V_1 - p_2V_2.$$

Из первого закона вытекает

$$\begin{gathered} U(p_2, V_2) - U(p_1, V_1) = p_1V_1 - p_2V_2, \\ U_1 + p_1V_1 = U_2 + p_2V_2, \quad \text{или} \quad H(p_1, V_1) = H(p_2, V_2). \end{gathered} \tag{1}$$

Следовательно, если энтальпию газа H считать функцией от p и T при фиксированной массе газа, то соотношение (1) можно записать в виде

$$H(p_1, T_1) = H(p_2, T_2). \tag{2}$$

Из него определяется температура T_2 при заданных p_1, T_1 и p_2.

ЗАДАЧИ

[А]

1. Показать, что если уравнение состояния имеет вид $p = p(T, V)$, то справедливо соотношение

$$p\alpha_p = k\alpha_V,$$

где $\alpha_p = (\partial p/\partial T)_V/p$ — тепловой коэффициент давления при постоянном объеме, $\alpha_V = (\partial V/\partial T)_p/V$ — коэффициент теплового расширения при постоянном давлении, $k = -V(\partial p/\partial V)_T$ — изотермический объемный модуль упругости.

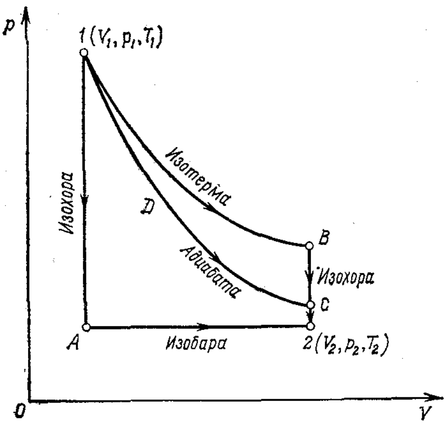
2. Доказать соотношение

$$dp = k\left(-\frac{dV}{V} + \alpha_V\,dT\right),$$

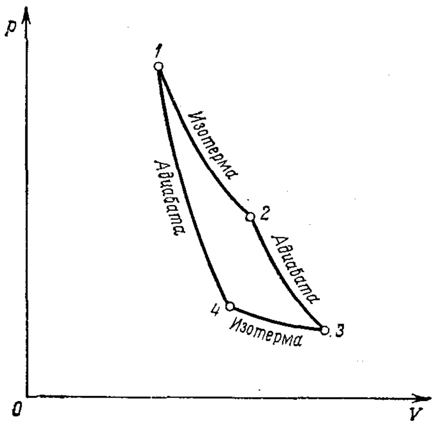
связывающее малые изменения dp, dV и dT давления p, объема V и температуры T при квазистатическом процессе.

3. При нормальных температуре и давлении для кислорода $c_p = 0{,}2203$ *кал/г·град*, $c_V = 0{,}1578$ *кал/г·град*. Считая кислород идеальным газом, вычислить механический эквивалент тепла.

4. При постоянной температуре 20° С идеальный газ квазистатически расширяется из состояния с давлением в 20 *атм*; конечное давление равно 1 *атм*. Какую работу совершает 1 *моль* газа (в джоулях)? Какое количество тепла (в калориях) необходимо передать газу?



Фиг. 10.



Фиг. 11.

5. Найти адиабатическую сжимаемость $\varkappa_{\text{ад}}$ идеального газа при квазистатическом адиабатическом сжатии. Скорость звука определяется соотношением $c = \sqrt{dp/d\rho}$ (ρ — плотность). Считая, что дифференцирование производится при адиабатическом изменении, вычислить скорость звука в воздухе при 1 *атм* и 0° С и найти ее зависимость от температуры.

6. Идеальный газ квазистатически и адиабатически переходит из состояния (p_1, V_1, T_1) в состояние (p_2, V_2, T_2). Показать, что если в конечном состоянии сообщить газу (при постоянном объеме) количество тепла, эквивалентное работе, совершенной газом при этом переходе, то температура его снова станет равной исходной.

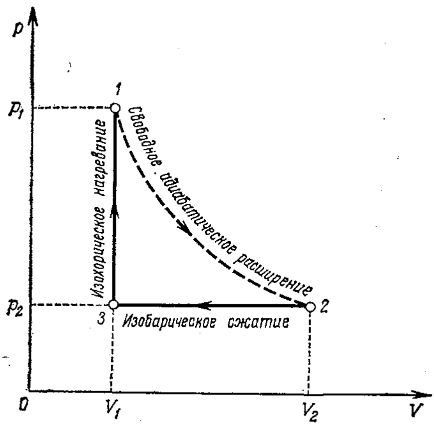
7. Переход идеального газа из начального состояния (p_1, V_1, T_1) в конечное состояние (p_2, V_2, T_2) совершается с помощью трех квазистатических процессов, изображенных на диаграмме фиг. 10: а) $1A2$, б) $1B2$ и в) $1DC2$. Чем определяется возрастание внутренней энергии при переходе $1 \to 2$? Определить также для каждого процесса работу, совершаемую системой, и передаваемое тепло. Удельную теплоемкость считать постоянной.

8. Принимая, что воздух, поднимаясь в атмосфере, расширяется как идеальный газ, определить изменение его температуры с высотой. Насколько уменьшается температура на высоте 1 *км*?

9. Идеальный газ совершает квазистатический циклический процесс (цикл Карно), изображенный на фиг. 11. Переход из 1 в 2 представляет собой изотермическое расширение, при котором газ находится в контакте с тепловым резервуаром с температурой T_1, переход из 2 в 3 — адиабатическое расширение, переход из 3 в 4 — изотермическое сжатие, при котором имеет место контакт с тепловым резервуаром с температурой T_2, и, наконец, переход из 4 в 1 является адиабатическим сжатием. Доказать соотношение

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}=0$$

(уравнение Клаузиуса), где Q_1 — тепло, полученное от теплового резервуара с температурой T_1, а Q_2 — тепло от резервуара с температурой T_2. Удельную теплоемкость считать постоянной.



Фиг. 12.

10. Для процесса, при котором параметр x сохраняется постоянным, доказать, что $pv^f = \text{const}$, где $f = (c_x - c_p)/(c_x - c_v)$, p — давление, v — удельный объем, c_x, c_p и c_v удельные теплоемкости соответственно при постоянном значении x, постоянном давлении и постоянном объеме.

11. Один моль идеального газа с начальными давлением p_1 и объемом V_1 свободно (и адиабатически) расширяется до объема V_2. Затем он квазистатически сжимается до объема V_1 при постоянном давлении p_2. Наконец, газ квазистатически нагревается при постоянном объеме V_1 до тех пор, пока его давление не станет равным p_1. Такой цикл, изображенный на фиг. 12, называется циклом Майера. Доказать с помощью этого цикла соотношение Майера (см. пример 3). Молярную теплоемкость считать постоянной.

12. Рассматривается газ, подчиняющийся уравнению состояния Дитеричи:

$$p=\frac{nRT}{V-nb}\,e^{-na/RTV},$$

где p — давление, V — объем, T — абсолютная температура, n — число молей, R — газовая постоянная, a и b — константы, характеризующие вещество. Показать, что в критической точке давление, объем и температура имеют вид

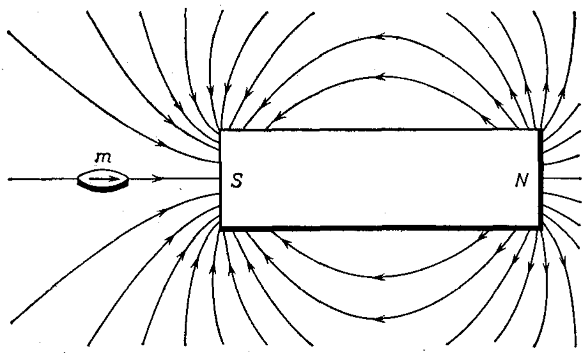
$$p_c = \frac{a}{4e^2b^2}, \quad V_c = 2nb, \quad T_c = \frac{a}{4Rb},$$

и записать уравнение состояния в универсальной форме закона соответственных состояний.

13. Вычислить удельную теплоемкость воздуха при постоянном объеме, считая его смесью кислорода O_2 и азота N_2 с отношением масс компонентов 23 : 77. Удельная теплоемкость газообразного кислорода при постоянном объеме равна 0,158 *кал/г·град*, а газообразного азота 0,176 *кал/г·град*.

[Б]

14. Первоначально ненамагниченная небольшая железная иголка медленно вносится из бесконечности в магнитное поле



Фиг. 13.

постоянного магнита прямоугольной формы. При этом ориентация иголки все время сохраняется параллельной оси магнита, как показано на фиг. 13. Пусть наличие иголки не меняет силы магнита и объем иголки остается постоянным. Доказать в этих предположениях, что работа, совершаемая при намагничивании иголки до значения ее магнитного момента m_1, определяется соотношением

$$A = \int_0^{m_1} H\, dm,$$

где m — магнитный момент иголки в той точке, где магнитное поле равно H.

15. Рассмотреть вертикальный столб воздуха бесконечной высоты и постоянного сечения. Вычислить его теплоемкость, считая воздух идеальным газом, находящимся в постоянном гравитационном поле.

16. Пусть имеется замкнутая система, для описания термодинамически равновесного состояния которой в качестве независимых переменных можно взять любую пару из трех величин: давления p, объема V и температуры T. Доказать, что:

а) теплоемкость при постоянном объеме $C_V = (\partial U/\partial T)_V$, а при постоянном давлении $C_p = (\partial H/\partial T)_p$;

б) $$C_p - C_V = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right] = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left[p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T\right];$$

в) $$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T + p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T;$$

г) $$(C_p - C_V)\frac{\partial^2 T}{\partial p\,\partial V} + \left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p - \left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = 1,$$

где U — внутренняя энергия, $H = U + pV$ — энтальпия.

З а м е ч а н и е. Так как в левой части соотношения «г» стоят измеряемые величины, это соотношение можно использовать для экспериментальной проверки первого закона термодинамики.

17. Доказать, что внутреннюю энергию u и энтальпию h единицы массы идеального газа с постоянной удельной теплоемкостью можно записать в форме

$$u = \frac{c^2}{\gamma(\gamma - 1)} + \text{const}, \qquad h = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \text{const},$$

где $c = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_{\text{ад}}}$ — скорость звука (p — давление, ρ — плотность, производная вычисляется для адиабатического процесса), γ — отношение удельной теплоемкости при постоянном давлении к удельной теплоемкости при постоянном объеме.

18. Доказать, что для однородного магнитного вещества теплоемкость при постоянном магнитном поле H можно записать в виде

$$C_H = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H - H\left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_H,$$

где U — внутренняя энергия, I — магнитный момент, T — абсолютная температура магнитного вещества. Изменением объема при намагничивании можно пренебречь.

19. Доказать следующее соотношение между изотермической и адиабатической магнитной восприимчивостью однородного вещества:

$$\chi_{\text{ад}} = \frac{C_M}{C_H} \chi_T,$$

где C_M — теплоемкость при постоянной намагниченности, C_H — теплоемкость при постоянном магнитном поле. Изменением объема при намагничивании можно пренебречь.

20. Рассмотреть цикл Карно, в котором в качестве рабочего вещества используется тепловое излучение. Плотность внутренней энергии излучения u определяется законом Стефана — Больцмана $u = \sigma T^4$, где T — абсолютная температура (постоянная $\sigma > 0$), а давление излучения p определяется уравнением состояния $p = u/3$.

ОТСТУПЛЕНИЕ 3

Никола Леонард Сади Карно. Первая половина девятнадцатого столетия была периодом, когда паровая машина, усовершенствованная Джемсом Уаттом (1765), добавившим к ней конденсор (низкотемпературный тепловой резервуар), совершала одно за другим замечательные преобразования в промышленности и транспорте. Многие выдающиеся физики, подобно Лапласу и Пуассону, занимались изучением Движущей Силы Огня. Сади Карно (1796—1832) — сын Лазаря Карно, которого называли «организатором победы» Французской революции,— родился и умер в Париже. По-видимому, он был знаком с калорической теорией тепла, согласно которой тепло представляет собой некую субстанцию, способную перетекать из одного тела в другое (теплопроводность) и образовывать химическое соединение с атомами вещества (скрытая теплота). Карно написал небольшую, но очень важную книгу «Размышления о движущей силе огня» [5], которая была издана его братом вместе с некоторыми другими посмертными записками ученого.

Основная идея Карно состояла в том, что тепловая машина производит работу *не за счет* поглощения тепла, а благодаря передаче тепла от горячего тела к холодному, поэтому невозможно использовать тепло, не имея холодного тела, подобно тому как вода должна падать из высокого резервуара в низкий. В своей книге Карно предполагает справедливым закон сохранения тепла и считает, что количество тепла есть функция состояния. Правда, позже он отказался от этого предположения и пришел к закону эквивалентности тепла и работы, в частности, предложил различные способы оценки механического эквивалента тепла. Карно ввел цикл, известный теперь под его именем, и установил принцип Карно.

Книга Карно оставалась незамеченной до 1834 г., когда Клапейрон представил теорию Карно в аналитической и графической форме с помощью индикаторных диаграмм, введенных Уаттом. Основываясь на трудах Майера (1841) и Джоуля (1843—1849), Клаузиус (1850) изменил формулировку закона сохранения тепла, из которой исходил Карно. Согласно формулировке Клаузиуса, для совершения работы недостаточно только перераспределения тепла; необходимо также израсходовать некоторое количество тепла, пропорциональное работе, и наоборот. Это положение Клаузиус назвал первым законом термодинамики. Гельмгольц (1847) и Клаузиус обобщили этот закон и пришли к принципу сохранения энергии. В. Томсон (лорд Кельвин), который, основываясь на работе Карно, предложил (в 1848) шкалу температуры (шкала Кельвина), также пришел к закону эквивалентности тепла и работы. Второй закон термодинамики был сформулирован Томсоном (1851) и Клаузиусом (1867).

Обзор истории раннего периода развития термодинамики можно найти в статье Мендозы [6], см. также книгу Маха [7].

[В]

21. Пренебрегая внутренним трением (вязкостью) и теплопроводностью, доказать, что сумма плотностей энтальпии и кинетической энергии стационарного потока жидкости (или газа) сохраняется постоянной. Предполагается, что внешние силы типа гравитационного поля отсутствуют.

22. Найти конечную температуру и верхний предел скорости стационарного потока перегретого пара, вытекающего через сопло в атмосферу из камеры, где он имел температуру 300° С и находился при давлении 5 *атм*; давление наружного воздуха равно 1 *атм*. Перегретый пар можно считать идеальным газом, у которого удельная теплоемкость при постоянном давлении $c_p = 0{,}49$ *кал/г·град* и отношение теплоемкостей $\gamma = 1{,}33$. Теплопроводностью и влиянием поля тяжести можно пренебречь.

23. Рассмотреть совокупность систем A, B, C, . . ., термически равновесное состояние каждой из которых определяется давлением p и удельным объемом v. Доказать, что в соответствии с нулевым законом термодинамики для каждой системы существует характеристическая функция $\theta_A = f_A(p, v)$, . . ., причем условием теплового равновесия между системами (например, A и B) является равенство этих функций (например, $\theta_A = \theta_B$) (теорема существования температуры). При этом следует воспользоваться эмпирически установленным фактом существования функционального соотношения между независимыми параметрами двух систем, находящихся в равновесии.

24. Обобщить задачу о намагничивании, рассмотренную в примере 1, на случай, когда магнитное поле H, намагниченность M и плотность магнитного потока B неоднородны. (Воспользоваться уравнениями Максвелла.)

РЕШЕНИЯ

1. Из уравнения состояния получается следующее соотношение между дифференциалами dp давления p, dT температуры T и dV объема V:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV.$$