

этот закон и пришли к принципу сохранения энергии. В. Томсон (лорд Кельвин), который, основываясь на работе Карно, предложил (в 1848) шкалу температуры (шкала Кельвина), также пришел к закону эквивалентности тепла и работы. Второй закон термодинамики был сформулирован Томсоном (1851) и Клаузиусом (1867).

Обзор истории раннего периода развития термодинамики можно найти в статье Мендозы [6], см. также книгу Маха [7].

## [В]

21. Пренебрегая внутренним трением (вязкостью) и теплопроводностью, доказать, что сумма плотностей энтальпии и кинетической энергии стационарного потока жидкости (или газа) сохраняется постоянной. Предполагается, что внешние силы типа гравитационного поля отсутствуют.

22. Найти конечную температуру и верхний предел скорости стационарного потока перегретого пара, вытекающего через сопло в атмосферу из камеры, где он имел температуру  $300^\circ \text{C}$  и находился при давлении  $5 \text{ атм}$ ; давление наружного воздуха равно  $1 \text{ атм}$ . Перегретый пар можно считать идеальным газом, у которого удельная теплоемкость при постоянном давлении  $c_p = 0,49 \text{ кал/г}\cdot\text{град}$  и отношение теплоемкостей  $\gamma = 1,33$ . Теплопроводностью и влиянием поля тяжести можно пренебречь.

23. Рассмотреть совокупность систем  $A, B, C, \dots$ , термически равновесное состояние каждой из которых определяется давлением  $p$  и удельным объемом  $v$ . Доказать, что в соответствии с нулевым законом термодинамики для каждой системы существует характеристическая функция  $\theta_A = f_A(p, v), \dots$ , причем условием теплового равновесия между системами (например,  $A$  и  $B$ ) является равенство этих функций (например,  $\theta_A = \theta_B$ ) (теорема существования температуры). При этом следует воспользоваться эмпирически установленным фактом существования функционального соотношения между независимыми параметрами двух систем, находящихся в равновесии.

24. Обобщить задачу о намагничивании, рассмотренную в примере 1, на случай, когда магнитное поле  $H$ , намагниченность  $M$  и плотность магнитного потока  $B$  неоднородны. (Воспользоваться уравнениями Максвелла.)

## РЕШЕНИЯ

1. Из уравнения состояния получается следующее соотношение между дифференциалами  $dp$  давления  $p$ ,  $dT$  температуры  $T$  и  $dV$  объема  $V$ :

$$dp = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T dV.$$

Согласно определению, имеем

$$dp = p\alpha_p dT - k \frac{dV}{V}.$$

Отношение дифференциалов  $dV$  и  $dT$  при  $p = \text{const}$  (т. е.  $dp = 0$ ) равно

$$\left(\frac{dV}{dT}\right)_p = \frac{Vp\alpha_p}{k};$$

следовательно,  $k\alpha_V = p\alpha_p$ .

2. Из предыдущего решения находим

$$dp = k\alpha_V dT - \frac{k dV}{V} = k \left( \alpha_V dT - \frac{dV}{V} \right).$$

3. Как и в примере 4, ответ можно получить, сравнивая значения газовой постоянной, вычисленные с помощью уравнения состояния и соотношения Майера. Молекулярный вес кислорода равен 32, отсюда  $m = 32$  г/моль. При стандартных условиях объем 1 моль газа равен  $22,4 \cdot 10^3$  см<sup>3</sup>, поэтому объем 1 г кислорода при стандартных условиях равен

$$V = \frac{22,4 \cdot 10^3}{32} = 700 \text{ см}^3.$$

Так как  $1 \text{ атм} = 1,013 \cdot 10^6$  дин/см<sup>2</sup>, то при  $p = 1 \text{ атм}$  и  $T = 273^\circ \text{ К}$

$$\frac{R}{m} = \frac{pV}{T} = \frac{1,013 \cdot 10^6 \cdot 700}{273} = 2,60 \cdot 10^6 \text{ эрг/г} \cdot \text{град} = 0,260 \text{ дж/г} \cdot \text{град}.$$

С другой стороны, из соотношения Майера имеем

$$\frac{R}{m} = c_p - c_V = 0,2203 - 0,1578 = 0,0625 \text{ кал/г} \cdot \text{град}.$$

Следовательно, механический эквивалент тепла равен

$$J = \frac{0,260}{0,0625} = 4,16 \text{ дж/кал}.$$

4. Если объем 1 моль идеального газа равен  $V$ , то совершаемая им работа в соответствии с (1.7а) равна  $-d'A = p dV$ . Так как процесс квазистатический, то давление  $p$  определяется уравнением состояния  $pV = RT$ . Следовательно, работа, совершаемая газом при абсолютной температуре  $T$  при изменении объема от  $V_1$  до  $V_2$ , имеет вид

$$-A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT \ln \frac{V_2}{V_1} = RT \ln \frac{p_1}{p_2},$$

где мы использовали соотношения  $p_1 V_1 = RT$  и  $p_2 V_2 = RT$ . При  $T = 20^\circ \text{ С} = 293^\circ \text{ К}$  имеем  $RT = 8,31 \cdot 293 = 2,43 \cdot 10^3$  дж/моль.

Для  $p_1 = 20$  атм,  $p_2 = 1$  атм  $\ln(p_1/p_2) = \ln 20 = 2,30 \cdot 1,301 = 2,99$ . Следовательно, работа, совершаемая газом, равна  $RT \ln(p_1/p_2) = 2,43 \cdot 10^3 \cdot 2,99 = 7,26 \cdot 10^3$  дж/моль.

Поглощаемое при этом количество тепла получается из первого закона термодинамики (1.2):  $U_2 - U_1 = Q + A$ . В термически равновесном состоянии внутренняя энергия  $U$  одного моля газа зависит только от  $T$  и поэтому не меняется при изотермическом процессе:  $U_2 - U_1 = 0$ . Отсюда следует, что количество тепла, поглощенное газом, равно  $Q = -A = 7,26 \cdot 10^3$  дж/моль. Разделив эту величину на механический эквивалент тепла  $J$ , получаем ее значение в калориях  $Q = 7,26 \cdot 10^3 / 4,18 = 1,937$  ккал/моль.

5. Из уравнения Пуассона (см. пример 6)  $pV^\gamma = \text{const}$  имеем  $(dp/p) + \gamma(dV/V) = 0$ . Следовательно,

$$\kappa_{\text{ад}} = -V \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_{\text{ад}} = \gamma p. \quad (1)$$

Если сжатие и расширение в звуковой волне можно рассматривать как квазистатический адиабатический процесс (это справедливо для звука с достаточно низкой частотой), то

$$\left( \frac{dp}{d\rho} \right)_{\text{ад}} = -\frac{V}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_{\text{ад}} = \frac{\kappa_{\text{ад}}}{\rho} = \frac{\gamma p}{\rho}, \quad (2)$$

так как  $d\rho/\rho = -dV/V$ . Если молекулярный вес газа равен  $M$  и в объеме  $V$  содержится  $n$  молей газа, то  $\rho = nM/V$ . Поэтому уравнение состояния можно записать в виде

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}. \quad (3)$$

Подставляя его в (2), получаем

$$c = \left( \frac{\gamma RT}{M} \right)^{1/2}.$$

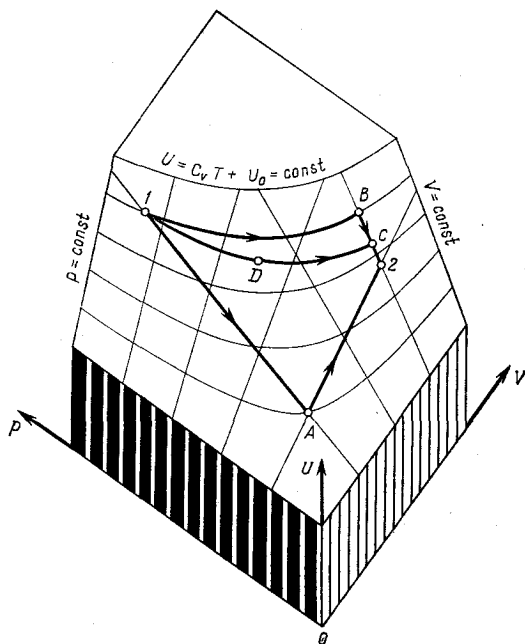
При  $\gamma = 1,41$ , среднем молекулярном весе 28,9,  $T = 273^\circ \text{K}$  и  $R = 8,31 \cdot 10^7$  эрг/моль·град<sup>2</sup> имеем

$$c = 3,32 \cdot 10^4 \text{ см/сек} = 332 \text{ м/сек}.$$

Изменение скорости с температурой  $dc/dT = 1/2 c/T$  при  $T = 273^\circ \text{K}$  равно 0,607 м/сек·град.

6. Для адиабатического процесса  $1 \rightarrow 2$  имеем  $U_2 - U_1 = A = -W$  ( $W$  — работа, совершаемая газом). Для процесса  $2 \rightarrow 3$ , при котором газ поглощает количество тепла  $Q$ , нагреваясь при постоянном объеме и, следовательно, не совершая работы, получаем  $U_3 = U_2 + Q$ . Если  $Q = W$ , то  $U_3 = U_2 + W = U_1$ . А так как внутренняя энергия идеального газа не зависит от объема, а зависит только от температуры, то отсюда следует, что  $T_3 = T_1$ .

7. Внутреннюю энергию  $U$  можно выразить в виде  $U = C_V T + \text{const}$  ( $C_V = \text{const} = nC_V^0$ , где  $n$  — число молей,  $C_V^0$  — молярная



Ф и г. 14.

теплоемкость), откуда следует, что  $U_2 - U_1 = C_V (T_2 - T_1)$ . Соответствующая поверхность приведена на фиг. 14.

$$\text{а) } A_{1 \rightarrow A} = 0, \text{ так что } A^{(a)} = A_{A \rightarrow 2} = - \int_{V_1}^{V_2} p_2 dV = - p_2 (V_2 - V_1), \quad (1)$$

$$Q_{1 \rightarrow A} = \int_{T_1}^{T_A} C_V dT = C_V (T_A - T_1), \quad Q_{A \rightarrow 2} = \int_{T_A}^{T_2} C_p dT = C_p (T_2 - T_A).$$

С другой стороны, так как  $T_A$  определяется уравнением  $p_2 V_1 = nRT_A$ , то с помощью соотношения Майера  $C_p = C_V + nR$  (см. пример 3) находим

$$\begin{aligned} Q^{(a)} &= Q_{1 \rightarrow A} + Q_{A \rightarrow 2} = C_p T_2 - C_V T_1 - (C_p - C_V) T_A = \\ &= C_p T_2 - C_V T_1 - p_2 V_1 = C_V (T_2 - T_1) + p_2 (V_2 - V_1). \end{aligned} \quad (2)$$

б) В процессе  $B \rightarrow 2$  работа не совершается, поэтому

$$A^{(6)} = A_{1 \rightarrow B} = - \int_{V_1}^{V_2} nRT_1 \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln \frac{V_1}{V_2}. \quad (3)$$

Теплота, поглощения в процессе  $1 \rightarrow B$ , определяется из соотношения  $d'Q = p dV$  ( $U = \text{const}$ , так как  $T = \text{const}$ ). Следовательно,

$$Q_{1 \rightarrow B} = \int_1^B p dV = -A_{1 \rightarrow B} = -nRT_1 \ln \frac{V_1}{V_2},$$

или

$$Q_{B \rightarrow 2} = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT = C_V (T_2 - T_1),$$

откуда

$$Q^{(6)} = C_V (T_2 - T_1) + nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (4)$$

в) В процессе  $C \rightarrow 2$  работа тоже не совершается. Работу в адиабатическом процессе  $1 \rightarrow C$  можно вычислить так же, как в примере б):

$$A^{(B)} = A_{1 \rightarrow C} = C_V (T_C - T_1) = -C_V T_1 \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (5)$$

В процессе  $1 \rightarrow C$  теплота не поглощается, поэтому

$$Q^{(B)} = Q_{C \rightarrow 2} = \int_{T_C}^{T_2} C_V dT = C_V (T_2 - T_C) = C_V \left[ T_2 - T_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (6)$$

Во всех трех случаях сумма  $A + Q$  равна  $C_V (T_2 - T_1)$ .

8. Прежде всего исследуем зависимость давления термически равновесной атмосферы от высоты  $z$ . Эта зависимость определяется из условия, состоящего в том, что при тепловом равновесии силы уравниваются друг друга. Рассмотрим цилиндрический объем воздуха, находящийся на высоте от  $z$  до  $z + dz$  и имеющий сечение  $S$ . Силы давления, действующие на верхнюю и нижнюю плоскости, соответственно равны  $-p(z + dz)S$  и  $p(z)S$ . Сила тяжести, действующая на этот объем воздуха, равна  $-\rho(z)Sg dz$ , где  $\rho(z)$  — плотность воздуха, а  $g$  — ускорение свободного падения. Из условия равенства нулю полной силы, действующей на объем воздуха (фиг. 15),

$$-p(z + dz)S + p(z)S - \rho(z)Sg dz = 0,$$

находим  $dp(z)/dz = -\rho(z)g$ . Если  $m$  — средний молекулярный вес воздуха, то объем моля воздуха равен  $m/\rho(z)$ . Следовательно, уравнение состояния (1.11) можно представить в виде  $p(z) m/\rho(z) = RT(z)$ . Выражая  $\rho(z)$  через  $p(z)$ , находим  $dp(z)/dz = -m g p(z)/RT(z)$ .

Условие адиабатического квазистатического расширения определяется соотношением (1) примера 6. Из уравнения состояния  $pV = nRT$  имеем

$$\frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}.$$

Исключая  $dV/V$ , получаем

$$\frac{dT}{T} = \frac{(\gamma - 1) dp}{\gamma p},$$

или

$$\left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_{\text{ад}} = \frac{(\gamma - 1) T}{\gamma p}.$$

Из этого условия можно определить зависимость температуры  $T(z)$  от  $z$ , используя соотношение, выражающее изменение давления  $p$  с высотой  $z$ . Таким образом, находим

$$\frac{dT(z)}{dz} = \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_{\text{ад}} \frac{dp(z)}{dz} = \frac{(\gamma - 1) T(z)}{\gamma p(z)} \cdot \frac{-mgp(z)}{RT(z)} = -\frac{(\gamma - 1) mg}{\gamma R}.$$

Значения констант для воздуха приведены в решении примера 4:  $\gamma = 1,41$ ,  $m = 29$  г/моль,  $g = 980$  см/сек<sup>2</sup>. Следовательно,

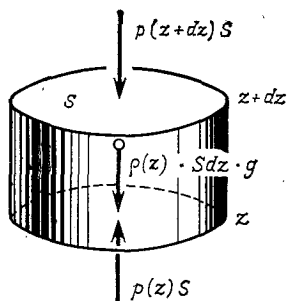
$$\frac{(\gamma - 1) mg}{\gamma R} = \frac{0,41 \cdot 29 \cdot 980}{1,41 \cdot 8,3 \cdot 10^7} = 1,00 \cdot 10^{-4} \text{ град/см} = 10,0 \text{ град/км},$$

т. е. при увеличении высоты на 1 км температура уменьшается на 10° С.

**З а м е ч а н и е.** В тропосфере (атмосфере) имеются восходящие и нисходящие потоки воздуха. Так как теплопроводность воздуха пренебрежимо мала, то можно считать, что при движении воздуха с ним происходят адиабатические процессы. Поэтому наличие таких потоков не должно влиять на полученный результат. Однако на самом деле уменьшение температур составляет 6° С на каждый километр высоты. Расхождение связано с различными явлениями, происходящими в атмосфере, типа конденсации водяного пара.

9. Так как в изотермическом процессе внутренняя энергия идеального газа не меняется, то поглощаемая в таком процессе энергия равна производимой работе  $\int pdV$ . Следовательно, в процессе 1 → 2 для  $n$  молей газа

$$Q_1 = \int_{V_1}^{V_2} nRT \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (1)$$



Ф и г. 15.

Аналогичным образом в процессе  $3 \rightarrow 4$

$$Q_2 = \int_{V_3}^{V_4} nRT_2 \frac{dV}{V} = nRT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}. \quad (2)$$

Для процесса, изображенного на фиг. 11,  $Q_1 > 0$  и  $Q_2 < 0$ , так как  $V_2 > V_1$  и  $V_3 > V_4$ . Для адиабатических участков  $2 \rightarrow 3$  и  $4 \rightarrow 1$  имеем

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, \quad T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \quad (3)$$

(из уравнения Пуассона  $pV^\gamma = \text{const}$  или  $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ ; см. пример 6). Из соотношения (3) следует, что  $(V_2/V_1)^{\gamma-1} = (V_3/V_4)^{\gamma-1}$ , или  $V_2/V_1 = V_3/V_4$ . Следовательно, из (1) и (2) получаем

$$\frac{Q_1}{T_1} = -\frac{Q_2}{T_2}.$$

10. Согласно определению, количество тепла  $d'Q$ , поглощенное в процессе, равно  $C_x dT$ , поэтому

$$C_x dT \equiv d'Q = C_V dT + p dV = C_V dT + (C_p - C_V) \frac{T dV}{V},$$

где мы воспользовались соотношениями  $p = nRT/V$  и  $C_p - C_V = nR$ . Отсюда следует равенство

$$(C_x - C_V) \frac{dT}{T} = (C_p - C_V) \frac{dV}{V},$$

исключив из которого  $dT/T$  с помощью соотношения

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V},$$

получим

$$(C_x - C_V) \frac{dp}{p} = (C_p - C_x) \frac{dV}{V}.$$

Введя обозначение  $f = (C_x - C_p)/(C_x - C_V)$ , получаем,

$$\ln p + f \ln V = \text{const},$$

или

$$pV^f = \text{const}.$$

11. Свободное расширение не является квазистатическим процессом. Следовательно, хотя начальное и конечное состояния 1 и 2 относятся к числу термически равновесных состояний, давление  $p^{(e)}$  в выражении для работы  $d'A = -p^{(e)}dV$  не определяется из уравнения состояния газа, а представляет собой внешнее давление. Последнее в случае свободного расширения равно нулю.

Следовательно, при свободном расширении газ не совершает работы, т. е.  $A_{1 \rightarrow 2} = 0$ . Так как тепло при этом также не поглощается, то  $Q_{1 \rightarrow 2} = 0$  и внутренняя энергия  $U$  не меняется. Следовательно, и температура остается постоянной:  $T_1 = T_2$ , так как газ предполагается идеальным.

Если состояние 3 получается из состояния 2 в результате квазистатического сжатия при постоянном давлении, то работа, производимая над газом при переходе  $2 \rightarrow 3$ , имеет вид

$$A_{2 \rightarrow 3} = - \int_{V_2}^{V_1} p_2 dV = p_2 (V_2 - V_1).$$

При этом температура меняется от  $T_2$  до  $T_3$  и, следовательно, газ охлаждается. Количество тепла, полученное газом, равно

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \int_{T_2}^{T_3} C_p dT = C_p (T_3 - T_2) < 0,$$

где  $C_p$  — молярная теплоемкость при постоянном давлении. В процессе  $3 \rightarrow 1$ , представляющем собой квазистатическое нагревание при постоянном объеме, работа не совершается, т. е.  $A_{3 \rightarrow 1} = 0$ . Если  $C_v$  — молярная теплоемкость при постоянном объеме, то поглощенное тепло можно записать в виде

$$Q_{3 \rightarrow 1} = \int_{T_3}^{T_1} C_v dT = C_v (T_1 - T_3).$$

Из первого закона термодинамики следует, что для замкнутого цикла сумма всего полученного тепла и произведенной работы должна быть равна нулю. Следовательно,

$$Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 1} + A_{1 \rightarrow 2} + A_{2 \rightarrow 3} + A_{3 \rightarrow 1} = 0.$$

Подставляя сюда найденные выше выражения для каждого из слагаемых, находим

$$(C_p - C_v)(T_3 - T_1) + p_2 (V_2 - V_1) = 0. \quad (1)$$

Из уравнения состояния для 1 моль идеального газа  $pV = RT$  имеем

$$p_2 V_2 = RT_1, \quad p_2 V_1 = RT_3$$

и

$$p_2 (V_2 - V_1) = R (T_1 - T_3).$$

Подставляя в (1) последнее из этих равенств, получаем требуемое соотношение

$$(C_p - C_v)(T_3 - T_1) + R (T_1 - T_3) = 0$$



или

$$C_p - C_v = R.$$

12. Критическим является такое состояние, в котором  $p$ ,  $T$  и  $V$  одновременно удовлетворяют следующим соотношениям:  $(\partial p/\partial V)_T = 0$ ,  $(\partial^2 p/\partial V^2)_T = 0$  и уравнению состояния. Так как

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = p \left[ -(V-nb)^{-1} + \frac{na}{RTV^2} \right],$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T = p \left[ -(V-nb)^{-1} + \frac{na}{RTV^2} \right]^2 + p \left[ (V-nb)^{-2} - \frac{2na}{RTV^3} \right],$$

то из условия  $(\partial p/\partial V)_T = 0$  следует

$$\frac{V^2}{V-nb} = \frac{na}{RT}, \quad (1)$$

а из условия  $(\partial^2 p/\partial V^2)_T = 0$  имеем

$$\frac{V^3}{(V-nb)^2} = \frac{2na}{RT}. \quad (2)$$

Поделив обе части уравнения (2) на соответствующие части уравнения (1), получаем

$$\frac{V_c}{V_c-nb} = 2, \quad V_c = 2nb.$$

Для определения критической температуры  $T_c$  подставим найденное значение  $V_c$  в (1). Тогда

$$T_c = \frac{na(V_c-nb)}{RV_c^2}.$$

Подставим в уравнение состояния выражения для  $V_c$  и  $T_c$ . Это даст

$$p_c = \frac{nRT_c}{V_c-nb} \exp\left(-\frac{na}{RT_cV_c}\right) = \frac{a}{4b^2e^2}.$$

Введем теперь приведенные величины  $p = p/p_c$ ,  $t = T/T_c$ ,  $v = V/V_c$ , чтобы получить закон «соответственных состояний». Подставляя  $nRT_c/p_cV_c = 1/2e^2$ ,  $nb/V_c = 1/2$  и  $na/RT_cV_c = 2$  в выражение

$$p = \frac{nRT_c t}{p_c V_c (v - nb/V_c)} \exp\left(-\frac{na}{RT_c V_c t v}\right),$$

получаем

$$p = \frac{te^2/2}{v-1/2} \exp\left(-\frac{2}{tv}\right).$$

13. Согласно соотношению (1.15), внутренняя энергия смеси химически нейтральных идеальных газов равна сумме внутренних энергий отдельных компонентов. Если масса  $i$ -го компонента газа

равна  $M_i$ , а ее удельная теплоемкость при постоянном объеме  $c_{Vi}$ , то

$$M du = \sum_i M_i c_{Vi} dT,$$

где  $M = \sum_i M_i$  — полная масса смеси,  $u$  — внутренняя энергия единицы массы смеси. Теплоемкость смеси при постоянном объеме определяется соотношением

$$c_V = \frac{du}{dT} = \sum_i \frac{M_i c_{Vi}}{M}.$$

Для воздуха она принимает следующее значение:  $c_V = 0,23 \times 0,158 + 0,77 \cdot 0,176 = 0,036 + 0,136 = 0,172$  кал/г·град.

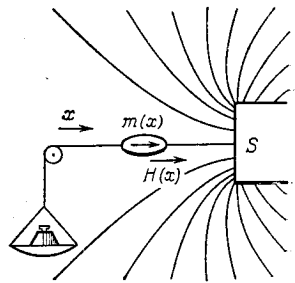
14. Возьмем в качестве оси  $x$  прямую, проходящую через иглолку и через прямоугольный постоянный магнит, как показано на фиг. 16. При этом направление магнитного поля  $H_S$  также будет совпадать с осью  $x$ . Поле  $H_S(x)$  равно нулю при  $x = -\infty$  и монотонно возрастает при увеличении  $x$ . Игла медленно подносится к магниту вдоль оси  $x$  от  $-\infty$  до точки  $x$ , где приобретает магнитный момент  $m$ , направленный, конечно, вдоль оси иглолки. Размагничивающее поле иглолки, направленное навстречу полю постоянного магнита  $H_S$ , можно считать пренебрежимо малым. Так как размеры иглолки невелики, ее можно рассматривать как магнитный диполь с магнитным моментом  $m(x)$ , зависящим от координаты  $x$ . Сила, действующая на иглолку, определяется выражением

$$K(x) = m(x) \frac{dH(x)}{dx}. \quad (1)$$

Чтобы иглолка перемещалась от  $x = -\infty$  до точки  $x = x_1$  бесконечно медленно, нужно ее удерживать с силой, незначительно меньшей  $-K(x)$ . Производимая этой силой работа (получаемая за счет механического источника, например при перемещении груза в поле тяжести) над системой иглолка — магнит имеет вид

$$A_1 = - \int_{-\infty}^{x_1} K(x) dx = - \int_{-\infty}^{x_1} m(x) \frac{dH(x)}{dx} dx \left[ = - \int_0^{H(x_1)} m dH \right]. \quad (2)$$

Однако только часть этой работы идет на намагничивание иглолки, остальная работа расходуется на создание запаса потенциальной энергии. Если магнитный диполь с магнитным моментом



Ф и г. 16.

$m(x) = m_1$  поместить в поле  $H(x_1)$ , то его потенциальная энергия равна  $-m_1 H(x_1)$  (энергия взаимодействия между диполем и постоянным магнитом). Чтобы вычесть ее из (2), рассмотрим следующий процесс: пусть нам некоторым способом удалось зафиксировать намагниченность иголки  $m_1 = m(x_1)$ , после чего мы ее перемещаем из точки  $x_1$  на  $-\infty$ . При этом постоянный магнит будет притягивать иголку с силой

$$K(x) = m_1 \frac{dH(x)}{dx}; \quad (3)$$

таким образом, внешний механический источник должен совершить работу

$$\begin{aligned} A_2 &= - \int_{x_1}^{-\infty} K'(x) dx = m_1 \int_{-\infty}^{x_1} \frac{dH(x)}{dx} dx = \\ &= m_1 H(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{d[m(x)H(x)]}{dx} dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Следовательно, работа, необходимая только для намагничивания иголки, будет иметь вид

$$A_1 + A_2 = \int_{-\infty}^{x_1} H(x) \frac{dm(x)}{dx} dx = \int_0^{m_1} H dm. \quad (5)$$

**З а м е ч а н и е.** Если рассматривать иголку и постоянный магнит как единую термодинамическую систему, то их энергия взаимодействия войдет во внутреннюю энергию системы  $U'$ . Если  $U$  — внутренняя энергия иголки, то

$$U' = U - Hm + \text{const},$$

так что

$$dU' = dU - H dm - m dH = -m dH.$$

Отметим зависимость величин  $U$  и  $U'$  от определения термодинамических систем. Несмотря на свою очевидность, она часто приводит к недоразумениям.

15. Так как плотность воздуха  $\rho$  зависит от высоты  $z$ , столб воздуха нельзя считать однородной системой. Тем не менее в состоянии теплового равновесия температура  $T$  должна быть однородной. Если неоднородную систему можно разбить на такие части (подсистемы), что каждую из них допустимо считать однородной, а взаимодействие между ними пренебрежимо малым, то энергия полной системы будет равна сумме энергий ее частей. Цилиндрический объем, лежащий между  $z$  и  $z + dz$ , можно считать однородной подсистемой такого рода с внутренней энергией

$\rho(z) Su(T) dz$  и потенциальной энергией  $\rho(z) Sgz dz$ , где  $S$  — площадь поперечного сечения цилиндра,  $u(T)$  — внутренняя энергия единицы массы воздуха, рассматриваемого как идеальный газ, а  $g$  — ускорение силы тяжести. Так как суммарная энергия слоя, лежащего между  $z$  и  $z + dz$ , равна  $S [u(T) + g(z)] \rho(z) dz$ , то полная энергия всего воздуха в цилиндрическом объеме от  $z = 0$  до  $z = \infty$  имеет вид

$$E(T) = S \int_0^{\infty} [u(T) + gz] \rho(z) dz.$$

Зависимость  $\rho$  от высоты определяется уравнением  $dp(z)/dz = -\rho(z)g$  (см. решение задачи 8). Чтобы исключить  $p(z)$ , продифференцируем уравнение состояния  $p(z) = RT\rho(z)/m$ ; тогда

$$\frac{d\rho(z)}{dz} = -\frac{\rho(z)mg}{RT},$$

откуда

$$\ln \rho(z) = -\frac{mgz}{RT} + \text{const},$$

или

$$\rho(z) = \rho(0) e^{-mgz/RT}.$$

Вместо плотности воздуха  $\rho(0)$  вблизи поверхности Земли при  $z = 0$  удобнее ввести полную массу воздуха в цилиндрическом объеме

$$M = \int_0^{\infty} \rho(z) S dz = \rho(0) S \int_0^{\infty} e^{-mgz/RT} dz = \frac{\rho(0) SRT}{mg},$$

что дает

$$S\rho(z) = \frac{Mmg}{RT} e^{-mgz/RT}.$$

С помощью этого соотношения получаем энергию рассматриваемого объема воздуха

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_0^{\infty} [u(T) + gz] \frac{Mmg}{RT} e^{-mgz/RT} dz = \\ &= M \int_0^{\infty} \left[ u(T) + \frac{RT\xi}{m} \right] e^{-\xi} d\xi = \\ &= M \left[ u(T) + \frac{RT}{m} \int_0^{\infty} \xi e^{-\xi} d\xi \right] = M \left[ u(T) + \frac{RT}{m} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что энергия является функцией только температуры. Теплоемкость определяется выражением

$$C = \frac{dE(T)}{dT} = M \left( \frac{du}{dT} + \frac{R}{m} \right) = M \left( c_v + \frac{R}{m} \right).$$

Воспользовавшись соотношением Майера  $c_p = c_v + R/m$ , получаем

$$C = M c_p.$$

16. Количество тепла, полученное системой в квазистатическом процессе, определяется первым законом термодинамики  $d'Q = dU + p dV$ . Если считать внутреннюю энергию функцией от  $T$  и  $V$ , то

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV.$$

Тогда первый закон термодинамики принимает вид

$$d'Q = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] dV. \quad (1)$$

Для энтальпии  $H = U + pV$  имеем соотношение

$$dH = dU + p dV + V dp,$$

откуда

$$dU + p dV = dH - V dp.$$

Следовательно, можно записать

$$d'Q = dH - V dp.$$

Удобно рассматривать  $H$  как функцию от  $T$  и  $p$ :

$$dH = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_T dp.$$

При этом выражение для количества теплоты запишется следующим образом:

$$d'Q = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT + \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_T - V \right] dp. \quad (2)$$

а) Теплоемкость при постоянном объеме равна производной  $d'Q/dT$  при  $dV = 0$ , поэтому из (1) вытекает, что  $C_V = (\partial U/\partial T)_V$ . При постоянном давлении  $dp = 0$ , тогда из (2) следует  $C_p = (\partial H/\partial T)_p$ .

б) Как было показано в решении примера 2, теплоемкость при постоянном давлении можно получить из соотношения (1), если считать  $V$  функцией от  $p$  и  $T$ , определяемой уравнением состояния, и подставить в (1)  $dV = (\partial V/\partial T)_p dT + (\partial V/\partial p)_T dp$ , что дает

$$d'Q = C_V dT + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T dp \right].$$

Если положить здесь  $dp=0$ , то для производной  $d'Q/dT$  получим

$$C_p = C_v + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p.$$

Это первое из равенств «б». Чтобы получить второе, выведем из соотношения (2) выражение для  $C_v$ . Так как  $dp = (\partial p/\partial T)_V dT + (\partial p/\partial V)_T dV$ , то

$$d'Q = C_p dT + \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_T - V \right] \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T dV \right].$$

При  $dV=0$  производная  $d'Q/dT$  равна

$$C_v = C_p + \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_T - V \right] \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V.$$

Подставляя сюда соотношение «в», получаем второе из равенств «б».

в) Так как  $H = U + pV$ , то

$$\left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_T = \left( \frac{\partial U}{\partial p} \right)_T + \left( \frac{\partial (pV)}{\partial p} \right)_T = \left( \frac{\partial U}{\partial p} \right)_T + p \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T + V.$$

г) Так как  $(\partial V/\partial T)_p = 1/(\partial T/\partial V)_p$ , первое из равенств «б» можно записать в виде

$$(C_p - C_v) \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_p = \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p.$$

Считая обе части этого соотношения функциями от  $p$  и  $V$ , продифференцируем их по  $p$ ; тогда

$$(C_p - C_v) \frac{\partial^2 T}{\partial p \partial V} + \left( \frac{\partial C_p}{\partial p} \right)_V \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_p - \left( \frac{\partial C_v}{\partial p} \right)_V \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_p = \left( \frac{\partial (\partial U/\partial V)_T}{\partial p} \right)_V + 1. \quad (3)$$

Рассмотрим теперь третий член в левой части и первый член в правой части этого уравнения. Хотя они являются частными производными по  $p$  при постоянном  $V$ , для удобства будем считать  $C_p$  и  $(\partial U/\partial T)_V$  функциями от переменных  $T$  и  $V$ . Если в теплоемкости  $C_v(T, V)$  переменную  $T$  считать функцией от  $p$  и  $V$ , определяемой уравнением состояния, то можно записать

$$\left( \frac{\partial C_v}{\partial p} \right)_V = \frac{\partial C_v(T(p, V), V)}{\partial p} = \left( \frac{\partial C_v}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_V.$$

Аналогичным образом, если считать аргумент  $T$  функции  $(\partial U/\partial V)_T = \partial U(T, V)/\partial V$  функцией от  $p$  и  $V$ , то для того, чтобы получить частную производную по  $p$ , нужно сначала продифференцировать по  $T$ , а затем умножить на частную производную от  $T$  по  $p$ :

$$\left( \frac{\partial (\partial U/\partial V)_T}{\partial p} \right)_V = \frac{\partial^2 U(T, V)}{\partial T \partial V} \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_V = \left( \frac{\partial C_v}{\partial V} \right)_T \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_V,$$

откуда

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial C_V}{\partial p} \right)_V \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_p - \frac{\partial(\partial U/\partial V)_T}{\partial p} = \\ & = \left[ \left( \frac{\partial C_V}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_p + \left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T \right] \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_V. \end{aligned} \quad (4)$$

С другой стороны, считая  $T$  в функции  $C_V(T, V)$  функцией от  $p$  и  $V$ , получаем выражение

$$\left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_p = \frac{\partial C_V(T(p, V), V)}{\partial V} = \left( \frac{\partial C_V}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_p + \left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T,$$

с помощью которого соотношение (4) можно переписать в виде

$$\left( \frac{\partial C_V}{\partial p} \right)_V \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_p - \frac{\partial(\partial U/\partial V)_T}{\partial p} = \left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_p \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_V.$$

Подставляя это равенство в (3), получаем требуемое соотношение.

17. Используя решение задачи 5, а также следующие соотношения:  $c^2 = \gamma p/\rho$ ,

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M} = \frac{(C_p - C_V) T}{M} = (c_p - c_V) T = (\gamma - 1) c_V T,$$

получаем, что  $c^2 = \gamma (\gamma - 1) c_V T$ , или  $c_V T = c^2/[\gamma (\gamma - 1)]$ . Кроме того, нам известно, что  $u = c_v T + \text{const}$  и

$$\begin{aligned} h &= u + pv = u + (c_p - c_v) T = u + (\gamma - 1) c_v T = \\ &= \gamma c_v T + \text{const}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы пришли к искомому результату.

18. Выражение для работы в постоянном магнитном поле  $H$  имеет вид  $d'A = HdI$ , поэтому из первого закона термодинамики следует, что поглощаемое тепло определяется соотношением

$$d'Q = dU - d'A = dU - HdI.$$

Если считать  $U$  и  $I$  функциями от температуры  $T$  и магнитного поля  $H$ , то

$$\begin{aligned} dU &= \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_H dT + \left( \frac{\partial U}{\partial H} \right)_T dH, \\ dI &= \left( \frac{\partial I}{\partial T} \right)_H dT + \left( \frac{\partial I}{\partial H} \right)_T dH \end{aligned}$$

и

$$d'Q = \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_H - H \left( \frac{\partial I}{\partial T} \right)_H \right] dT + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial H} \right)_T - H \left( \frac{\partial I}{\partial H} \right)_T \right] dH.$$

Искомая теплоемкость  $C_H$  равна  $d'Q/dT$  при  $dH = 0$ . Таким образом, мы нашли решение задачи.

19. Для единичного объема магнитного вещества, участвующего в квазистатическом процессе, первый закон термодинамики записывается в виде

$$d'Q = dU - HdM$$

[согласно уравнению (1.5) и примеру 1]. Сравнивая это выражение с аналогичным соотношением для газа:  $d'Q = dU + pdV$ , находим соответствие  $p \rightarrow -H$ ,  $V \rightarrow M$ . Так как величины

$$\chi_T = \left( \frac{\partial M}{\partial H} \right)_T \quad \text{и} \quad \chi_{ад} = \left( \frac{\partial M}{\partial H} \right)_{ад}$$

соответствуют величинам  $1/(\partial p/\partial V)_T$  и  $1/(\partial p/\partial V)_{ад}$ , то искомый результат можно получить, обращаясь к решению примера 7 и действуя аналогичным образом.

20. Внутренняя энергия теплового излучения в замкнутой полости с объемом  $V$  определяется выражением  $U = Vu = \sigma VT^4$ . Так как давление  $p = u/3 = \sigma T^4/3$  не зависит от  $V$ , величины  $p$  и  $T$  не являются независимыми. Поэтому в качестве переменных естественно выбрать  $(V, T)$  или  $(V, p)$ . Для квазистатического процесса первый закон термодинамики записывается в виде

$$dU = d'Q - pdV.$$

Подставляя сюда выражения для  $U$  и  $p$ , получаем

$$d'Q = d(\sigma VT^4) + \frac{1}{3} \sigma T^4 dV = \frac{4}{3} \sigma T^4 dV + 4\sigma T^3 V dT.$$

Следовательно, условие адиабатичности принимает вид

$$\frac{4}{3} \sigma T^4 V \left( \frac{dV}{V} + 3 \frac{dT}{T} \right) = 0,$$

или после интегрирования

$$\ln V + 3 \ln T = \text{const}, \quad VT^3 = \text{const}.$$

Используя уравнение состояния, находим

$$pV^{4/3} = \text{const}.$$

Теплоемкость при постоянном объеме равна

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 4\sigma T^3 V,$$



Ф и г. 17.



а теплоемкость при постоянном давлении можно считать бесконечной, так как при фиксированном давлении температура излучения в полости не может меняться.

Как показано на фиг. 17, цикл Карно образуется квазистатическими процессами, при которых система переходит из состояния 1 в состояние 2 путем изотермического расширения, из состояния 2 в состояние 3 путем адиабатического расширения, из состояния 3 в состояние 4 путем изотермического сжатия и возвращается в состояние 1 путем адиабатического сжатия. Пусть в процессе  $1 \rightarrow 2$  объем возрастает от  $V_1$  до  $V_2$  при постоянной температуре  $T_1$ . Работа, получаемая тепловым излучением, записывается в виде

$$A_{1 \rightarrow 2} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = - \frac{1}{3} \sigma T_1^4 (V_2 - V_1),$$

а полученное тепло

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{4}{3} \sigma T_1^4 \int_{V_1}^{V_2} dV = \frac{4}{3} \sigma T_1^4 (V_2 - V_1).$$

Следовательно, их сумма

$$A_{1 \rightarrow 2} + Q_{1 \rightarrow 2} = \sigma T_1^4 (V_2 - V_1)$$

соответствует возрастанию внутренней энергии. Очевидно, что для про-

цесса  $2 \rightarrow 3$   $Q_{2 \rightarrow 3} = 0$ , а чтобы вычислить  $A_{2 \rightarrow 3} = - \int_{V_2}^{V_3} p dV$ ,

воспользуемся соотношением

$$pV^{4/3} = p_1 V_2^{4/3} = \frac{1}{3} \sigma T_1^4 V_2^{4/3}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} A_{2 \rightarrow 3} &= - \frac{1}{3} \sigma T_1^4 V_2^{4/3} \int_{V_2}^{V_3} V^{-4/3} dV = \sigma T_1^4 V_2^{4/3} (V_3^{-1/3} - V_2^{-1/3}) = \\ &= \sigma T_1^4 V_2^{4/3} V_3^{-1/3} - \sigma T_1^4 V_2. \end{aligned}$$

Из равенства  $V_2 T_1^3 = V_3 T_3^3$  находим температуру системы в состоянии 3. Она равна  $T_3 = T_1 (V_2/V_3)^{1/3}$ , откуда

$$A_{2 \rightarrow 3} = \sigma T_3^4 V_3 - \sigma T_1^4 V_2.$$

При этом происходит также увеличение внутренней энергии. (Действительно,  $Q_{2 \rightarrow 3} = 0$ , поэтому в силу первого закона термодинамики должна возрасти внутренняя энергия.) В процессе

3 → 4 температура постоянна и

$$Q_{3 \rightarrow 4} = \frac{4}{3} \sigma T_3^4 (V_4 - V_3),$$

$$A_{3 \rightarrow 4} = -\frac{1}{3} \sigma T_3^4 (V_4 - V_3).$$

Для процесса 4 → 1 имеем  $Q_{4 \rightarrow 1} = 0$  и  $A_{4 \rightarrow 1} = \sigma T_3^4 V_4 - \sigma T_1^4 V_1$ .

Так как  $V_2 > V_1$ , то  $Q_{1 \rightarrow 2} > 0$ . Это означает, что происходит поглощение тепла от теплового резервуара (с температурой  $T_1$ ). Из равенств  $V_2 T_1^3 = V_3 T_3^3$  и  $V_4 T_3^3 = V_1 T_1^3$  вытекает, что  $V_3/V_4 = V_2/V_1 > 1$ . Следовательно,  $Q_{3 \rightarrow 4} < 0$ . Это в свою очередь означает, что теплота передается более холодному теплому резервуару (с температурой  $T_3$ ), так как  $T_3 = T_1 (V_2/V_3)^{1/3} < T_1$  в силу того, что  $V_3 > V_2$ . Полная энергия, полученная системой от теплового резервуара  $Q_{1 \rightarrow 2} - |Q_{3 \rightarrow 4}| = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{3 \rightarrow 4}$ , равна полной произведенной работе  $-(A_{1 \rightarrow 2} + A_{2 \rightarrow 3} + A_{3 \rightarrow 4} + A_{4 \rightarrow 1})$ . Поэтому

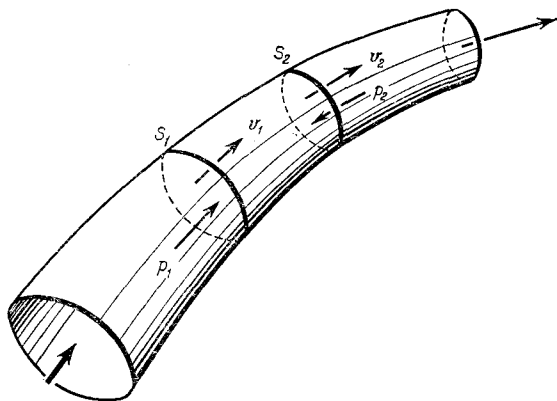
$$\frac{Q_{3 \rightarrow 4}}{T_3} = \frac{4}{3} \sigma T_3^3 (V_4 - V_3) = \frac{4}{3} \sigma T_1^3 (V_1 - V_2) = -\frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{T_1},$$

откуда следует уравнение Клаузиуса  $Q_{1 \rightarrow 2}/T_1 + Q_{3 \rightarrow 4}/T_3 = 0$ .

21 (См. пример 9). В стационарном потоке линии токов не изменяются со временем. В целом жидкость не находится в состоянии термодинамического равновесия, так как из-за движения жидкости скорость  $v$ , плотность  $\rho$  и давление  $p$  являются функциями точки. Однако можно считать, что достаточно малые элементы объема находятся в состоянии термодинамического равновесия (локального равновесия), т. е. можно считать, что изменения их состояния происходят квазистатически. В таком случае давление полностью определяется плотностью и температурой элемента объема с помощью уравнения состояния.

Из уравнения неразрывности жидкости следует, что количество жидкости, проходящей за единицу времени через поперечное сечение  $S_1$  трубки тока, перпендикулярное направлению потока, как показано на фиг. 18, равно количеству жидкости, проходящему за то же время через другое сечение  $S_2$ , т. е.  $\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$ . Обозначая через  $l$  расстояние вдоль трубки тока, можно записать  $\partial(\rho S v)/\partial l = 0$ . Теперь применим первый закон термодинамики к объему жидкости, заключенному между сечениями  $S_1$  и  $S_2$ , расположенными на расстоянии  $dl$  друг от друга. Так как мы пренебрегаем теплопроводностью, можно не рассматривать теплообмен этого объема жидкости с окружающей средой. Если пренебречь еще вязкостью и гравитационной силой, то совершаемая работа будет выражаться только через внешние давления  $p_1$  на поверхность  $S_1$  и  $p_2$  на  $S_2$ . Работа, совершаемая над жидкостью за единицу времени, равна  $p_1 S_1 v_1 - p_2 S_2 v_2$ . Для бесконечно малого  $dl$

она равна  $-dl\partial(pSv)/\partial l$ . Будем считать, что плотность внутренней энергии  $u$  жидкости с помощью уравнения состояния можно выразить через плотность  $\rho$  и температуру  $T$ . Элемент объема жидкости, находившийся в момент времени  $t$  между сечениями  $S_1$



Ф и г. 18.

и  $S_2$ , по истечении интервала времени  $dt$  будет расположен между сечениями, смещенными относительно  $S_1$  и  $S_2$  на  $v_1 dt$  и  $v_2 dt$  соответственно. Поэтому его энергия возрастает на величину

$$-\rho_1 \left( u_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right) S_1 v_1 dt + \rho_2 \left( u_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \right) S_2 v_2 dt.$$

В первом порядке по  $dl$  возрастание энергии на единицу объема будет равно

$$dl \frac{\partial \left[ \rho S v \left( u + \frac{1}{2} v^2 \right) \right]}{\partial l}.$$

В силу первого закона термодинамики это приращение энергии должно быть равно ранее полученному выражению для совершенной работы, т. е.

$$\frac{\partial \left[ \rho S v \left( u + \frac{1}{2} v^2 \right) \right]}{\partial l} = - \frac{\partial (p S v)}{\partial l}.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\frac{\partial \left[ \rho S v \left( u + \frac{1}{2} v^2 + p/\rho \right) \right]}{\partial l} = 0.$$

С помощью уравнения неразрывности  $\partial(\rho Sv)/\partial l = 0$  получаем

$$\frac{\partial \left( u + \frac{1}{2} v^2 + p/\rho \right)}{\partial l} = 0.$$

Отсюда следует, что сумма  $u + p/\rho + 1/2 v^2$  постоянна вдоль линии тока. Так как величина  $1/\rho$  представляет собой удельный объем, то  $h = u + p/\rho$  есть плотность энтальпии,  $1/2 v^2$  — кинетическая энергия единицы массы.

22. В предыдущей задаче мы нашли, что сумма плотности энтальпии  $h$  и кинетической энергии  $1/2 v^2$  постоянна вдоль линии тока. Для идеального газа с постоянной удельной теплоемкостью из уравнения для внутренней энергии  $u = c_p T + \text{const}$  следует, что  $h = u + p/\rho = c_p T + \text{const}$ . Следовательно, для него величина  $c_p T + 1/2 v^2$  постоянна вдоль линий тока. При адиабатическом изменении состояния идеального газа величина  $p^{(1-\gamma)/\gamma} T$  постоянна, поэтому она должна быть постоянна также и вдоль линий тока. Если теперь мы предположим, что в камере с перегретым паром, где он находится при температуре  $T = 300^\circ \text{C} = 573^\circ \text{K}$  и давлении  $p = 5 \text{ атм}$ , скорость потока равна нулю, то

$$c_p T + \frac{1}{2} v^2 = 0,49 \cdot 573 = 281 \text{ кал/г} = 1,174 \cdot 10^{10} \text{ см}^2/\text{сек}^2.$$

Когда  $p = 1 \text{ атм}$ , температура становится равной

$$T = 573 \cdot \left( \frac{1}{5} p \right)^{0,33/1,33} \text{ } ^\circ\text{K} = 573 \cdot 5^{-0,248} \text{ } ^\circ\text{K}.$$

Для вычисления  $x = 5^{-0,248}$  возьмем логарифм правой и левой частей:

$$\lg x = -0,248 \lg 5 = -0,248 \cdot 0,699 = -0,1734 = \bar{1},8266,$$

откуда следует, что  $x = 0,671$ . Таким образом,

$$T = 573 \cdot 0,671 = 384^\circ \text{K} = 111^\circ \text{C}.$$

Теперь нетрудно получить верхний предел скорости  $v^2 = 2(1,174 \cdot 10^{10} - 0,49 \cdot 384 \cdot 4,18 \cdot 10^7) = 0,774 \cdot 10^{10} \text{ см}^2/\text{сек}^2$ , т. е.  $v = 880 \text{ м/сек}$ .

23. Пусть независимыми переменными системы  $A$  будут  $p_A$  и  $v_A$ , а переменными систем  $B$  и  $C$  — соответственно  $p_B$ ,  $v_B$  и  $p_C$ ,  $v_C$ . Если  $A$  и  $B$  находятся в равновесии, то между четырьмя переменными  $p_A$ ,  $v_A$ ,  $p_B$  и  $v_B$  существует некоторое соотношение. Запишем его следующим образом:

$$F_3(p_A, v_A, p_B, v_B) = 0. \quad (1)$$

Аналогично, если  $B$  и  $C$  находятся в равновесии, то будет иметь место соотношение

$$F_1(p_B, v_B, p_C, v_C) = 0. \quad (2)$$

Согласно нулевому закону термодинамики,  $A$  и  $C$  также находятся в равновесии, тогда из (1) и (2) следует, что должно иметь место соотношение

$$F_2(p_A, v_A, p_C, v_C) = 0. \quad (3)$$

Если разрешить (1) и (2) относительно  $p_B$

$$p_B = \varphi_1(p_A, v_A, v_B), \quad p_B = \varphi_3(p_C, v_C, v_B),$$

то соотношение

$$\varphi_1(p_A, v_A, v_B) = \varphi_3(p_C, v_C, v_B) \quad (4)$$

должно быть эквивалентно уравнению (3). Следовательно, соотношение (4) должно не зависеть от  $v_B$  и должно быть эквивалентно соотношению типа

$$f_1(p_A, v_A) = f_3(p_C, v_C). \quad (5)$$

[Это означает, например, что  $\varphi_1(p_A, v_A, v_B) = f_1(p_A, v_A) \eta(v_B) + \zeta(v_B)$ ,  $\varphi_3(p_C, v_C, v_B) = f_3(p_C, v_C) \eta(v_B) + \zeta(v_B)$ .] Следовательно, (3) и (5) должны быть эквивалентны. Таким же образом можно показать, что (1) и (2) эквивалентны соответственно соотношениям

$$f_1(p_A, v_A) = f_2(p_B, v_B), \quad (6)$$

$$f_2(p_B, v_B) = f_3(p_C, v_C). \quad (7)$$

[Идентичность функций  $f_1$  в (5) и (6),  $f_2$  в (6) и (7) и  $f_3$  в (5) и (7) следует из нулевого закона термодинамики.] Если теперь ввести величину

$$\theta = f_1(p_A, v_A),$$

характеризующую тепловое равновесие, то она будет представлять собой не что иное, как температуру в некоторой шкале. Условием равновесия между системами  $A$  и  $B$  будет равенство между собой величин  $\theta_A$  и  $\theta_B$ .

24. При рассмотрении общего случая магнитного тела произвольной формы приходится учитывать влияние размагничивающего поля образца и неоднородности поля  $H$ , намагниченности  $M$  и плотности потока  $B$ . Поэтому с самого начала будем исходить из уравнений Максвелла. Эквивалентом закона Ампера является первое уравнение Максвелла, в котором предполагается, что намагничивание происходит достаточно медленно, чтобы можно было пренебречь токами смещения

$$\text{rot } H = \frac{4\pi}{c} j \quad (\text{первое уравнение Максвелла}). \quad (1)$$

Здесь  $j$  — плотность тока, протекающего по проводу катушки. Если магнитное тело неподвижно, то закон индукции Фарадея имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{второе уравнение Максвелла}), \quad (2)$$

где  $\mathbf{E}$  — электрическое поле. Плотность магнитного потока удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{четвертое уравнение Максвелла}). \quad (3)$$

Магнитное поле  $\mathbf{H}$  является суммой поля  $\mathbf{H}_J$  тока в катушке и поля  $\mathbf{H}_M$ , связанного с намагниченностью:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_J + \mathbf{H}_M.$$

Как известно, поля  $\mathbf{H}_J$  и  $\mathbf{H}_M$  удовлетворяют следующим уравнениям, которые вытекают из (1) и (3):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_J = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H}_J = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_M = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H}_M = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{M}.$$

Силовые линии поля  $\mathbf{H}_J$  замкнуты и проходят вокруг катушки, а поле  $\mathbf{H}_M$  — безвихревое и его силовые линии соединяют положительный и отрицательный полюсы магнитного тела. Поле  $\mathbf{H}_M$  обладает (псевдо)скалярным потенциалом и определяется кулоновским законом. Следовательно, интегрирование по всему пространству дает

$$\int \mathbf{H}_J \cdot \mathbf{H}_M dV = - \int \mathbf{H}_J \cdot \operatorname{grad} \varphi dV = \int \varphi \operatorname{div} \mathbf{H}_J dV = 0. \quad (4)$$

Мы предположили, что на бесконечности поле обращается в нуль. Умножим теперь скалярно уравнение (1) на  $c\mathbf{E}/4\pi$ , уравнение (2) на  $-c\mathbf{H}/4\pi$ , затем сложим их и проинтегрируем полученную сумму по всему пространству. Правая часть принимает вид

$$\int (\mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}) dV = \int \operatorname{div} [\mathbf{H} \times \mathbf{E}] dV = 0.$$

Поэтому для левой части можно записать

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV + \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV = 0. \quad (5)$$

Первый из этих двух интегралов нужно брать по области, где ток  $\mathbf{j}$  отличен от нуля, т. е. в проводах катушки и в батарее. Если удельное сопротивление проводов или батареи равно  $\rho$ , то из закона Ома  $\mathbf{E} + \mathbf{F} = \rho \mathbf{j}$  находим

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV = \int \rho j^2 dV - \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{j} dV.$$

Здесь  $F$  — э. д. с. батареи, а  $\int F \cdot j dV$  — работа, производимая батареей за единицу времени при прохождении тока  $j$ . Если температура полной системы сохраняется постоянной, то интеграл  $\int \rho j^2 dV$  определяет долю работы, растрачиваемой на джоулево тепло. Второй интеграл в (5) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV &= \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} dV + \int \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} dV = \\ &= \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{H}^2 dV + \int \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} dV. \end{aligned} \quad (6)$$

Первый член суммы в правой части представляет работу, затрачиваемую на создание поля. Так как, согласно (4),  $\int \mathbf{H}_J \cdot \mathbf{H}_M dV = 0$ , то получаем

$$\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H}^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H}_J^2 dV + \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H}_M^2 dV.$$

Здесь нужно отметить, что в найденное выражение входит работа, необходимая для создания поля катушки и размагничивающего поля, возникающего при намагничивании магнитного образца. Эту работу можно исключить из определения работы, необходимой для намагничивания образца. Отнесенная к единице времени работа намагничивания равна  $\int \mathbf{H} \cdot (\partial \mathbf{M} / \partial t) dV$ . Умножая ее на  $dt$ , получаем работу, производимую при увеличении намагниченности образца от  $\mathbf{M}$  до  $\mathbf{M} + d\mathbf{M}$

$$d'A = \int (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}) dV = \int (\mathbf{H}_J + \mathbf{H}_M) d\mathbf{M} dV,$$

где интегрирование производится по всему объему образца. Следовательно, полная работа намагничивания имеет вид

$$A = \int dV \int_0^{\mathbf{M}} (\mathbf{H}_J + \mathbf{H}_M) \cdot d\mathbf{M}.$$

Важно отметить, что размагничивающее поле  $\mathbf{H}_M$ , связанное с намагниченностью образца, в общем случае необходимо включить в магнитное поле. Если магнитное поле  $\mathbf{H}$  и намагниченность  $\mathbf{M}$  однородны, то объемный интеграл соответствует просто умножению на объем  $V$ .

**З а м е ч а н и е.** Магнитное поле внутри образца и его намагниченность однородны только в том случае, когда он имеет форму эллипсоида. В этом случае размагничивающее поле вдоль осей

эллипсоида  $x$ ,  $y$  и  $z$  определяется выражением

$$(H_M)_\alpha = -N_\alpha M_\alpha \quad (\alpha = x, y, z),$$

где размагничивающие факторы  $N_x$ ,  $N_y$  и  $N_z$  подчиняются правилу

$$N_x + N_y + N_z = 4\pi.$$

Эти коэффициенты можно вычислить как функции отношений осей эллипсоида.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. E m d e n R., Nature, 141, 908 (1938).
2. S o m m e r f e l d A., Thermodynamik und Statistik (Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. 5), Wiesbaden, 1952. (См. перевод: А. З о м м е р ф е л ь д, Термодинамика и статистическая физика, ИЛ, 1956.)
3. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Leipzig-Berlin, 1926.
4. E p s t e i n P. S., Textbook of thermodynamics, New York, 1937. (См. перевод: П. С. Э п ш т е й н, Курс термодинамики, М.— Л., 1948.)
5. C a r n o t N. L. S., Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres, Paris, 1878. (См. перевод в сб. «Второе начало термодинамики», М.— Л., 1934.)
6. M e n d o z a E., Phys. Today, 14, No. 2, 32 (1961).
7. M a c h E., Principien der Wärmelehre, Leipzig, 1923.