ГЛАВА ПЕРВАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИИ. ЛОГИЧЕСКИЕ СИМВОЛЫ

1.1. МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

В математике первичными понятиями являются понятия множества, элемента и принадлежности элемента множеству. Множества будем обозначать большими буквами латинского или какого-либо другого алфавита: A, B, ..., X, Y, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., а элементы множеств — малыми буквами: a, b, ..., x, y, ..., α, β, ... Если a является элементом множества A, то пишут $a \in A$ (читается «a принадлежит множеству A») или, что означает то же, $A \ni a$. Если же a не принадлежит множеству A, то пишут $a \notin A$ или $A \not\ni a$.

Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Таким образом, равенство $A = B$ означает, применительно к множествам, что одно и то же множество обозначено разными буквами A и B.

Запись $A = \{a, b, c, \ldots\}$ означает, что множество A состоит из элементов a, b, c и, возможно, каких-то других, заданных тем или иным способом.

Если множество A состоит из элементов a_α, где α пробегает некоторое множество индексов $\mathfrak{A}$, то будем писать $A = \{a_\alpha\}$ или, подробнее, $A = \{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$, или, если это не может привести к недоразумениям, просто $A = \{a\}$. Если множество A состоит из элементов, обладающих определенным свойством, то будем писать $A = \{a: \ldots\}$, где в фигурных скобках после двоеточия записано указанное свойство элементов множества A. Например, если a и b — два таких действительных числа, что $a \leqslant b$, и через $[a, b]$ обозначено множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, то определение этого множества (отрезка) посредством введенных символов можно записать следующим образом:

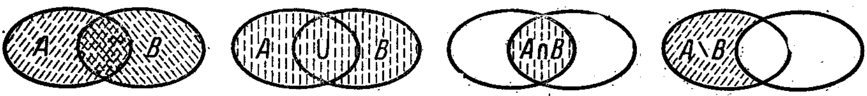
$$[a, b] = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Для удобства вводится понятие *пустого множества*, которое обозначается символом $\varnothing$. По определению пустое множество не содержит элементов.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что множество A есть часть множества B, или что A является *подмножеством* множества B, и пишут $A \subset B$ (читается: множество A содержится во множестве B) или, что то же, $B \supset A$ (читается: множество B содержит множество A).

Упражнение. Доказать, что включения $A \subset B$ и $B \subset A$ выполняются одновременно тогда и только тогда, когда $A = B$.

Из определения подмножества следует, что $A \subset A$, каково бы ни было множество A; принято также считать, по определению, что пустое множество считается подмножеством каждого множества, $\varnothing \subset A$. Если A — произвольное множество, то $\varnothing$ и A называются его *несобственными подмножествами*; если же $A \subset B$ и существует такой элемент $x \in B$, что $x \notin A$, то множество A называется *собственным подмножеством* множества B.



а) б) в) г)

Рис. 1

Если заданы два множества A и B (рис. 1, *а*), то через $A \cup B$ обозначается множество, называемое их *объединением* или *суммой*, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из множеств A и B (рис. 1, *б*). Таким образом, если некоторый элемент принадлежит множеству $A \cup B$, то он принадлежит либо только множеству A, либо только множеству B, либо обоим этим множествам.

Через $A \cap B$ обозначается множество, называемое *пересечением* множеств A и B, которое состоит из элементов, принадлежащих одновременно как множеству A, так и множеству B (рис. 1, *в*).

Через $A \setminus B$ обозначается множество, называемое *разностью* множеств A и B и состоящее из элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B (рис. 1, *г*).

Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называется *дополнением* множества B до множества A или дополнением B в A. Говорят также, что $A \setminus B$ получается из множества A вычитанием из него множества B.

Если задана система множеств A_α (термины: множество, система, совокупность, семейство, класс будут употребляться как синонимы), где значения α образуют некоторую совокупность индексов $\mathfrak{A}$, то *объединением* $\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} A_\alpha$ *множеств* A_α называется множество, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из заданных множеств A_α, т. е. условие $x \in \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} A_\alpha$ равносильно следующему: существует такое $\alpha\in\mathfrak{A}$, что $x\in A_\alpha$.

Пересечением множеств A_α, $\alpha\in\mathfrak{A}$, называется такое множество, обозначаемое через

$$\bigcap_{\alpha\in\mathfrak{A}} A_\alpha,$$

что каждый его элемент принадлежит всем множествам A_α, т. е. условие $x\in\bigcap_{\alpha\in\mathfrak{A}} A_\alpha$ означает: для всех $\alpha\in\mathfrak{A}$ имеет место $x\in A_\alpha$.

Если $A_\alpha\subset E$ *для всех* $\alpha\in\mathfrak{A}$, *то*

$$E\setminus\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in\mathfrak{A}}(E\setminus A_\alpha), \tag{1.1}$$

$$E\setminus\bigcap_{\alpha\in\mathfrak{A}} A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}}(E\setminus A_\alpha). \tag{1.2}$$

Докажем, например, равенство (1.1). Если $x\in E\setminus\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} A_\alpha$, то, в силу определения разности множеств, $x\in E$ и $x\notin\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} A_\alpha$. В свою очередь это, согласно определению объединения множеств, эквивалентно тому, что $x\in E$ и для всех $\alpha\in A_\alpha$ имеет место соотношение $x\notin A_\alpha$. Это же, снова по определению разности множеств, равносильно утверждению, что для всех $\alpha\in\mathfrak{A}$ имеем $x\in E\setminus A_\alpha$. Наконец, последнее утверждение, по определению пересечения множеств, означает, что $x\in\bigcap_{\alpha\in\mathfrak{A}}(E\setminus A_\alpha)$. Итак, условия $x\in E\setminus\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} A_\alpha$ и $x\in\bigcap_{\alpha\in\mathfrak{A}}(E\setminus A_\alpha)$ — эквивалентны, вследствие чего выполняется равенство (1.1). Равенство (1.2) доказывается аналогично.

В следующем пункте 1.2* рассмотрено понятие функции, а пункт 1.3* будет посвящен понятиям конечных множеств и последовательности. Пункты и параграфы курса, отмеченные звездочкой, при первом чтении можно пропустить и вернуться к ним лишь в случае внутренней потребности. В частности, для понимания дальнейшего материала достаточно представления о функции, имеющегося в курсе элементарной математики, как об определенном соответствии между элементами двух множеств. При этом понятие соответствия можно понимать как первичное.

1.2*. ФУНКЦИИ

Будем говорить, что *число элементов множества A равно единице* 1, если в нем имеется элемент $a \in A$ и нет других (иначе говоря, если из множества A вычесть множество, состоящее из элемента a, то получится пустое множество).

Множество A называется *множеством из 2-х (двух) элементов*, если после вычитания из него множества, состоящего только из одного элемента $a \in A$, т. е. множества, число элементов которого равно 1, останется множество, число элементов которого также равно единице. Нетрудно доказать, что это определение не зависит от выбора указанного элемента $a \in A$, т. е. если $a \in A$ и $b \in A$, причем $A \setminus \{a\}$ состоит из одного элемента, то и множество $A \setminus \{b\}$ также состоит из одного элемента (а именно, из элемента a).

Пусть теперь заданы множества $X = \{x\}$ и $Y = \{y\}$. Множество, состоящее из двух элементов $x \in X$ и $y \in Y$, называется *парой* $\{x, y\}$ элементов x, y.

Пара вида $\{x, \{x, y\}\}$, где $x \in X$, $y \in Y$, $\{x, y\}$ — пара элементов x, y, называется *упорядоченной парой* элементов x и y. Элемент x называется первым элементом упорядоченной пары $\{x, \{x, y\}\}$, а элемент y — вторым. Упорядоченная пара $\{x, \{x, y\}\}$ обозначается через (x, y). В дальнейшем под парой понимается обычно упорядоченная пара.

Множество всех упорядоченных пар (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, называется *произведением множеств* X и Y и обозначается через $X \times Y$. При этом не предполагается, что обязательно множество X отлично от множества Y, т. е. возможен и случай, когда $X = Y$.

Определение 1. *Всякое множество $f = \{(x, y)\}$ упорядоченных пар (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, такое, что для любых пар $(x', y') \in f$ и $(x'', y'') \in f$ из условия $y \neq y''$ следует, что $x' \neq x''$ называется функцией, или, что то же, отображением.*

Наряду с терминами «функция» и «отображение» в определенных ситуациях употребляются им равнозначные термины *преобразование*, *морфизм*, *соответствие*.

Функции будут обозначаться различными буквами: $f, g, \ldots, F, G, \ldots, \varphi, \psi, \ldots$.

Множество всех первых элементов упорядоченных пар (x, y) некоторой функции f называется *областью определения* (или множеством определения) этой функции и обозначается через X_f, а множество всех вторых элементов — *множеством ее значений* и обозначается через Y_f. Само множество упорядоченных пар $f = \{(x, y)\}$, рассматриваемое как подмножество произведения $X \times Y$, называется *графиком функции* f.

Элемент $x \in X_f$ называется *аргументом функции* f или независимой переменной, а элемент $y \in Y$ — *зависимой переменной*.

Если $f=\{(x, y)\}$ есть функция (отображение), то пишут $f: X_f \to Y$ и говорят, что f отображает множество X_f в множество Y. В случае $X=X_f$ пишется просто $f: X \to Y$.

Если $f: X \to Y$ — функция, т. е. множество упорядоченных пар $f=\{(x, y)\}$, $x \in X$, $y \in Y$, удовлетворяющих условиям определения 1, и $(x, y) \in f$, то пишут $y=f(x)$ (иногда просто $y=fx$) или $f: x \longmapsto y$ и говорят, что функция f ставит в соответствие элементу x элемент y (отображение f отображает элемент x в элемент y) или, что то же самое, элемент y соответствует элементу x. В этом случае говорят также, что элемент y является значением функции f в точке x, или образом элемента x при отображении f.

Наряду с символом $f(x_0)$ для обозначения значения функции f в точке x_0 употребляется также обозначение $f(x)|_{x=x_0}$.

При заданном $y \in Y$ совокупность всех таких элементов $x \in X$, что $f(x)=y$ называется *прообразом элемента* y и обозначается посредством $f^{-1}(y)$. Таким образом,

$$f^{-1}(y)=\{x : x \in X,\ f(x)=y\}.$$

Очевидно, если $y \in Y \setminus Y_f$, то $f^{-1}(y)=\varnothing$.

Иногда сама функция f обозначается символом $f(x)$. Обозначение функции $f: X \to Y$ и ее значения в точке $x \in X$ одним и тем же символом $f(x)$ не приводит к недоразумению, так как в каждом конкретном случае всегда ясно, о чем именно идет речь.

Обозначение $f(x)$ обычно удобнее обозначения $f: x \longmapsto y$ при вычислениях. Например, запись $f(x)=x^2$ значительно удобнее и проще использовать при аналитических преобразованиях, чем запись $f: x \longmapsto x^2$.

Пусть задано отображение $f: X \to Y$, т. е. отображение множества X в множество Y. Иначе говоря, каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие и притом единственный элемент $y \in Y$, и каждый элемент $y \in Y_f \subset Y$ поставлен в соответствие хотя бы одному элементу $x \in X$.

Если $Y=X$, то говорят, что отображение f отображает множество X в себя.

Если $Y=Y_f$, т. е. множество Y совпадает с множеством значений функции f, то говорят, что f отображает множество X *на* множество Y или, что отображение f является сюръективным отображением, короче, *сюръекцией*. Таким образом, отображение $f: X \to Y$ есть сюръекция, если для любого элемента $y \in Y$ существует по крайней мере один такой элемент $x \in X$, что $f(x)=y$.

Очевидно, если $f: X \to Y$ и Y_f — множество значений функции f, то $f: X \to Y_f$ является сюръективным отображанием.

Если при отображении $f: X \to Y$ разным $x \in X$ соответствуют разные $y \in Y$, т. е. при $x' \neq x''$ имеет место $f(x') \neq f(x'')$, то отображение f называется взаимно однозначным отображанием (взаимно однозначным соответствием) X в Y, а также однолистным отображанием или *инъекцией*. Таким образом, отображение

$f: X \to Y$ однолистно (инъективно) тогда и только тогда, когда прообраз каждого элемента y, принадлежащего множеству значений функции $f: y \in Y_f$, состоит в точности из одного элемента.

Если отображение $f: X \to Y$ является одновременно взаимно однозначным и на множество Y, т. е. является одновременно инъекцией и сюръекцией, то оно естественно называется *взаимно однозначным отображением* множества X *на* множество Y или, что то же, *биективным отображением* (биекцией) в Y.

Таким образом, отображение $f: X \to Y$ является взаимно однозначным отображением множества X на множество Y тогда и только тогда, когда для любых $x' \in X$ и $x'' \in X$, $x' \neq x''$, справедливо неравенство $f(x') \neq f(x'')$, и каково бы ни было $y \in Y$ существует такой элемент $x \in X$, что $f(x) = y$.

Взаимно однозначное отображение множества X на множество Y часто называют также взаимно однозначным соответствием элементов этих множеств.

Если $f: X \to Y$ и $A \subset X$, то множество

$$B = \{y : y \in Y,\ y = f(x),\ x \in A\},$$

т. е. множество всех тех y, в каждый из которых при отображении f отображается хоть один элемент из подмножества A множества X, называется *образом подмножества* A и пишется $B = f(A)$. В частности, всегда имеем $Y_f = f(X)$.

Если $f: X \to Y$ и $B \subset Y$, то множество

$$A = \{x : x \in X,\ f(x) \in B\},$$

называется *прообразом множества* B и пишется $A = f^{-1}(B)$. Таким образом, прообраз множества B состоит из всех тех элементов $x \in X$, которые при отображении f отображаются в элементы из B, или, что то же самое, которое состоит из всех прообразов точек $y \in B$:

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(y).$$

Если $A \subset X$, то функция $f: X \to Y$ естественным образом порождает функцию, определенную на множестве A, ставящую в соответствие каждому элементу $x \in A$ элемент $f(x)$. Эта функция называется *сужением функции* f на множестве A и иногда обозначается через $f|_A$.

Таким образом, $f|_A : A \to Y$ и для любого $x \in A$ имеет место $f|_A : x \longmapsto f(x)$. Если множество A не совпадает с множеством X, то сужение $f|_A$ функции f на множестве A имеет другую область определения, чем функция f, и, следовательно, является другой, чем f, функцией. Нередко сужение функции на некотором множестве обозначается тем же символом, что и исходная функция.

Если две функции f и g рассматриваются на одном и том же множестве X, точнее, если рассматриваются сужения функций f и g на одном и том же множестве X, то запись $f = g$ на X означает, что $f(x)=g(x)$ для каждого $x\in X$. В этом случае говорят, что функция f тождественно равна функции g на множестве X.

Отметим, что функции, у которых всем элементам некоторого множества соответствует один и тот же элемент, т. е. функции, у которых при изменении значения аргумента значение функции не меняется, называются *постоянными* (на данном множестве), или *константами*.

Итак, если при изменении одной переменной (аргумента функции) другая переменная, являющаяся функцией первой, не меняется (т. е. «не зависит» от первой переменной), то это является частным и в определенном смысле простейшим случаем функциональной зависимости.

Если $f: X\to Y$ и каждый элемент $y\in Y_f$ представляет из себя множество каких-то элементов $y=\{z\}$, причем среди этих множеств имеется по крайней мере одно непустое множество, состоящее не из одного элемента, то такая функция f называется *многозначной функцией*. При этом элементы множества $f(x)=\{z\}$ часто также называют значениями функции f в точке x.

Если каждое множество $f(x)$ состоит только из одного элемента, то функцию f называют также *однозначной функцией*.

Если $f: X\to Y$ и $g: Y\to Z$, то функция $F: X\to Z$, определенная для каждого $x\in X$ равенством $F(x)=g(f(x))$, называется *композицией* (иногда *суперпозицией*) функций f и g, или *сложной функцией*, и обозначается через $g\circ f$.

Таким образом, по определению каждого $x\in X$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

Пусть задана функция $f: X\to Y$ и Y_f — множество ее значений. Совокупность всевозможных упорядоченных пар вида $(y, f^{-1}(y))$, $y\in Y_f$, образует функцию, которая называется *обратной функцией* для функции f и обозначается через f^{-1}. Обратная функция f^{-1} ставит в соответствие каждому элементу $y\in Y_f$ его прообраз $f^{-1}(y)$, т. е. некоторое множество элементов. Тем самым обратная функция является, вообще говоря, многозначной функцией.

Если отображение $f: X\to Y$ однолистно (инъективно), то обратное отображение, определенное, как всегда, на Y_f, является однозначной функцией и отображает Y_f на X, т. е. $f^{-1}: Y_f\to X$. Действительно, в этом случае прообразы всех точек $y\in Y_f$ состоят в точности из одной точки $x\in X$.

1.3*. КОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА И НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Важным, часто встречающимся классом множеств является класс так называемых конечных множеств. Чтобы сформулировать определение конечного множества, дадим сначала определение понятия натурального числа.

Определение 2. *Множество $N=\{n\}$ называется множеством натуральных чисел, если*

а) один из его элементов обозначен символом 1;

б) каждому элементу $n \in N$ поставлен в соответствие в точности один элемент этого множества, обозначаемый через n^* и называемый элементом, следующим за элементом n;

в) для любого $n \in N$ имеет место $n^* \neq 1$;

г) из $n^*=m^*$, $n \in N$, $m \in N$, следует, что $n=m$;

д) (аксиома индукции) пусть множество $M=\{m\} \subset N$ обладает свойствами

1°) $1 \in M$;

2°) *если $m \in M$, то $m^* \in M$,*

тогда множество M содержит все натуральные числа: $M=N$.

Приведенное аксиоматическое определение множества натуральных чисел принадлежит Пеано *), поэтому свойства а) — д) называются *аксиомами Пеано.*

Элементы множества N обозначаются через 1, 2, 3, 4, ... (здесь после каждого натурального числа написано следующее за ним).

Определение 3. *Множество X называется множеством, состоящим из n элементов, $n \in N$, если существует взаимно однозначное отображение множества X на множество $\{1, 2, \ldots, n\}$.*

Если для множества существует такое натуральное n, что число его элементов равно n, то это множество называется конечным.

Всякое множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным.* Примером бесконечного множества является множество всех натуральных чисел.

Пустое множество считается по определению конечным, а число его элементов равным нулю.

Если множество, содержащее m элементов, может быть получено из множества, содержащего n элементов, вычитанием из него некоторого конечного множества, то натуральное число m называется меньшим, чем натуральное число n, или, что то же, число n называется бóльшим, чем число m; в этом случае пишут $m<n$, или $n>m$.

Определение 4. *Пусть X — какое-либо множество и N — множество натуральных чисел. Всякое отображение $f: N \to X$* (см. п. 1.2*). *называется последовательностью элементов множества X. Элемент $f(n)$ обозначается через x_n и называется n-м членом последовательности $f: N \to X$, а сама эта последовательность обозначается через $\{x_n\}$ или x_n, $n=1, 2, \ldots$.*

Каждый элемент x_n последовательности $\{x_n\}$ представляет собой упорядоченную пару, состоящую из числа $n \in N$ и соответствующего ему при отображении $f: N \to X$ элемента x множества X,

*) Д. Пеано (1858—1932) — итальянский математик.

т. е. $x_n = (n, x)$. Второй элемент этой пары называется значением элемента последовательности $\{x_n\}$, а первый — его номером.

Множество элементов последовательности всегда бесконечно. Два различных элемента последовательности могут иметь одно и то же значение, но заведомо отличаются номерами, которых бесконечное множество.

Множество значений элементов последовательности (обычно говорят короче: множество значений последовательности) может быть конечным. Например, если всем $n \in N$ поставлен в соответствие один и тот же элемент $a \in X$, т. е. при всех $n \in N$ имеет место $f(n) = a$, то множество значений последовательности $x_n = a$, $n = 1, 2, \ldots$, состоит из одного элемента $a \in X$. Такие последовательности называются *стационарными*.

Если $n_1 < n_2$, $n_1 \in N$, $n_2 \in N$, то член x_{n_1} последовательности $\{x_n\}$ называется членом, предшествующим члену x_{n_2}, а член x_{n_2} членом, следующим за членом x_{n_1}. В этом смысле члены последовательности всегда упорядочены.

1.4. ЛОГИЧЕСКИЕ СИМВОЛЫ

В математических рассуждениях часто встречаются выражения «существует элемент», обладающий некоторыми свойствами, и «любой элемент» среди элементов, имеющих некоторое свойство. Вместо слова «существует» или равносильного ему слова «найдется» иногда пишется символ $\exists$, т. е. перевернутая латинская буква E (от английского слова Existence — существование), а вместо слов «любой», «каждый», «всякий» — символ $\forall$, т. е. перевернутое латинское A (от английского слова Any — любой). Символ $\exists$ называется символом *существования*, а символ $\forall$ — символом *всеобщности*.

Примеры. 1. Определение объединения $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ множеств A_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, записывается с помощью логического символа существования следующим образом:

$$\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha = \{x : \exists \alpha \in \mathfrak{A},\ x \in A_\alpha\},$$

а определение пересечения $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$, записанное с помощью символа всеобщности, имеет вид

$$\bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha = \{x : \forall \alpha \in \mathfrak{A},\ x \in A_\alpha\}.$$

2. Пусть R — множество действительных чисел и пусть задана функция $f : R \to R$, т. е. функция, определенная на множестве действительных чисел и принимающая действительные значения.

Функция f называется *четной функцией*, если для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $f(-x)=f(x)$. Используя логическую символику, это условие можно записать короче:

$$\forall x \in \boldsymbol{R}: f(-x)=f(x).$$

3. Функция $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ называется *периодической*, если существует такое число $T>0$, что каково бы ни было $x \in \boldsymbol{R}$ справедливо равенство $f(x+T)=f(x)$. Употребляя логические символы, это можно записать следующим образом:

$$(\exists T>0)(\forall x \in \boldsymbol{R}): f(x+T)=f(x).$$

Обычно для удобства чтения утверждений, записанных с помощью нескольких логических символов, все, что относится к каждому из них в отдельности, заключается в круглые скобки, как это и сделано в последней формуле. Двоеточие в подобных формулах означает «имеет место».

4. Функция $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ не является четной, если условие $f(-x)=f(x)$ не выполняется для всех $x \in \boldsymbol{R}$. Однако подобные отрицательные формулировки не очень удобны для их использования, так как трудно делать выводы из того, чего нет. Гораздо удобнее иметь дело с позитивными, как их называют, утверждениями, которые не содержат отрицаний. В нашем случае утверждение, что равенство $f(-x)=f(x)$ не выполняется для всех $x \in \boldsymbol{R}$, равносильно утверждению, что существует такое $x \in \boldsymbol{R}$, что $f(-x) \neq f(x)$, или, в символической записи,

$$\exists x \in \boldsymbol{R}: f(-x) \neq f(x).$$

5. Функция $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ не является периодической, если любое число $T>0$ не является ее периодом, т. е. для любого $T>0$ равенство $f(x+T)=f(x)$ не должно выполняться для всех $x \in \boldsymbol{R}$, или в позитивной форме: для любого $T>0$ найдется $x \in \boldsymbol{R}$, для которого $f(x+T) \neq f(x)$. С помощью логических символов это записывается следующим образом:

$$(\forall T>0)(\exists x \in \boldsymbol{R}): f(x+T) \neq f(x).$$

Сравнивая запись при помощи логических символов утверждений в примерах 2 и 3 с их отрицанием в примерах 4 и 5, видим, что при построении отрицаний символы существования и всеобщности заменяют друг друга. Для того чтобы в некотором множестве не существовал элемент, обладающий каким-то свойством, надо, чтобы все элементы не обладали этим свойством, т. е. в этом случае при отрицании символ существования $\exists$ переходит в символ всеобщности $\forall$. Если же каким-то свойством обладают не все элементы рассматриваемого множества, то это означает, что в нем существует элемент, не обладающий данным свойством: символ всеобщности заменился символом существования.

Для того чтобы не затруднять читателя, не привыкшего к логической символике, дальнейшее изложение материала ведется в классической манере без использования логических символов, которые лишь иногда употребляются параллельно с основным текстом. С одной стороны, для того чтобы приучить читателя к их применению (что весьма полезно при конспектировании книг и лекций), а с другой, поскольку они позволяют более кратко, а потому иногда и более выразительно, разъяснить нужную мысль, и тем самым помогают читателю понять содержание излагаемого вопроса.

Символом $\square$ в тексте книги отмечается конец проводимого доказательства. Символ $\Rightarrow$ означает «следует» (одно высказывание следует из другого), а символ $\Leftrightarrow$ означает равносильность утверждений, стоящих по разные от него стороны. Значок def означает, что сформулированное утверждение справедливо по определению (от английского слова definition — определение). Например,

$$A \subset B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall x \in A \Rightarrow x \in B),$$

$$(g \cdot f)(x) \overset{\text{def}}{=} g(f(x)).$$

§ 2. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

2.1. СВОЙСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В элементарной математике изучаются действительные (вещественные) числа. Сначала в процессе счета возникает так называемый *натуральный ряд* чисел 1, 2, 3 ..., n, ... В арифметике вводятся действия сложения и умножения над натуральными числами. Что же касается операций вычитания и деления, то они уже оказываются не всегда возможными во множестве натуральных чисел. Чтобы все четыре арифметические операции были возможны для любой пары чисел (кроме операции деления на ноль, которой нельзя приписать разумного смысла), приходится расширить класс рассматриваемых чисел. К необходимости такого расширения запаса чисел приводят также потребности измерения тех или иных геометрических и физических величин. Поэтому вводятся число ноль и целые *отрицательные* числа (вида -1, -2, ..., $-n$, ...), а затем и *рациональные* (вида p/q, где p, q — целые, $q \neq 0$).

Та же потребность измерения величин и проведение таких операций, как извлечение корня, вычисление логарифмов, решение алгебраических уравнений, приводит к дальнейшему расширению запаса рассматриваемых чисел: появляются *иррациональные* и, наконец, *комплексные числа*. Все рациональные и все иррациональные числа образуют множество всех действительных чисел.