Для того чтобы не затруднять читателя, не привыкшего к логической символике, дальнейшее изложение материала ведется в классической манере без использования логических символов, которые лишь иногда употребляются параллельно с основным текстом. С одной стороны, для того чтобы приучить читателя к их применению (что весьма полезно при конспектировании книг и лекций), а с другой, поскольку они позволяют более кратко, а потому иногда и более выразительно, разъяснить нужную мысль, и тем самым помогают читателю понять содержание излагаемого вопроса.

Символом $\square$ в тексте книги отмечается конец проводимого доказательства. Символ $\Rightarrow$ означает «следует» (одно высказывание следует из другого), а символ $\Leftrightarrow$ означает равносильность утверждений, стоящих по разные от него стороны. Значок def означает, что сформулированное утверждение справедливо по определению (от английского слова definition — определение). Например,

$$A \subset B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall x \in A \Rightarrow x \in B),$$

$$(g \cdot f)(x) \overset{\text{def}}{=} g(f(x)).$$

§ 2. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

2.1. СВОЙСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В элементарной математике изучаются действительные (вещественные) числа. Сначала в процессе счета возникает так называемый *натуральный ряд* чисел 1, 2, 3 ..., n, ... В арифметике вводятся действия сложения и умножения над натуральными числами. Что же касается операций вычитания и деления, то они уже оказываются не всегда возможными во множестве натуральных чисел. Чтобы все четыре арифметические операции были возможны для любой пары чисел (кроме операции деления на ноль, которой нельзя приписать разумного смысла), приходится расширить класс рассматриваемых чисел. К необходимости такого расширения запаса чисел приводят также потребности измерения тех или иных геометрических и физических величин. Поэтому вводятся число ноль и целые *отрицательные* числа (вида -1, -2, ..., $-n$, ...), а затем и *рациональные* (вида p/q, где p, q — целые, $q \neq 0$).

Та же потребность измерения величин и проведение таких операций, как извлечение корня, вычисление логарифмов, решение алгебраических уравнений, приводит к дальнейшему расширению запаса рассматриваемых чисел: появляются *иррациональные* и, наконец, *комплексные числа*. Все рациональные и все иррациональные числа образуют множество всех действительных чисел.

Множество действительных чисел, как принято, будем обозначать через $\boldsymbol{R}$ (от латинского слова realus — действительный). Это множество образует совокупность, в которой определены взаимосвязные операции сложения, умножения и сравнения чисел по величине и которая обладает определенного рода непрерывностью. Напомним кратко свойства действительных чисел, известные из элементарной математики, и дополним их описанием некоторых свойств, обычно не рассматриваемых там достаточно полно.

I. Операция сложения. Для любой упорядоченной пары действительных чисел a и b определено, и притом единственным образом, число, называемое их *суммой* и обозначаемое через $a+b$, так что при этом имеют место следующие свойства.

I_1. *Для любой пары чисел a и b*

$$a+b=b+a.$$

Это свойство называется *переместительным* или *коммутативным законом сложения.*

I_2. Для любой *тройки* чисел a и b, c

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

Это свойство называется *сочетательным* или *ассоциативным законом сложения.*

I_3. *Существует число, обозначаемое 0 и называемое нулем, такое, что для любого числа a*

$$a+0=a.$$

I_4. *Для любого числа a существует число, обозначаемое $-a$ и называемое противоположным данному, такое, что*

$$a+(-a)=0.$$

II. Операция умножения. Для любой упорядоченной пары чисел a и b определено, и притом единственным образом, число, называемое их *произведением* и обозначаемое ab, так что при этом имеют место следующие свойства.

II_1. *Для любой пары чисел a и b*

$$ab=ba.$$

Это свойство называется *переместительным* или *коммутативным законом умножения.*

II_2. *Для любой тройки чисел a, b, c*

$$a(bc)=(ab)c.$$

Это свойство называется *сочетательным* или *ассоциативным законом умножения.*

II_3. *Существует число, обозначаемое* 1 *и называемое единицей, такое, что для любого числа* a

$$a \cdot 1 = a.$$

II_4. *Для любого числа* $a \neq 0$ *существует число, обозначаемое* $1/a$ *или* $\frac{1}{a}$ *и называемое обратным данному, такое, что*

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

III. Связь операций сложения и умножения

Для любой тройки чисел a, b, c

$$(a+b)\,c = ac + bc.$$

Это свойство называется *распределительным* или *дистрибутивным законом умножения* относительно сложения.

IV. Упорядоченность. *Для каждого числа* a *определено одно из соотношений* $a > 0$ (*a больше нуля*), $a = 0$ (*a равно нулю*) *или* $0 > a$ (*ноль больше* a), *при этом, если* $a > 0$ *и* $b > 0$, *то*

IV_1. $a + b > 0$;

IV_2. $ab > 0$.

Если $a - b > 0$, то говорят, что число a больше числа b и пишут $a > b$ (подробнее об этом см. в п. 2. 3*).

Действительные числа обладают еще так называемым свойством непрерывности. Чтобы сформулировать его, введем понятие сечения.

Определение 1. *Два множества* $A \subset \boldsymbol{R}$ *и* $B \subset \boldsymbol{R}$ *называются сечением множества действительных чисел* $\boldsymbol{R}$, *если*

1°) *объединение множеств* A *и* B *составляет все множество действительных чисел* $\boldsymbol{R}$, $A \cup B = \boldsymbol{R}$;

2°) *каждое из множеств* A *и* B *не пусто*, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$;

3°) *каждое число множества* A *меньше любого числа множества* B: *если* $a \in A$, $b \in B$, *то* $a < b$.

Свойство 1° означает, что каждое действительное число принадлежит по крайней мере одному из множеств A и B.

Из свойства 3° очевидно следует, что множества A и B не пересекаются: $A \cap B = \varnothing$. Действительно, если бы нашелся элемент $x \in A \cap B$, т. е. $x \in A$ и $x \in B$, то из свойства 3° следовало бы, что $x < x$.

Сечение множества действительных чисел, образованное множествами A и B, обозначается через $A \mid B$. Множество A называется *нижним*, а множество B — *верхним* классом данного сечения.

Простые примеры сечений можно получить следующим образом. Зафиксируем какое-либо число $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Отнесем сначала к множеству A все числа $x \leqslant \alpha$, а к множеству B — все числа $y > \alpha$:

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \leqslant \alpha\}, \quad B \stackrel{\text{def}}{=} \{y : y > \alpha\}. \tag{2.1}$$

Так определенные множества образуют сечение, что устанавливается непосредственной проверкой выполнения условий 1°, 2° и 3° определения 1.

Можно поступить иначе: отнести к множеству A все числа $x<\alpha$, а к множеству B все числа $y\geqslant\alpha$:

$$A\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{x:x<\alpha\},\ B\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{y:y\geqslant\alpha\}. \tag{2.2}$$

Снова множества A и B образуют сечение. В обоих случаях (2.1) и (2.2) говорят, что сечение производится числом α и пишут $\alpha=A\,|\,B$.

Отметим два свойства сечений, производящихся некоторым числом.

1°. *В случае* (2.1) *в классе A есть наибольшее число, им является число α, а в классе B нет наименьшего.*

В случае (2.2) *в классе A нет наибольшего, а в классе B есть наименьшее число, им является число α.*

Рассмотрим, например, первый случай (2.1). То, что α является наибольшим числом в классе A, ясно из первой формулы (2.1), задающей множество A.

Покажем, что во множестве B нет наименьшего числа. Допустим противное: пусть в B есть наименьшее число. Обозначим его через β. Поскольку $\beta\in B$, то в силу второй формулы (2.1) $\alpha<\beta$, следовательно, $\alpha+\alpha<\alpha+\beta$, т. е. $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}$, откуда снова в силу второй формулы (2.1) получаем, что $\frac{\alpha+\beta}{2}\in B$. Аналогично из $\alpha<\beta$ имеем $\alpha+\beta<\beta+\beta$, т. е. $\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$ и так как β — наименьшее число в классе B, то $\frac{\alpha+\beta}{2}\in A$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

2°. *Число, производящее сечение, единственно.*

В самом деле, допустим, что существует сечение, которое определяется двумя разными числами: $\alpha=A\,|\,B$ и $\beta=A\,|\,B$. Пусть, например, $\alpha<\beta$. Тогда, как мы видели при доказательстве предыдущего свойства, $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$. Из неравенства $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}$ следует, что как в случае (2.1), так и в случае (2.2), имеет место $\frac{\alpha+\beta}{2}\in B$. Аналогично из неравенства $\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$ следует, что $\frac{\alpha+\beta}{2}\in A$. Это противоречит тому, что множества A и B не пересекаются.

Свойство непрерывности действительных чисел состоит в том, что никаких других сечений действительных чисел, кроме тех, которые производятся некоторым числом, не существует.

V. Свойство непрерывности действительных чисел. *Для каждого сечения $A\,|\,B$ множества действительных чисел существует число α, производящее это сечение, $\alpha=A\,|\,B$.*

Это число, согласно выше доказанному, является либо наибольшим в нижнем классе, тогда в верхнем нет наименьшего, либо наименьшим в верхнем классе, тогда в нижнем нет наибольшего.

Таким образом, если $A|B$ является сечением действительных чисел, то согласно свойству их непрерывности не может случиться так, что в классе A будет наибольшее число и одновременно в классе B будет наименьшее (рис. 2, *а*). Не может также быть и того, чтобы в классе A не было наибольшего и одновременно в классе B не было наименьшего числа (рис. 2, *б*). Образно говоря, непрерывность действительных чисел означает, что в их множестве нет ни скачков, ни пробелов, короче, нет пустот.

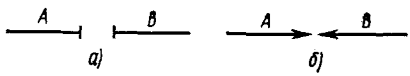

Рис. 2

Сформулированное свойство непрерывности действительных чисел называют также *принципом Дедекинда* *) непрерывности действительных чисел.

Свойство непрерывности действительных чисел связано с самым простейшим вопросом использования математики на практике — с измерением величин. При измерении какой-либо физической величины мы всегда получаем с большей или меньшей точностью ее приближенные значения. Если в результате экспериментального измерения данной величины получается ряд значений, дающих значение искомой величины с недостатком (т. е. принадлежащие нижнему классу соответствующего неизвестного сечения, определяемого значением измеряемой величины) или с избытком (т. е. принадлежащие верхнему классу), то свойство непрерывности действительных чисел выражает собой объективную уверенность в том, что измеряемая величина имеет определенное значение, расположенное между ее приближенными значениями, вычисленными с недостатком и избытком.

Упражнение 1. Доказать, что свойство V непрерывности действительных чисел равносильно следующему: каковы бы ни были непустые множества $A \subset \boldsymbol{R}$ и $B \subset \boldsymbol{R}$, у которых для любых элементов $a \in A$ и $b \in A$ выполняются неравенства $a \leqslant b$, существует такое число ξ, что для всех $a \in A$ и $b \in B$ имеет место соотношение $a \leqslant \xi \leqslant b$.

Из перечисленных свойств I—V действительных чисел вытекают другие многочисленные их свойства, поэтому можно сказать, что действительные числа представляют собой совокупность элементов, обладающую свойствами I—V.

Для вдумчивого читателя заметим, что ссылка в начале параграфа на то, что действительные числа и их свойства известны из курса элементарной математики, не является необходимой. Сформулированные выше свойства действительных чисел можно

*) Р. Дедекинд (1831—1916) — немецкий математик.

взять за исходное определение. Следует только исключить тривиальный случай: легко проверить, что для множества, состоящего только из одного нуля, выполняются все свойства I—V (в таком множестве $1=0$, а сечений в нем просто нет). Множество, в котором имеется хоть один элемент, отличный от нуля, называют *нетривиальным*.

Теперь, перефразируя итог наших рассмотрений, получим следующее определение.

Определение 2. *Нетривиальное множество элементов, обладающих свойствами* I—V, *называется множеством действительных чисел. Каждый элемент этого множества называется действительным числом.*

Напомним, что множество действительных чисел обозначается буквой $\boldsymbol{R}$.

Построение теории действительных чисел, основывающееся на таком их определении, называется *аксиоматическим*, а свойства I—V — *аксиомами действительных чисел.*

Геометрически множество действительных чисел изображается направленной (ориентированной) прямой, а отдельные числа — точками этой прямой. Поэтому совокупность действительных чисел часто называют числовой прямой, или числовой осью, а отдельные числа — ее точками (рис. 3). Имея в виду такое изображение действительных чисел, иногда вместо a меньше b (соответственно a больше b) говорят, что точка a лежит левее точки b (соответственно, что a лежит правее b).

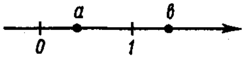

Рис. 3

Сечение $A \mid B$ геометрически означает разбиение числовой прямой на два луча, имеющих общее начало и идущих в противоположных направлениях, причем один из них содержит их общее начало (замкнутый луч), а другой нет (открытый луч).

В следующих пунктах 2.2*, 2.3*, 2.4* будут более детально проанализированы свойства I—V действительных чисел и выведены некоторые их следствия. Как и все пункты, отмеченные звездочками, перечисленные пункты, во всяком случае при первом чтении, можно опустить без существенного ущерба для усвоения курса математического анализа. Для понимания дальнейшего материала (в п. 2.5 и следующих) вполне достаточно представления о действительных числах, которое дается в курсе элементарной математики.

2.2*. СВОЙСТВА СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

Рассмотрим некоторые свойства сложения и умножения, которые вытекают из свойств I, II и III. Прежде всего заметим, что для операции сложения существует обратная операция — вычитание, определим ее.

Для любой упорядоченной пары чисел $a \in \boldsymbol{R}$ и $b \in \boldsymbol{R}$ число $a+(-b)$ называется *разностью* чисел a и b и обозначается через $a-b$, т. е.

$$a-b \overset{\text{def}}{=} a+(-b).$$

Если $a+b=c$, то, прибавляя к обеим частям этого равенства число $-b$, получим $(a+b)+(-b)=c+(-b)$. Отсюда согласно ассоциативному закону I_2 и определению разности имеем

$$a+(b+(-b))=c-b,$$

но $b+(-b)=0$, следовательно,

$$a=c-b. \qquad (2.3)$$

Таким образом, после прибавления к числу a числа b число a восстанавливается вычитанием из суммы $a+b$ числа b, поэтому операция вычитания и называется *операцией, обратной операции сложения.*

Перейдем теперь к свойствам сложения и умножения действительных чисел.

1°. *Число, обладающее свойством нуля, единственно.*

Действительно, допустим, что существуют два нуля 0 и $0'$, тогда в силу I_3: $0'+0=0'$, $0+0'=0$. Согласно коммутативному закону I_2 левые части этих равенств равны, следовательно, равны и правые, т. е. $0=0'$. $\square$

2°. *Число, противоположное данному, единственно.*

Пусть числа b и c противоположны некоторому числу a, т. е. $a+b=0$ и $a+c=0$. Тогда из первого из этих равенств имеем $(a+b)+c=0+c$, т. е. $(a+b)+c=c$, откуда $(a+c)+b=c$; но $a+c=0$, следовательно, $b=c$. $\square$

3°. *Для любого числа a справедливо равенство*

$$-(-a)=a.$$

Из равенства $a+(-a)=0$, определяющего противоположный элемент, в силу коммутативности сложения, получим $-a+a=0$. Это и означает, что $a=-(-a)$. $\square$

4°. *Для любого числа a справедливо равенство*

$$a-a=0.$$

В самом деле, $a-a=a+(-a)=0$. $\square$

5°. *Для любых чисел a и b имеем:*

$$-a-b=-(a+b),$$

т. е. число, противоположное сумме двух чисел, равно сумме противоположных им чисел.

Действительно, $a+b+(-a-b)=(a-a)+(b-b)=0$. $\square$

6°. *Уравнение $a+x=b$ имеет в $\boldsymbol{R}$ решение и притом единственное: $x=b-a$.*

В самом деле, если решение существует, то в силу (2.3) $x = b - a$. Этим и доказана единственность решения уравнения $a + x = b$. Для существования решения достаточно проверить, что число $x = b - a$ является решением. Это действительно так:

$$a + (b - a) = a + [b + (-a)] = [a + (-a)] + b = b. \ \square$$

Для операции умножения также существует обратная операция; она называется делением и определяется следующим образом.

Для любой упорядоченной пары чисел a и b, $b \neq 0$, число $a \cdot \frac{1}{b}$ называется *частным от деления* a на b и обозначается через $\frac{a}{b}$, или a/b, или $a : b$, т. е.

$$\frac{a}{b} \overset{\text{def}}{=} a \cdot \frac{1}{b}, \qquad b \neq 0.$$

Свойства, аналогичные свойствам 1°—6° для сложения, справедливы и для операции умножения:

7°. *Число, обладающее свойствами единицы, единственно.*

8°. *Число, обратное данному числу, отличному от нуля, единственно.*

9°. *Для любого числа $a \neq 0$ справедливо равенство*

$$\frac{1}{1/a} = a.$$

10°. *Для любого числа $a \neq 0$ справедливо равенство*

$$a/a = 1.$$

11°. *Для любых чисел $a \neq 0$ и $b \neq 0$ имеем равенство*

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab},$$

т. е. число, обратное произведению двух чисел, отличных от нуля, равно произведению обратных к ним чисел.

12°. *Уравнение $ax = b$, $a \neq 0$, имеет в множестве действительных чисел и притом единственное решение.*

Доказываются свойства 7° — 12° аналогично свойствам 1°—6°. Все рассмотренные свойства 1° — 12° касаются только операций сложения и умножения. Эти операции позволяют определить натуральные, целые и рациональные числа, операцию возведения в целую степень и операцию извлечения корня. Проделаем это.

Число $1 + 1$ обозначается через 2, число $2 + 1$ через 3 и т. д. Числа 1, 2, 3, ... называются *натуральными числами*. Их обозначение и название совпадают с числами элементов в конечных множествах (см. п. 1.3*). Это не случайно, поскольку для того, чтобы получить натуральное число n в новом смысле, надо взять конечное множество единиц, число элементов которого в п. 1.2* было обозначено тем же символом n, и сложить их. При этом отношение порядка, введенное в множестве натуральных чисел (см. п. 1.3*), совпадает с порядком, имеющимся в этом множестве согласно упорядоченности множества всех действительных чисел (см. свойство IV в п. 2.1), причем натуральным числом n^*, следующим за n, является $n+1$, т. е. $n^*=n+1$. Как уже отмечалось, множество натуральных чисел обозначается через $\boldsymbol{N}$.

Заметим, что хотя, как это было доказано выше, единица единственна, можно рассматривать несколько экземпляров единицы (как и вообще, несколько экземпляров любого элемента некоторого множества), хотя бы для того, чтобы можно было написать выражение $1+1$.

Числа $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ называются *целыми числами*. Множество целых чисел обычно обозначается через $\boldsymbol{Z}$.

В дальнейшем будет показано (см. свойство 8° в п. 2.3*), что из всех перечисленных в п. 2.1 свойств действительных чисел следует, что $1>0$.

Числа вида m/n, где m и n — целые, а $n \neq 0$, называются *рациональными числами*. Множество рациональных чисел обозначается обычно через $\boldsymbol{Q}$. Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными*.

Пусть заданы действительное число a и натуральное n. Число a, умноженное n раз на себя, называется n-й *степенью* числа a и обозначается через a^n. Таким образом,

$$a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ раз}}.$$

Число b такое, что $b^n=a$ (если оно, конечно, существует) называется *корнем* n-й степени из числа a и обозначается через $\sqrt[n]{a}$, или $a^{1/n}$, т. е.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \stackrel{\text{def}}{=} a.$$

По определению полагается $a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$ и для любого $n \in \boldsymbol{N}$ $a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} 1/a^n$.

Отметим теперь несколько свойств, касающихся связи операций сложения и умножения.

13°. *Для любых чисел a, b и c имеет место равенство*

$$a(b-c)=ab-ac.$$

В самом деле,

$$a(b-c)=a(b-c)+ac-ac=a(b-c+c)-ac=ab-ac. \quad \square$$

14°. *Для любого числа a выполняется равенство*

$$a \cdot 0=0.$$

Действительно, возьмем какое-либо число b, тогда $b-b=0$ (см. свойство 4°). Поэтому согласно свойству 13° будем иметь:

$$a \cdot 0 = a(b-b) = ab - ab = 0. \quad \square$$

Из свойства 14°, между прочим, вытекает, что утверждение $1 \neq 0$ при наличии других рассматриваемых свойств I—III эквивалентно тому, что существует хотя бы одно число, отличное от нуля. Очевидно, достаточно показать, что если существует число $a \neq 0$, то $1 \neq 0$. Докажем это: пусть существует $a \neq 0$, тогда из равенства $a \cdot 1 = a$ следует, что $1 \neq 0$, так как в противном случае согласно свойству 14° имело бы место равенство $a = 0$.

15°. *Если $ab = 0$, то, по крайней мере, один из сомножителей a и b равен нулю.*

Пусть, например, $a \neq 0$, тогда, умножив равенство $ab = 0$ на $1/a$, получим $\frac{1}{a}(ab) = \frac{1}{a} \cdot 0$, откуда $\left(\frac{1}{a}a\right)b = 0$, следовательно, $b = 0$. $\square$

16°. *Для любых чисел a и b имеем:*

$$(-a)b = -ab, \qquad (-a)(-b) = ab;$$

в частности, $(-1)a = -a$.

В самом деле,

$$(-a)b = (-a)b + ab - ab = (-a+a)b - ab = -ab. \quad \square$$

Используя это равенство, имеем

$$(-a)(-b) = -a(-b) = (-1)[a(-b)] = (-1)(-ab) = \\ = -(-ab) = ab. \quad \square$$

Из свойств I, II, III действительных чисел и перечисленных выше их следствий можно получить правила арифметических действий с дробями, т. е. числами вида a/b, $b \neq 0$, $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$.

17°. *Равенство*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

$b \neq 0$, $d \neq 0$, *справедливо тогда и только тогда, когда* $ad = bc$.

Следствие (основное свойство дроби). *Каковы бы ни были дробь a/b, $b \neq 0$, и число $c \neq 0$, имеет место равенство*

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

Действительно, умножив обе части равенства $a/b = c/d$ на bd и использовав определение деления, будем иметь следующую цепочку эквивалентных равенств:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b}bd = \frac{c}{d}db \Leftrightarrow a \cdot \frac{1}{b}bd = c\frac{1}{d}db \Leftrightarrow ad = cb. \quad \square$$

18°. *Сложение дробей производится по правилу*

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}, \quad b\neq 0,\ d\neq 0.$$

Докажем справедливость этого равенства. Использовав определение деления, дистрибутивность сложения относительно умножения и основное свойство дроби, получим:

$$\frac{ad+bc}{bd}=(ad+bc)\frac{1}{bd}=ad\frac{1}{bd}+bc\frac{1}{bd}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}. \ \square$$

19°. *Умножение дробей производится по правилу*

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, \quad b\neq 0,\ d\neq 0.$$

Использовав определение деления и свойство 11°, получим

$$\frac{ac}{bd}=ac\cdot\frac{1}{bd}=ac\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{d}=\left(a\cdot\frac{1}{b}\right)\left(c\cdot\frac{1}{d}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}. \ \square$$

20°. *Обратным элементом дроби a/b, $a\neq 0$, $b\neq 0$ является дробь b/a, т. е.* $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$.

Это сразу следует из правила умножения дробей.

21°. *Деление дробей производится по правилу*

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}, \quad b\neq 0,\ c\neq 0,\ d\neq 0.$$

Использовав определение деления, предыдущее свойство и правило умножения дробей, будем иметь

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c/d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}. \ \square$$

Выведем теперь из полученных свойств правила действий со степенями.

22°. *Если m и n — целые числа, причем в случае, когда $m\leqslant 0$ или $n\leqslant 0$ имеет место $a\neq 0$, то*

$$a^m a^n=a^{m+n}, \quad (a^m)^n=a^{mn}.$$

Если $m=0$ или $n=0$, то справедливость формул очевидна. В случае, когда m и n натуральные числа, то согласно определению степени

$$a^m a^n=\underbrace{a\ldots\ldots a}_{m\text{ раз}}\underbrace{a\ldots\ldots a}_{n\text{ раз}}=a^{m+n}.$$

Если $m<0$, $n>0$ и $a\neq 0$, то, полагая $k=-m$ и используя основное свойство дроби (возможность одновременного деления числителя и знаменателя дроби на одно и то же не равное нулю число без нарушения равенства), при $k \leqslant n$ будем иметь

$$a^m a^n = a^{-k} a^n = \frac{a^n}{a^k} = \frac{\overbrace{a \ldots a}^{n \text{ раз}}}{\underbrace{a \ldots a}_{k \text{ раз}}} = a^{n-k} = a^{m+n};$$

а при $k > n$:

$$a^m a^n = \frac{a^n}{a^k} = \frac{1}{a^{k-n}} = a^{n-k} = a^{m+n}.$$

Если $m < 0$, $n < 0$ и $a \neq 0$, то, полагая $k = -m$, $l = -n$ и используя свойство 11°, получим:

$$a^m a^n = a^{-k} a^{-l} = \frac{1}{a^k} \frac{1}{a^l} = \frac{1}{a^{k+l}} = a^{-(k+l)} = a^{m+n}.$$

Подобным образом проверяется и вторая формула свойства 22°. □

Легко показать, что свойства I_1, I_2, II_1, II_2 и III распространяются по индукции на любое конечное число членов. В качестве примера покажем, что для любых чисел a_1, a_2, ..., a_n $(n \geqslant 2)$ и b

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) b = a_1 b + a_2 b + \ldots + a_n b. \tag{2.4}$$

В самом деле, при $n = 2$ эта формула справедлива согласно свойству III.

Пусть теперь (2.4) справедлива при $n = k$, покажем, что она будет справедлива и при $n = k + 1$. Применив свойство I_2 для $k + 1$ слагаемых (считая, что оно уже доказано), затем свойство III и использовав предположение индукции, получим

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1}) b = [(a_1 + \ldots + a_k) + a_{k+1}] b =$$
$$= (a_1 + \ldots + a_k) b + a_{k+1} b = a_1 b + \ldots + a_k b + a_{k+1} b.$$

Из формулы (2.4) в случае $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ следует, что

$$nb = \underbrace{b + \ldots + b}_{n \text{ раз}},$$

т. е. что умножение числа на натуральное число n сводится к сложению этого числа n раз.

Отметим, что свойства I—III п. 2.1 не описывают полностью действительные числа в том смысле, что существуют и другие множества, отличные от совокупности действительных чисел, удовлетворяющие тем же свойствам I—III, если в них слово «число» всюду заменить словом «элемент» рассматриваемого множества. Именно в этом смысле всюду в дальнейшем понимается выражение «множество, удовлетворяющее каким-либо из свойств I—V».

Примером множеств, удовлетворяющих условиям I, II и III, являются одни только рациональные числа или, известные из элементарной математики, комплексные числа, а также совокупность рациональных функций, т. е. функций вида $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Элементы всех перечисленных множеств можно складывать и и умножать, причем эти операции будут подчиняться условиям I, II и III. Множества, удовлетворяющие этим требованиям и содержащие хотя бы один элемент, отличный от нуля, называются *полями*.

Таким образом, и рациональные числа, и действительные числа, и комплексные числа и рациональные функции образуют поля.

Проанализируем теперь свойства, выделяющие поле действительных чисел среди всех других полей. Одним из таких свойств является свойство упорядоченности его элементов.

2.3*. СВОЙСТВО УПОРЯДОЧЕННОСТИ

Выведем некоторые следствия из свойств упорядоченности IV и свойств сложения и умножения I, II и III. Прежде всего определим понятие сравнения по величине для любых двух чисел (напомним, что в свойстве IV говорилось только о сравнении чисел с нулем).

Число a называется числом, бо́льшим числа b, и пишется $a>b$, или, что то же, число b называется меньшим числа a и пишется $b<a$, если $a-b>0$.

1°. *Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.*

Это свойство называется *транзитивностью* отношения порядка.

Если $a>b$ и $b>c$, то согласно определению это означает, что $a-b>0$ и $b-c>0$. Складывая эти неравенства, согласно IV_1 получаем: $(a-b)+(b-c)>0$, т. е. $a-c>0$. Это и означает, что $a>c$. $\square$

2°. *Если $a>b$, то для любого числа c имеем: $a+c>b+c$.*

В самом деле, неравенство $a>b$ означает, что $a-b>0$. Поскольку по свойству 5° из п. 2.2* $a-b=a+c-c-b=(a+c)-(b+c)$, то $(a+c)-(b+c)>0$, и, следовательно, $a+c>b+c$. $\square$

3°. *Для любых двух чисел a и b имеется в точности одно из трех соотношений порядка $a>b$, $a=b$* или *$a<b$.*

Действительно, пусть заданы два числа a и b. Для их разности $a-b$ согласно свойству IV имеет место в точности одно из соотношений $a-b>0$, $a-b=0$ или $0>a-b$.

Если $a-b>0$, то по определению $a>b$. Если $a-b=0$, то, прибавив к обеим частям равенства число b, получим $a=b$. Наконец, если $0>a-b$, то прибавив последовательно к обеим частям неравенства $0>a-b$ числа $-a$ и b (см. предыдущее свойство), получим $b-a>0$. Это и означает, что $b>a$, или, что то же, $a<b$. $\square$

Соотношение $a<b$ читается «a меньше b». Соотношение $a=b$ читается «a равно b». Соотношение $a>b$ читается «a больше b».

Наличие транзитивного отношения порядка «больше», «меньше» между любыми двумя числами и называется обычно *свойством упорядоченности множества действительных чисел*, или *отношением порядка.*

Запись $a\leqslant b$ равнозначна записи $b\geqslant a$ и означает, что либо $a=b$, либо $a<b$. Например, можно написать $2\leqslant 2$, $2\leqslant 5$. Конечно, можно написать более точно: $2=2$, $2<5$, однако неравенства $2\leqslant 2$ и $2\leqslant 5$ также верны, так как означают, что «два не больше двух», соответственно, что «два не больше пяти».

Соотношения $a<b$, $a\leqslant b$, $a>b$, $a\geqslant b$ называются *неравенствами.* Неравенства $a<b$ и $a>b$ называются *строгими неравенствами.*

4°. *Если $a<b$, то $-a>-b$.*

В частности, если $a>0$, то $-a<0$, а если $a<0$, то $-a>0$.

Действительно, из $a<b$ в силу определения имеем $b-a>0$. Поэтому $-a=-a+b+(-b)=(b-a)+(-b)>0+(-b)=-b$. $\square$

5°. *Если $a<b$ и $c\leqslant d$, то $a+c<b+d$, т. е. можно производить почленное сложение неравенств одного знака.*

В самом деле, если $a<b$ и $c\leqslant d$, то согласно свойству 2° этого пункта $a+c<b+c$ и $c+b\leqslant d+b$, поэтому в силу транзитивности упорядоченности имеем: $a+c<b+d$. $\square$

6°. *Если $a<b$ и $c\geqslant d$, то $a-c<b-d$, т. е. неравенства противоположных знаков можно вычитать в указанном смысле.*

Действительно, из $c\geqslant d$ имеем согласно свойству 4° этого пункта: $-c\leqslant -d$. Сложив неравенства $a<b$ и $-c\leqslant -d$, получим $a-c<b-d$. $\square$

7°. *Если $a<b$ и $c<0$, то $ac>bc$.*

В самом деле, согласно свойству 4° этого пункта $-c>0$, поэтому в силу свойства IV_2: $a(-c)<b(-c)$. Отсюда по свойству 16° п. 2.2* получим $-ac<-bc$ и, следовательно (см. свойство 4° этого пункта), $ac>bc$. $\square$

Из доказанного сейчас свойства 7° (при $a=0$) и из свойства IV_2 вытекает правило знаков при умножении действительных чисел: *произведение двух сомножителей одного знака* (либо одновременно положительных, либо одновременно отрицательных) *положительно, а произведение двух сомножителей разных знаков* (один из них положителен, другой отрицателен) *отрицательно.*

8°. *В упорядоченном поле всегда справедливо неравенство* $1>0$.

В самом деле, мы уже видели (см. замечание после свойства 14° в п. 2.2*), что из условия существования элемента $a\neq 0$ (это условие входит в определение поля, см. конец п. 2.2*) следует, что $1 \neq 0$. Покажем, что неравенство $1 < 0$ невозможно. Допустим противное, пусть $1 < 0$. Возьмем какое-либо $a > 0$. Согласно определению единицы имеем $a \cdot 1 = a$. По правилу знаков произведение положительного числа a и отрицательной по предположению 1 является отрицательным числом, т. е. $a < 0$ — противоречие.

Действительные числа снова не являются единственным объектом, который удовлетворяет аксиомам I — IV. Множества, для которых справедливы эти аксиомы, называются *упорядоченными полями*. Примером упорядоченного поля, отличного от поля действительных чисел, является поле рациональных чисел. Однако уже ни поле комплексных чисел, ни поле рациональных функций не являются упорядоченным полем.

Во всяком упорядоченном поле можно ввести понятие абсолютной величины его элементов. При ее определении и изучении ее свойств для единообразия изложения будем все время говорить о числах, а не об элементах произвольного упорядоченного поля.

Для любого числа a число, обозначаемое $|a|$ и определяемое по формуле

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если} \quad a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если} \quad a < 0, \end{cases}$$

называется *абсолютной величиной* числа a, или, что то же, его *модулем*.

Отметим ряд свойств абсолютной величины.

1°. *Для любого числа a выполняются неравенства*

$$|a| \geqslant 0, \tag{2.5}$$

$$|a| = |-a|, \tag{2.6}$$

$$a \leqslant |a|, \quad -a \leqslant |a|. \tag{2.7}$$

Докажем неравенство (2.5). Если $a \geqslant 0$, то $|a| = a \geqslant 0$; если же $a < 0$, то $|a| = -a > 0$ (свойство 4° п. 2.3*). □

Докажем равенство (2.6). Если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$ и $-a \leqslant 0$, поэтому согласно определению абсолютной величины и свойству 3° из п. 2.2* получим $|-a| = -(-a) = a = |a|$. Если же $a < 0$, то $|a| = -a$ и $-a > 0$; это означает, что $|-a| = -a$. □

Докажем неравенство (2.7). Если $a \geqslant 0$, то $a = |a|$ и $-a \leqslant 0 \leqslant a = |a|$, т. е. (2.7) выполняется. Если же $a < 0$, то $a < 0 < -a = |a|$, т. е. (2.7) тоже выполняется. □

2°. *Для любых чисел a и b*

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|, \tag{2.8}$$

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b|. \tag{2.9}$$

Докажем эти неравенства. Согласно (2.7) имеем:

$$a \leqslant |a|, \quad -a \leqslant |a|, \quad b \leqslant |b|, \quad -b \leqslant |b|.$$

Отсюда в силу свойства 5° из п. 2.3* и свойства 5° из п. 2.2*

$$a+b \leqslant |a|+|b|, \quad -(a+b) \leqslant |a|+|b|.$$

Одно из чисел $a+b$ или $-(a+b)$ неотрицательно и, следовательно, совпадает с $|a+b|$. Неравенство (2.8) доказано.

Неравенство же (2.9) является следствием (2.8). В самом деле

$$|a|-|b|=|(a-b)+b|-|b| \leqslant |a-b|+|b|-|b|=|a-b|;$$

аналогично, $|b|-|a| \leqslant |b-a|=|a-b|$.

Согласно свойству 5°, п. 2.2*, $|b|-|a|=-(|a|-|b|)$. Одно из чисел $|a|-|b|$ и $-(|a|-|b|)$ совпадает с $||a|-|b||$. Неравенство (2.9) также доказано. □

3°. *Для любых чисел a и b выполняется равенство* $|ab|=$ $=|a||b|$.

Это сразу следует из определения абсолютной величины, свойства 16°, п. 2.2* и правила знаков при умножении.

Рассмотрим теперь свойство непрерывности, которое выделяет поле действительных чисел среди всех прочих упорядоченных полей.

2.4*. СВОЙСТВО НЕПРЕРЫВНОСТИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Упорядоченное поле, удовлетворяющее свойству V, называется непрерывным упорядоченным полем. Поле рациональных чисел уже не является непрерывным упорядоченным полем: в нем имеются сечения, которые не определяются никаким рациональным числом. Например, можно показать, что если к верхнему классу B отнести все положительные рациональные числа m/n, удовлетворяющие неравенству $(m/n)^2>2$, а к нижнему классу все остальные рациональные числа, то получится сечение рациональных чисел $A|B$, которое не определяется никаким рациональным числом.

Оказывается, что множество действительных чисел является в некотором смысле единственным непрерывным упорядоченным полем, точнее единственным с точностью до изоморфизма. Разъясним, что это означает.

Два упорядоченных поля $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ называются изоморфными, если существует такое взаимно однозначное соответствие их элементов $f: \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ (см. п. 1.2*), *что для любых двух элементов* $x \in \mathcal{F}$ и $y \in \mathcal{F}$, $x<y$, *выполняются условия* $f(x)<f(y)$, $f(x+y)=$ $=f(x)+f(y)$, $f(xy)=f(x)f(y)$.

Короче говоря, упорядоченные поля $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение одного из них на другое (биекция), сохраняющее упорядоченность, сложение и умножение их элементов.

Можно показать, что все непрерывные упорядоченные поля изоморфны между собой. Этим объясняется, что в математической литературе встречаются различные построения множества действительных чисел, исходящие из разных конкретных объектов — все они приводят к нетривиальным совокупностям элементов, удовлетворяющим свойствам I — V, т. е. к непрерывным упорядоченным полям и, следовательно, к изоморфным множествам. Таким образом, приходим к следующему определению множества действительных чисел.

Определение 2′. *Множеством действительных чисел называется непрерывное упорядоченное поле.*

Поле рациональных чисел, как уже отмечалось выше, не обладает свойством непрерывности, а поле действительных чисел — обладает. Поэтому заведомо существуют действительные числа, не являющиеся рациональными, т. е. существуют иррациональные числа. Таким образом, множество действительных чисел можно рассматривать, как существенное расширение множества рациональных чисел — существенное в том смысле, что множество рациональных чисел является собственным подмножеством множества действительных чисел. При этом расширении сохраняются свойство упорядоченности и операции сложения и умножения. Оказывается, что действительные числа, в отличие от рациональных, уже нельзя расширить до бóльшего множества так, чтобы сохранялись указанные свойства (упорядоченность и операции сложения и умножения).

Это свойство называется *свойством полноты действительных чисел относительно их упорядоченности, сложения и умножения.*

Доказательство единственности с точностью до изоморфизма непрерывного упорядоченного поля и свойство его полноты по отношению к упорядоченности, сложению и умножению его элементов можно найти в превосходных курсах анализа В. А. Ильина, Э. Г. Позняка «Основы математического анализа», ч. I, М., 1971 и В. А. Ильина, В. А. Садовничего, Б. Х. Сендова «Математический анализ», М., 1979.

Отметим, что в множестве действительных чисел для любого числа $a \geqslant 0$ и любого натурального числа n всегда существует число b, являющееся корнем n-й степени из a, т. е. существует $\sqrt[n]{a}$. Мы не будем пока останавливаться на доказательстве этого утверждения, хотя его можно было бы провести и здесь, например, на основе понятия сечения, а докажем его позже (см. пример в п. 6.3). Конечно, в некоторых случаях корень может существовать и для $a < 0$. Например, существует $\sqrt[3]{-8} = -2$, но уже корень $\sqrt{-4}$ не существует, в том смысле, что не существует действительного числа $b = \sqrt{-4}$, так как в противном случае было бы справедливо равенство $b^2 = -4$, которое противоречит правилу знаков при умножении.

Сформулируем свойства корня. Пусть n и m натуральные числа и $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, тогда справедливы следующие формулы:

1°) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$; 4°) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$;

2°) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$; 5°) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

3°) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$;

Все эти формулы доказываются одинаковым приемом. Докажем, например, первую.

Пусть $b = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$. Согласно определению корня и свойству 22° из п. 2.2* это означает, что $b^n = \sqrt[m]{a}$ и что $b^{mn} = a$. Отсюда в силу того же определения корня следует, что $b = \sqrt[mn]{a}$. Таким образом, имеем:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = b = \sqrt[mn]{a}. \ \square$$

Если $a < 0$ и все корни, входящие в формулу 1), существуют, то она также справедлива, и приведенное ее доказательство сохраняет силу. Вообще, если $a < 0$ и все корни, входящие в какую-либо из формул 1) — 5) существуют, то они справедливы и в этом случае.

Имея понятие целочисленной степени и корня, определим понятие рациональной степени. Пусть $a > 0$ и $r \in \boldsymbol{Q}$, т. е. $r = m/n$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 0$.

Степень a^r определяется равенством

$$a^r \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}.$$

Отметим основные свойства рациональной степени. Пусть $a > 0$, $b > 0$, $r_1 \in \boldsymbol{Q}$, $r_2 \in \boldsymbol{Q}$, $r \in \boldsymbol{Q}$; тогда

6°) $a^{r_1}a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$;

7°) $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$;

8°) $(ab)^r = a^r b^r$.

Докажем, например, формулу 6°). Если $r_1 = p/q$, $r_2 = m/n$, $q \neq 0$, $n \neq 0$, p, q, m, $n \in \boldsymbol{Z}$, то, использовав определение рациональной степени, свойства корней 2°, 3° и свойство 22 из п. 2.2*, получим:

$$a^{r_1}a^{r_2} = a^{p/q}a^{m/n} = \sqrt[q]{a^p}\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{np}}\sqrt[nq]{a^{mq}} = \sqrt[nq]{a^{np+mq}} = \\ = a^{\frac{np+mq}{nq}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{m}{n}} = a^{r_1 + r_2}. \ \square$$

Упражнение 2. Пусть $B \overset{\text{def}}{=} \{x : x^2 > 2,\ x \in \boldsymbol{Q}\}$, $A \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{Q} \setminus B$. Доказать, что множества A и B образуют сечение в поле рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$ и что это сечение не определяется никаким рациональным числом.

2.5. РАСШИРЕННАЯ ЧИСЛОВАЯ ПРЯМАЯ

Часто бывает удобно дополнить множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$ элементами, обозначенными через $+\infty$ и $-\infty$ и называемыми соответственно *плюс* и *минус бесконечностями*, считая при этом, что по определению

$$-\infty < +\infty,$$
$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty,$$
$$(+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty,$$
$$(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty.$$

Но, например, операции $(+\infty) + (-\infty)$ или $\frac{+\infty}{+\infty}$ уже не определены (см. также п. 4.9). Кроме того, для любого $a \in \boldsymbol{R}$ по определению полагается выполненным неравенство

$$-\infty < a < +\infty$$

и справедливость операций

$$a + (+\infty) = +\infty + a = +\infty, \quad -\infty + a = a + (-\infty) = -\infty;$$

для $a > 0$

$$a(+\infty) = (+\infty)a = +\infty, \quad a(-\infty) = (-\infty)a = -\infty;$$

для $a < 0$

$$a(+\infty) = (+\infty)a = -\infty, \quad a(-\infty) = (-\infty)a = +\infty.$$

Бесконечности $+\infty$ и $-\infty$ называют иногда *«бесконечными числами»* в отличие от действительных чисел $a \in \boldsymbol{R}$, которые называются также *конечными числами.*

В дальнейшем под числом всегда понимается конечное действительное число, если не оговорено что-либо другое.

Множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$, дополненное элементами $+\infty$ и $-\infty$, называется *расширенным множеством действительных* чисел (или расширенной числовой прямой) и обозначается через $\overline{\boldsymbol{R}}$. Элементы $+\infty$ и $-\infty$ называются иногда *бесконечно удаленными точками расширенной числовой прямой.*

2.6. ПРОМЕЖУТКИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. ОКРЕСТНОСТИ

Напомним определения некоторых основных подмножеств действительных чисел, которые часто будут встречаться в дальнейшем. Если $a \leqslant b$, $a \in \overline{\boldsymbol{R}}$, $b \in \overline{\boldsymbol{R}}$, то множество $\{x : a \leqslant x \leqslant b\}$ называется *отрезком* расширенной числовой прямой $\overline{\boldsymbol{R}}$ и обозначается через

$[a, b]$, т. е.

$$[a, b] \overset{\text{def}}{=} \{x : a \leqslant x \leqslant b\}, \quad a \in \bar{R}, \ b \in \bar{R}.$$

В случае $a = b$ отрезок $[a, b]$ состоит из одной точки.

Если $a < b$, то множество $\{x : a < x < b\}$ называется *интервалом* и обозначается через (a, b), т. е.

$$(a, b) \overset{\text{def}}{=} \{x : a < x < b\}.$$

Интервал (a, b) называется *внутренностью отрезка* $[a, b]$.

Числовые множества

$$[a, b) \overset{\text{def}}{=} \{x : a \leqslant x < b\} \text{ и } (a, b] \overset{\text{def}}{=} \{x : a < x \leqslant b\}$$

называются *полуинтервалами*.

Отрезки $[a, b]$, интервалы (a, b) и полуинтервалы $[a, b)$, $(a, b]$ называются *промежутками*, точки a и b — их *концами*: a — правым концом, а b — левым, а точки x такие, что $a < x < b$ — их *внутренними точками*.

Если a и b — конечны, т. е. $a \in R$ и $b \in R$, то число $b - a$ называется *длиной промежутка* с концами a и b.

Если хоть одно из a и b является бесконечным, то промежуток с концами a и b называется *бесконечным*.

Замечание 1. Промежутки всех типов расширенной числовой прямой обладают следующим свойством: *если точки* $\alpha \in \bar{R}$ и $\beta \in \bar{R}$, $\alpha < \beta$, *принадлежат некоторому промежутку с концами* $a \in \bar{R}$ *и* $b \in \bar{R}$, *то и весь отрезок* $[\alpha, \beta]$ *принадлежит этому промежутку.*

Для промежутка каждого типа это непосредственно следует из его определения.

Важным понятием для дальнейшего является понятие ε-окрестности точки расширенной числовой прямой.

В случае $a \in R$, т. е. когда a является действительным числом, для любого $\varepsilon > 0$ *ε-окрестностью* $U(a, \varepsilon)$ числа a называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$:

$$U(a, \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Если $a = +\infty$, то $U(+\infty, \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} (\varepsilon, +\infty]$.

Если же $a = -\infty$, то $U(-\infty, \varepsilon) = [-\infty, -\varepsilon)$.

Всякая ε-окрестность конечной или бесконечно удаленной точки $a \in \bar{R}$ называется ее *окрестностью* и иногда обозначается просто через $U(a)$ *).

При определении окрестностей бесконечно удаленных точек $+\infty$ и $-\infty$ можно было бы брать не только положительные ε, а и всевозможные $\varepsilon \in R$. Условие $\varepsilon > 0$ накладывается лишь с целью

*) Обозначение U происходит от немецкого слова Umgebung — окрестность.

единообразия всех определений: окрестность любого числа $a \in \bar{R}$ или одной из бесконечно удаленных точек $+\infty$, $-\infty$ определяется некоторым положительным числом $\varepsilon > 0$. Такое единообразие бывает иногда удобно при формулировке результатов, для которых не существенно, является ли рассматриваемая точка конечной или бесконечно удаленной.

Лемма. *У любых двух различных точек расширенной числовой прямой существуют их непересекающиеся окрестности.*

Доказательство. Покажем, что для любых $a \in \bar{R}$ и $b \in \bar{R}$, $a < b$, существуют такие $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, что $U(a, \varepsilon_1) \cap U(b, \varepsilon_2) = \varnothing$. В самом деле, если a и b конечны, то можно взять $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{b-a}{2}$ (рис. 4, *а*). Если $a \in R$, $b = +\infty$, то в качестве указанных $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ подходят, например, $\varepsilon_1 = 1$ и $\varepsilon_2 = |a| + 1$ (рис. 4, *б*). Если $a = -\infty$, $b \in R$, то можно взять $\varepsilon_1 = |b| + 1$, $\varepsilon_2 = 1$ (рис. 4, *в*). Наконец, если $a = -\infty$, $b = +\infty$, то при произвольном $\varepsilon > 0$ окрестности $U(-\infty, \varepsilon)$ и $U(+\infty, \varepsilon)$ не пересекаются (рис. 4, *г*).

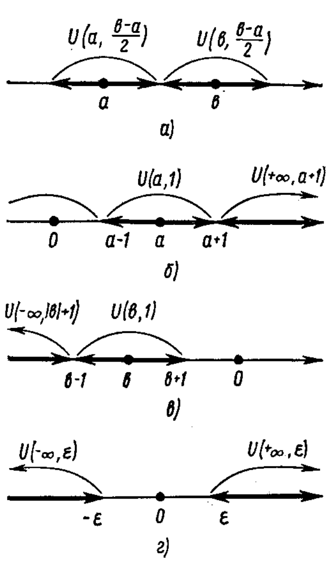

Рис. 4

Замечание 2. В случае $a < b$, $a \in \bar{R}$, $b \in \bar{R}$ и $U(a, \varepsilon_1) \cap U(b, \varepsilon_2) = \varnothing$ для любых $x \in U(a, \varepsilon_1)$ и $y \in U(b, \varepsilon_2)$, очевидно, справедливо неравенство $x < y$.

Его справедливость устанавливается непосредственной проверкой во всех возможных здесь случаях, т. е. при $a \in R$, $b \in R$, при $a \in R$, $b = +\infty$, при $a = -\infty$, $b \in R$ и при $a = -\infty$, $b = +\infty$.

2.7. ОГРАНИЧЕННЫЕ И НЕОГРАНИЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

Введем ряд нужных для дальнейшего понятий и изучим некоторые свойства числовых множеств.

Определение 3. *Если для подмножества E действительных чисел существует такое число b, что оно не меньше каждого числа $x \in E$, т. е. для любого $x \in E$ выполняется неравенство $x \leqslant b$, то множество E называется ограниченным сверху, а число b — числом, ограничивающим сверху множество E.*

Множество, не являющееся ограниченным сверху множеством, называется *неограниченным сверху множеством.*

С помощью логических символов определение ограниченного сверху множества записывается следующим образом:

множество $E \subset \boldsymbol{R}$ ограничено сверху $\Leftrightarrow$ $(\exists b \in \boldsymbol{R})(\forall x \in E)$: $x \leqslant b$; отсюда

множество $E \subset \boldsymbol{R}$ неограничено сверху $\Leftrightarrow$ $(\forall b \in \boldsymbol{R})(\exists x \in E)$: $x > b$, т. е. множество E неограничено сверху, если каково бы ни было число $b \in \boldsymbol{R}$ найдется такое число $x \in E$, что $x > b$.

Заметим, что если число b ограничивает сверху множество E, т. е. для всех $x \in E$ выполняется неравенство $x \leqslant b$ и $b < b'$, то для всех $x \in E$, очевидно, имеет место и неравенство $x \leqslant b'$, следовательно, число b' также ограничивает сверху множество E.

Если в множестве E имеется число b, которое не меньше всех других чисел из E, т. е. $b \in E$, и для всех $x \in E$ выполняется неравенство $x \leqslant b$, то число b называется наибольшим или *максимальным числом множества* E: $b = \max E$.

Очевидно, что если в множестве E имеется наибольшее число, то оно единственно, а само множество E в этом случае ограничено сверху этим числом.

Отметим еще, что если множество E неограничено сверху, то согласно определению это означает, что для любого числа $b \in \boldsymbol{R}$ существует по крайней мере один такой элемент $x \in E$, что $x > b$. Обратим внимание на то, что на самом деле таких элементов бесконечно много. Действительно, допустим, что их оказалось лишь конечное число: $x_1, \ldots, x_n$, $n \in \boldsymbol{N}$. Иначе говоря, для всех $x \in E$ и $x \neq x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, справедливо неравенство $x \leqslant b$. Тогда ясно, что для $b_0 = \max\{b, x_1, \ldots, x_n\}$ и всех $x \in E$ будет выполняться неравенство $x \leqslant b_0$, т. е. вопреки предположению множество E оказалось ограниченным.

Аналогично множеству, ограниченному сверху, определяется множество, ограниченное снизу.

Определение 4. *Если для подмножества E действительных чисел существует такое число a, что оно не больше каждого числа $x \in E$, т. е. для любого $x \in E$ выполняется неравенство $a \leqslant x$, то множество E называется ограниченным снизу, а число a — числом, ограничивающим снизу это множество.*

Множество, не являющееся ограниченным снизу множеством, называется *неограниченным снизу множеством.*

С помощью логических символов определение ограниченного снизу множества записывается следующим образом:

множество $E \subset \boldsymbol{R}$ ограничено снизу $\Leftrightarrow$ $(\exists a \in \boldsymbol{R})(\forall x \in E)$: $x \geqslant a$; отсюда

множество $E \subset \boldsymbol{R}$ неограничено снизу $\Leftrightarrow$ $(\forall a \in \boldsymbol{R})(\exists x \in E)$: $x < a$, т. е. множество E неограничено снизу, если каково бы ни было число $a \in \boldsymbol{R}$, найдется такой элемент $x \in E$, что $x < a$.

Очевидно, что если число a ограничивает снизу множество E, то и любое число $a' < a$ также ограничивает снизу это множество.

Если в множестве E имеется число a, которое не больше всех других чисел из E, т. е. $a \in E$ и для всех $x \in E$ выполняется неравенство $a \leqslant x$, то число a называется наименьшим или *минимальным числом множества* $E: a = \min E$.

Если в множестве E имеется наименьшее число, то оно единственно, а само множество E в этом случае ограничено снизу этим числом.

Определение 5. *Множество, ограниченное и сверху и снизу, называется просто ограниченным множеством.*

Другими словами, множество $E \subset \boldsymbol{R}$ называется ограниченным, если существуют такие числа a и b, что для любого $x \in E$ выполняется неравенство $a \leqslant x \leqslant b$.

Множество, не являющееся ограниченным, называется неограниченным.

Упражнение 3. Доказать, что множество $E \subset \boldsymbol{R}$ ограничено тогда и только тогда, когда существует такое число $a \geqslant 0$, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство $|x| \leqslant a$.

Примеры ограниченных множеств дают отрезок $[1, 2]$, интервал $(0, 1)$, множество значений функции $\sin x$. Бесконечный интервал $(-5, +\infty)$, множество натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots$ являются множествами, ограниченными снизу, но неограниченными сверху. Наконец, множество всех целых чисел, всех рациональных чисел суть множества, неограниченные как сверху, так и снизу.

Формальное обобщение понятий ограниченного сверху, ограниченного снизу и просто ограниченного множества на подмножества расширенного множества $\overline{\boldsymbol{R}}$ действительных чисел $\boldsymbol{R}$ (см. п. 2.5) не приводит к содержательным понятиям, так как все подмножества расширенного множества действительных чисел ограничены сверху символом $+\infty$ и снизу символом $-\infty$, а потому и просто ограничены в $\overline{\boldsymbol{R}}$. Однако понятие наибольшего (наименьшего) элемента множества является содержательным и в этом случае. Его определение формально совпадает с соответствующим определением для подмножеств не расширенного множества действительных чисел:

конечное или бесконечное число $c \in E \subset \overline{\boldsymbol{R}}$ называется наибольшим (наименьшим) в множестве $E \subset \overline{\boldsymbol{R}}$, если для всех $x \in E$ выполняется неравенство $x \leqslant c$ (соответственно $x \geqslant c$).

В дальнейшем мы воспользуемся этим понятием.

2.8. ВЕРХНЯЯ И НИЖНЯЯ ГРАНИ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

Среди всех чисел, ограничивающих сверху (снизу) данное множество, наименьшее (наибольшее) из них имеет специальное название.

Определение 6. *Наименьшее среди всех чисел, ограничивающих сверху множество* $E \subset \boldsymbol{R}$, *называется его верхней гранью и обозначается**) *через* $\sup E$ *или* $\sup\limits_{x \in E} \{x\}$.

Определение 7. *Наибольшее среди всех чисел, ограничивающих снизу множество* $E \subset \boldsymbol{R}$, *называется его нижней гранью и обозначается***) *через* $\inf E$ *или* $\inf\limits_{x \in E} \{x\}$.

Иногда верхнюю (нижнюю) грань множества называют *точной верхней* (*нижней*) *гранью* этого множества.

Отметим, что в сделанных определениях не обсуждается вопрос о том, существует или нет наименьшее (соответственно наибольшее) число среди всех чисел, ограничивающих сверху (снизу) данное множество — это будет сделано позже. Здесь же лишь говорится, что если такое число существует, то оно называется верхней (соответственно нижней) гранью рассматриваемого множества. Из самого определения верхней (нижней) грани следует, что если у данного множества эта грань существует, то она единственна, так как во всяком множестве максимальное (минимальное) число может быть только одно.

Проанализируем определения 6 и 7. Пусть $\beta = \sup E$. Это означает, во-первых, что число β ограничивает сверху множество E, т. е. для каждого $x \in E$ справедливо неравенство $x \leqslant \beta$; во-вторых, что число β является наименьшим среди всех чисел, ограничивающих сверху множество E, т. е. каково бы ни было число $\beta' < \beta$, оно уже не ограничивает сверху множество E, а это означает, что в множестве E найдется такое число x, что $x > \beta'$.

Таким образом, в «арифметической форме» определение 6 можно записать в следующем виде.

Определение 6′. *Число* β *называется верхней гранью множества* E, *если*

1°) $\forall x \in E : x \leqslant \beta$,

2°) $(\forall \beta' < \beta)\,(\exists x \in E) : x > \beta'$.

Условие 2°) можно перефразировать следующим образом:

2^1) $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists x \in E) : x > \beta - \varepsilon$.

Для того чтобы убедиться в равносильности условий 2° и 2^1, достаточно взять β' и ε, связанные равенством $\beta' = \beta - \varepsilon$, из которого следует, что условие $\varepsilon > 0$ эквивалентно условию $\beta' < \beta$.

Аналогичным образом, если $\alpha = \inf E$, то согласно определению 7, во-первых, число α ограничивает снизу множество E, а во-вторых, любое число $\alpha' > \alpha$ уже не ограничивает снизу это множество, ибо число α является наибольшим среди всех таких

*) От латинского слова supremum — наибольший.
**) От латинского слова infimum — наименьший.

чисел. Это означает, что для любого $\alpha' > \alpha$ найдется такой $x \in E$, что $x < \alpha'$. Следовательно, определение 7 можно перефразировать следующим образом.

Определение 7'. *Число α называется нижней гранью множества E, если*

1°) $\forall x \in E : x \geqslant \alpha$,

2°) $(\forall \alpha' > \alpha)(\exists x \in E) : x < \alpha'$.

Условие 2°) эквивалентно условию

2¹) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in E) : x < \alpha + \varepsilon$.

Для того чтобы убедиться в эквивалентности условий 2°) и 2¹), достаточно взять $\alpha' = \alpha + \varepsilon$.

Сделаем несколько очевидных замечаний. Если непустое множество $E \subset \boldsymbol{R}$ имеет верхнюю грань $\beta \in \boldsymbol{R}$ (имеет нижнюю грань $\alpha \in \boldsymbol{R}$), то оно ограничено сверху (соответственно снизу). Это следует из условия 1° определения 6' (определения 7').

Если $\beta = \sup E$ $(\alpha = \inf E)$ и число b (число a) ограничивает сверху (снизу) множество E, то $\beta \leqslant b$ (соответственно $a \leqslant \alpha$). Это следует из того, что верхняя (нижняя) грань множества является наименьшим (наибольшим) числом среди всех чисел, ограничивающих сверху (снизу) данное множество.

Если в множестве существует наибольшее (наименьшее) число, то оно является верхней (нижней) гранью этого множества. В частности, такая ситуация имеет место для конечных множеств: любое конечное множество чисел имеет наибольшее и наименьшее число, а потому нижнюю и верхнюю грани. В принципе их можно найти простым перебором всех чисел из данного множества, так как оно конечно. Однако, вообще говоря, только в принципе, а не на практике: если в данном конечном множестве, заданном какими-то свойствами его элементов, будет «достаточно много» элементов, то перебрать их все будет не под силу даже сверхмощной современной вычислительной машине.

Приведем примеры, иллюстрирующие понятие верхней и нижней граней множества.

Множество всех положительных действительных чисел, обозначим его через $\boldsymbol{R}_+$, ограничено снизу числом ноль, ибо для любого $x \in \boldsymbol{R}_+$ имеет место $x > 0$; более того, $\inf \boldsymbol{R}_+ = 0$. Множество $\boldsymbol{R}_+$ неограничено сверху, так как нет числа, которое бы ограничивало сверху все положительные числа.

Если $E = [a, b]$ — отрезок, то $\inf E = a$, $\sup E = b$. Если $E = (a, b)$ — интервал, то также $\inf E = a$, $\sup E = b$. Если, наконец, множество E состоит из двух точек a и b, $a \leqslant b$, т. е. $E = \{a\} \cup \{b\}$, то снова $\inf E = a$, $\sup E = b$. Эти примеры показывают, в частности, что верхняя (нижняя) грань множества может как принадлежать самому множеству, так и не принадлежать ему.

Перейдем теперь к выяснению вопроса: всегда ли у числового множества существует его верхняя (нижняя) грань? Если множество неограничено сверху (снизу), то не существует чисел, которые бы ограничивали его сверху (снизу). Следовательно, не существует среди них и наименьшего (наибольшего). Таким образом, если множество неограничено сверху (снизу), то у него нет верхней (нижней) грани. В этом случае ответ на поставленный вопрос получился совсем просто. Если же множество ограничено сверху (снизу), то ответ дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Всякое ограниченное сверху непустое числовое множество имеет верхнюю грань, а всякое ограниченное снизу непустое числовое множество имеет нижнюю грань.*

Доказательство. Пусть E — ограниченное сверху непустое числовое множество, $E \subset \boldsymbol{R}$. Обозначим через B множество всех чисел, ограничивающих сверху множество E, а через A — все остальные действительные числа. Покажем, что множества A и B образуют сечение в множестве действительных чисел и что число, производящее это сечение, является верхней гранью множества E.

Прежде всего убедимся, что A и B образуют сечение. Действительно, поскольку в множество A отнесены все числа, не попавшие в множество B, то их объединение $A \cup B$ составляет все множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$:

$$A \cup B = \boldsymbol{R}. \tag{2.10}$$

Множество E — ограничено сверху. Это означает, что существует число, обозначим его через b, ограничивающее сверху множество B. Тогда, согласно определению множества B, имеем $b \in B$ и, следовательно, множество B не пусто:

$$B \neq \varnothing. \tag{2.11}$$

Докажем, что и множество A не пусто. По условию множество E не пусто. Это означает, что существует по крайней мере одно число $x \in E$. Тогда число $x-1$ заведомо не ограничивает сверху множество A, ибо $x-1<x$, $x \in E$, т. е. в множестве E нашелся элемент x, больший чем $x-1$. Таким образом, $x-1 \notin B$, ибо множество B состоит только из чисел, ограничивающих сверху множество B. Поэтому $x-1 \in A$, ибо к множеству A отнесены все числа, не вошедшие в множество B. Итак, множество A также не пусто:

$$A \neq \varnothing. \tag{2.12}$$

Покажем теперь, что каждое число $a \in A$ меньше любого числа $b \in B$:

$$a < b. \tag{2.13}$$

Допустим противное: пусть найдутся такие числа $a \in A$ и $b \in B$, что $a \geqslant b$. Тогда, поскольку число b ограничивает сверху множество E, в силу неравенства $a \geq b$ оказалось бы, что и число a ограничивает сверху множество E и, следовательно, принадлежит множеству B, $a \in B$. Таким образом, число a принадлежит одновременно как множеству A, так и множеству B. Это невозможно, ибо к множеству A были отнесены только те числа, которые не содержатся в множестве B. Полученное противоречие показывает, что неравенство $a \geq b$ при условии $a \in A$, $b \in B$, невозможно и, тем самым, выполняется неравенство (2.13).

Выполнение условий (2.10)—(2.13) означает, что множества A и B действительно образуют сечение (см. определение 1 в п. 2.1). Пусть β — число, производящее это сечение, $\beta = A \mid B$. Такое число существует в силу непрерывности действительных чисел (см. свойство V в п. 2.1).

Покажем, что число β ограничивает сверху множество E. Если бы это было не так, то нашлось бы такое число $x \in E$, что $x > \beta$. Выберем какое-либо y так, чтобы $\beta < y < x$ (рис. 5). Поскольку $y > \beta$ и $\beta = A \mid B$, то $y \in B$ и, следовательно, число y ограничивает сверху множество E, ибо класс B состоит только из таких чисел. Но это заведомо невозможно, так как $y < x$ и $x \in E$, т. е. y меньше некоторого числа из E и потому не ограничивает сверху это множество. Полученное противоречие означает, что число β ограничивает сверху множество E и потому $\beta \in B$. Поскольку β производит сечение $A \mid B$, то оно может являться либо наибольшим в классе A, если оно принадлежит этому классу, либо наименьшим в классе B, если оно ему принадлежит. В нашем случае, как было показано, имеет место второй случай: $\beta \in B$; следовательно, $\beta = \min B$. Таким образом, число β является наименьшим среди всех чисел множества B, т. е. всех чисел, ограничивающих сверху множество E. Это и означает, что число β является верхней гранью множества E, $\beta = \sup E$.

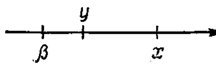

Рис. 5

Если теперь E — непустое ограниченное снизу числовое множество, то отнесем к классу A все числа, ограничивающие снизу множество E, а к классу B все остальные. Далее, рассуждая аналогично рассмотренному случаю верхней грани, можно показать, что множества A и B образуют сечение в множестве действительных чисел, а число α, производящее это сечение, является нижней гранью множества E, $\alpha = \inf E$.

Впрочем, утверждение о существовании нижней грани у ограниченного снизу непустого множества можно получить и из уже доказанного утверждения о существовании верхней грани у непустого ограниченного сверху множества. Для этого достаточно заметить, что если E — ограниченное снизу множество, то множество E^* всех чисел $-x$, где $x \in E$, т. е. множество на числовой прямой, симметричное с множеством E относительно нуля, является уже ограниченным сверху множеством (рис. 6). Действительно, если число a ограничивает снизу множество E, то число $-a$ ограничивает сверху множество E^*. Отсюда легко следует, что $\inf E = -\sup E^*$. □

Теорема о существовании верхних и нижних граней принадлежит к так называемым чистым теоремам существования: в ней доказывается, что при определенных условиях у множества существует верхняя, соответственно нижняя грань. Однако из рассуждений, проведенных при доказательстве этой теоремы, не следует способа нахождения этих граней в конкретном случае.

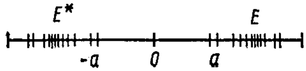

Рис. 6

Это следует из того, что построение множества B, с помощью которого проводилось доказательство теоремы и которое состояло из всех чисел, ограничивающих сверху рассматриваемое множество, равносильно отысканию верхней грани β этого множества. В действительности задача нахождения верхней (нижней) грани множества, заданного какими-либо своими свойствами, может оказаться очень трудной задачей.

Если множество неограничено сверху (снизу), то, как уже отмечалось, никакое число не может являться его верхней (нижней) гранью, так как вообще нет чисел, которые его ограничивают сверху (снизу). Для удобства вводится следующее определение.

Верхней гранью неограниченного сверху множества называется $+\infty$, *а нижней гранью неограниченного снизу множества называется* $-\infty$.

Это определение естественно, так как при соглашениях, принятых относительно употребления символов $+\infty$ и $-\infty$ в п. 2.5, так определенные бесконечные грани множеств также удовлетворяют условиям 1° и 2° определений 6′ и 7′.

Удобство же этого определения состоит в том, что теперь *каждое непустое числовое множество имеет верхнюю грань, принадлежащую расширенному множеству действительных чисел.* При этом, если заданное множество ограничено сверху, то его верхняя грань конечна, если же оно неограничено сверху, то бесконечна и равна $+\infty$. Аналогичное утверждение справедливо и для нижней грани.

Упражнения. 4. Пусть заданы числовые множества X_i, $i=1, 2, \ldots, n$, и пусть

$$X \overset{\text{def}}{=} \{x : x = x_1 + \ldots + x_n,\ x_i \in X_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Доказать, что $\sup X = \sum\limits_{i=1}^{n} \sup X_i$.

5. Пусть заданы два числовых множества X и Y и пусть

$$Z \overset{\text{def}}{=} \{z : z = x - y,\ x \in X,\ y \in Y\}.$$

Доказать, что $\sup Z = \sup X - \inf Y$.

Покажем теперь, что из теоремы о существовании верхних и нижних граней вытекают два важных свойства действительных чисел, одно из которых обычно называют свойством Архимеда*) (конечно, правильнее было бы сказать: свойство чисел, указанное Архимедом, но это очень длинно), а второе принципом вложенных отрезков.

2.9. СВОЙСТВО АРХИМЕДА

Свойство Архимеда действительных чисел состоит в следующем.

Теорема 2. *Каково бы ни было действительное число a, существует такое натуральное число n, что $n > a$, т. е.*

$$(\forall a \in \boldsymbol{R})\,(\exists n \in \boldsymbol{N}) : n > a.$$

Доказательство. Допустим, что свойство Архимеда не выполняется. Это означает, что существует такое число a, что для всех натуральных n выполняется неравенство $n \leqslant a$, т. е. $(\exists a \in \boldsymbol{R})\,(\forall n \in \boldsymbol{N}) : n \leqslant a$. Это значит, что число a ограничивает сверху множество натуральных чисел. Поэтому множество натуральных чисел, как всякое непустое ограниченное сверху числовое множество, согласно теореме 1, п. 2.8 имеет конечную верхнюю грань. Обозначим ее через β, $\beta = \sup \boldsymbol{N}$.

Поскольку $\beta - 1 < \beta$, то согласно свойству 2° верхней грани в определении 6′, п. 2.8 существует такое натуральное число n, что $n > \beta - 1$. Но тогда $n + 1 > \beta$, причем согласно определению натуральных чисел $n + 1 \in \boldsymbol{N}$. Неравенство $n + 1 > \beta$ противоречит тому, что $\beta = \sup \boldsymbol{N}$, так как верхняя грань множества ограничивает его сверху (см. свойство 1° верхней грани в определении 6′ п. 2.8). Полученное противоречие показывает, что указанного числа a не существует, т. е. свойство Архимеда справедливо. □

Следствие. *Каковы бы ни были числа a и b, $0 < a < b$, существует такое натуральное число n, что $na > b$.*

Действительно, согласно свойству Архимеда для числа b/a существует такое натуральное n, что $n > b/a$. Это число n искомое, так как, умножая неравенство $n > b/a$ на положительное число a, получаем $na > b$.

Это утверждение имеет простой геометрический смысл: если взять два отрезка соответственно длин a и b, $0 < a < b$, то последовательно откладывая на большем отрезке от одного из его концов меньший отрезок, мы через конечное число шагов выйдем за пределы большего отрезка.

Пример. Пусть множество E состоит из чисел вида $\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Найдем $\sup E$ и $\inf E$.

---

*) Архимед (287—212 до н. э.) — древнегреческий математик и механик.

Поскольку множество E имеет наибольшее число 1, то оно и является его верхней гранью: $\sup\limits_{n\in N}\left\{\frac{1}{n}\right\}=1$. Для отыскания нижней грани множества E заметим, что для любого $n=1, 2, \ldots$ справедливо неравенство $\frac{1}{n}>0$, т. е. число ноль ограничивает снизу множество E. Покажем, что оно наибольшее среди всех таких чисел. Пусть $\varepsilon>0$, тогда согласно свойству Архимеда существует такое натуральное n, что $n>\frac{1}{\varepsilon}$, или, что то же самое, $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Это неравенство показывает, что любое число $\varepsilon>0$ уже не ограничивает снизу множество E, ибо $\frac{1}{n}\in E$ при любом $n=1, 2, \ldots$. Итак, ноль — наибольшее из всех чисел, ограничивающих снизу множество E, т. е. $\inf\limits_{n\in N}\left\{\frac{1}{n}\right\}=0$.

2.10. ПРИНЦИП ВЛОЖЕННЫХ ОТРЕЗКОВ

Прежде всего поясним, какая система отрезков называется вложенной.

Определение 8. *Система числовых отрезков*

$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots, a_n\in \boldsymbol{R}, b_n\in \boldsymbol{R}, \quad n=1, 2, \ldots,$

называется системой вложенных отрезков, если

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n\leqslant\ldots\leqslant b_n\leqslant\ldots\leqslant b_2\leqslant b_1, \tag{2.14}$$

т. е. если каждый следующий отрезок $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ *содержится в предыдущем* $[a_n, b_n]$ (рис. 7).

Теорема 3. *Для всякой системы вложенных отрезков существует хотя бы одно число, которое принадлежит всем отрезкам данной системы.*

Это свойство действительных чисел называют также *непрерывностью множества действительных чисел в смысле Кантора**).

Доказательство. Пусть $\Omega=\{[a_n, b_n]\}$ — система вложенных отрезков. В силу неравенств (2.14) множество $\{a_n\}$ всех левых концов отрезков системы Ω ограничено сверху, например, числом b_1. Поэтому согласно теореме о существовании верхней грани (см. теорему 1 в п. 2.8) у множества $\{a_n\}$ существует конечная верхняя грань (рис. 7)

$$\alpha=\sup\{a_n\}. \tag{2.15}$$

Поскольку правый конец b_n любого отрезка системы Ω в силу неравенств (2.14) ограничивает сверху множество $\{a_n\}$, а α явля-

*) Г. Кантор (1845—1918) — немецкий математик.

ется верхней гранью этого множества, т. е. наименьшим из всех чисел, ограничивающих $\{a_n\}$ сверху, то для всех $n=1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\alpha \leqslant b_n. \tag{2.16}$$

Это означает, что множество $\{b_n\}$ всех правых концов отрезков системы Ω ограничено снизу, и потому у него существует конечная нижняя грань

$$\beta = \inf \{b_n\}. \tag{2.17}$$

Поскольку число α согласно (2.16) ограничивает снизу множество $\{b_n\}$, а нижняя грань β этого множества является наибольшим среди всех таких чисел, то $\beta \geqslant \alpha$. Итак, имеем, что для всех $n=1, 2, \ldots$ справедливы неравенства

$$a_n \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b_n. \tag{2.18}$$

Рис. 7

Отсюда следует, что каждая точка отрезка $[\alpha, \beta]$ содержится во всех отрезках системы Ω: если $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, то для всех $n=1, 2, \ldots$ имеет место неравенство $a_n \leqslant x \leqslant b_n$, т. е. $x \in [a_n, b_n]$. □

Замечание. При доказательстве теоремы 3 было показано, что каждая точка отрезка $[\alpha, \beta]$ принадлежит всем отрезкам системы Ω и, следовательно, их пересечению, т. е.

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]. \tag{2.19}$$

Легко убедиться и в обратном включении. Если $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, то для всех $n=1, 2, \ldots$ имеем $a_n \leqslant x \leqslant b_n$. Поскольку число x ограничивает сверху множество $\{a_n\}$, а $\alpha = \sup \{a_n\}$ является наименьшим среди всех таких чисел, то $\alpha \leqslant x$. Аналогично показывается, что $x \leqslant \beta$. Таким образом точка x принадлежит отрезку $[\alpha, \beta]$, т. е.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \subset [\alpha, \beta]. \tag{2.20}$$

Из (2.19) и (2.20) следует, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = [\alpha, \beta]. \tag{2.21}$$

Определение 9. *Пусть задана система отрезков* $[a_n, b_n]$, $a_n \in R$, $b_n \in R$, $n=1, 2, \ldots$. *Будем говорить, что длина* $b_n - a_n$ *отрезков этой системы стремится к нулю, если для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* n_ε, *что для всех номеров* $n \geqslant n_\varepsilon$ *выполняется неравенство* $b_n - a_n < \varepsilon$.

В курсе элементарной математики вводится понятие предела последовательности. Сформулированное определение в терминах предела означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$. В нашем курсе пределу последовательности будет посвящен следующий параграф.

Отметим, что термин «номер» является синонимом термина «натуральное число». Индекс ε у числа n_ε показывает, что это число зависит от задаваемого числа $\varepsilon < 0$.

Теорема 4. *Для всякой системы* $[a_n, b_n]$, $n=1, 2, \ldots$, *вложенных отрезков с длинами, стремящимися к нулю, существует единственная точка* ξ, *принадлежащая всем отрезкам данной системы* (см. рис. 7), *причем*

$$\xi = \sup_{n \in N} \{a_n\} = \inf_{n \in N} \{b_n\}. \tag{2.22}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное, но фиксированное число. Из условия, что длины отрезков $[a_n, b_n]$ стремятся к нулю следует, что существует такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняются неравенства $b_n - a_n < \varepsilon$.

Поскольку из неравенства (2.18) следует, что $\beta - \alpha \leqslant b_n - a_n$, то $0 \leqslant \beta - \alpha < \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Это возможно только в случае, когда $\alpha = \beta$ (если бы $\beta > \alpha$, то, например, при $\varepsilon = \beta - \alpha > 0$ указанное неравенство превратилось бы в неверное утверждение $\beta - \alpha < \beta - \alpha$). Таким образом, отрезок $[\alpha, \beta]$ в этом случае превращается в точку, которую обозначим через $\xi = \alpha = \beta$.

В силу формулы (2.21) это и означает, что существует лишь единственная точка ξ, принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$, $n=1, 2, \ldots$. Формула (2.22) следует из (2.15) и (2.17). $\square$

Очень часто в различных доказательствах применяется следующая конструкция построения системы вложенных отрезков с длинами, стремящимися к нулю. Берется отрезок $[a, b]$ и точкой $(a+b)/2$ делится на два равных отрезка $[a, (a+b)/2]$ и $[(a+b)/2; b]$ длины $(b-a)/2$. Далее выбирается один из этих отрезков (какой именно это зависит от условий конкретной задачи), обозначается через $[a_1, b_1]$ и снова своей средней точкой делится на два равных отрезка, один из которых обозначается $[a_2, b_2]$ и т. д. В результате получается система вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, $n=1, 2, \ldots$, с длинами $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Покажем, что эти длины стремятся к нулю.

Действительно, для всякого $\varepsilon > 0$, согласно свойству Архимеда, найдется такое натуральное n_ε, что $n_\varepsilon > \frac{b-a}{\varepsilon}$, но тогда и для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ будет выполняться неравенство $n > \frac{b-a}{\varepsilon}$ и, следовательно, неравенство $\frac{b-a}{n} < \varepsilon$. Замечая, что

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \ldots > n,$$

получаем $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ для $n = 1, 2, \ldots$. Поэтому для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ справедливо неравенство $\frac{b-a}{2^n} < \frac{b-a}{n} < \varepsilon$. Это и означает стремление к нулю длин отрезков $[a_n, b_n]$ при возрастании n.

Заметим, что принцип вложенных отрезков является свойством, присущим именно множеству действительных чисел. Так, поле одних только рациональных чисел уже не обладает аналогичным свойством.

Например, если взять последовательности «рациональных отрезков» [1; 2], [1,4; 1,5], [1,41; 1,42], [1,414; 1,415]*), т. е. последовательность множеств рациональных чисел, лежащих на отрезках, концы a_n и b_n, $n = 1, 2, \ldots$ которых суть значения $\sqrt{2}$, вычисленные соответственно с недостатком и с избытком с точностью $1/10^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$**), то, очевидно, не существует никакого рационального числа, принадлежащего всем этим отрезкам. В самом деле, таким числом могло быть только число $\sqrt{2}$ (почему?), которое, однако, не является рациональным***).

Можно доказать и более точное утверждение. Назовем поле архимедовым, если для него выполняется свойство Архимеда, т. е. выполняется утверждение теоремы 2 из п. 2.9. Свойство упорядоченного поля, состоящее в том, что каждое сечение этого поля определяется некоторым его элементом, назовем непрерывностью поля по Дедекинду (см. свойство V в п. 2.1), а свойство упорядоченного поля, выражающееся в том, что каждая система его вложенных отрезков имеет непустое пересечение — непрерывностью поля по Кантору.

Для архимедовых упорядоченных полей можно показать, что их непрерывность по Дедекинду, непрерывность по Кантору и существование конечной верхней грани у каждого непустого ограниченного сверху множества эквивалентны между собой, т. е. из любого из этих свойств, принятого за аксиому, вытекают остальные два.

Нами было показано, что из непрерывности по Дедекинду следует существование конечной верхней грани у ограниченного

---

*) В случае, когда концы отрезка $[a, b]$ записаны в виде десятичной дроби, запятая между a и b заменяется точкой с запятой.

**) Это означает, что $a_n^2 \leqslant 2 \leqslant b_n^2$ и $b_n - a_n = 1/10^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

***) Доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$, обычно проводимое в элементарной математике, воспроизведено ниже в п. 6.3.

сверху множества, откуда в свою очередь следует непрерывность по Кантору. Для того чтобы завершить доказательство указанной эквивалентности трех понятий непрерывности архимедовых полей, достаточно показать, что из непрерывности по Кантору следует непрерывность по Дедекинду. Доказательство этого утверждения можно найти, например, в книге Л. Д. Кудрявцева «Математический анализ», том I, М., 1973.

Выше отмечалось (см. п. 2.4*), что все непрерывные по Дедекинду упорядоченные поля изоморфны между собой. Теперь мы видим, что всякое архимедово упорядоченное поле, обладающее одним из трех указанных свойств непрерывности, также изоморфно множеству действительных чисел (при этом при наличии непрерывности по Дедекинду можно требование архимедовости поля отбросить: как было показано в п. 2.9, оно в этом случае всегда имеет место).

В заключение обратим еще внимание на то, что утверждение, аналогичное теореме 3, оказывается уже неверным для числовых промежутков других типов, чем отрезки. Например, система вложенных интервалов $(0, 1/n)$, $n=1, 2, \ldots$. каждый последующий интервал содержится в предыдущем, т. е.

$$\left(0, \frac{1}{n+1}\right) \subset \left(0, \frac{1}{n}\right), \quad n=1, 2, \ldots,$$

имеет, как легко видеть, пустое пересечение.

Задача 1. Доказать с помощью сечений, что для любого числа $a>0$ и любого натурального n существует корень $\sqrt[n]{a}$.

§ 3. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Прежде всего определим понятие числовой последовательности.

Определение 1. *Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число a_n (при этом разным натуральным числам n могут оказаться поставленными в соответствие и одинаковые числа). Совокупность элементов a_n* *), *$n=1, 2, \ldots$, называется числовой последовательностью, или просто последовательностью; каждый элемент a_n называется элементом (или членом) этой последовательности, а число n — его номером.*

Числовую последовательность с элементами a_n будем обозначать либо a_n, $n=1, 2, \ldots$, либо $\{a_n\}$.

*) Здесь под элементом понимается пара, состоящая из натурального числа и соответствующего ему при рассматриваемом соответствии действительного числа (называемого в дальнейшем значением данного элемента последовательности).