сверху множества, откуда в свою очередь следует непрерывность по Кантору. Для того чтобы завершить доказательство указанной эквивалентности трех понятий непрерывности архимедовых полей, достаточно показать, что из непрерывности по Кантору следует непрерывность по Дедекинду. Доказательство этого утверждения можно найти, например, в книге Л. Д. Кудрявцева «Математический анализ», том I, М., 1973.

Выше отмечалось (см. п. 2.4*), что все непрерывные по Дедекинду упорядоченные поля изоморфны между собой. Теперь мы видим, что всякое архимедово упорядоченное поле, обладающее одним из трех указанных свойств непрерывности, также изоморфно множеству действительных чисел (при этом при наличии непрерывности по Дедекинду можно требование архимедовости поля отбросить: как было показано в п. 2.9, оно в этом случае всегда имеет место).

В заключение обратим еще внимание на то, что утверждение, аналогичное теореме 3, оказывается уже неверным для числовых промежутков других типов, чем отрезки. Например, система вложенных интервалов $(0,\ 1/n)$, $n=1,\ 2,\ \ldots$. каждый последующий интервал содержится в предыдущем, т. е.

$$\left(0,\ \frac{1}{n+1}\right)\subset\left(0,\ \frac{1}{n}\right),\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

имеет, как легко видеть, пустое пересечение.

Задача 1. Доказать с помощью сечений, что для любого числа $a>0$ и любого натурального n существует корень $\sqrt[n]{a}$.

§ 3. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Прежде всего определим понятие числовой последовательности.

Определение 1. *Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число a_n (при этом разным натуральным числам n могут оказаться поставленными в соответствие и одинаковые числа). Совокупность элементов a_n* *), *$n=1, 2, \ldots$, называется числовой последовательностью, или просто последовательностью; каждый элемент a_n называется элементом (или членом) этой последовательности, а число n — его номером.*

Числовую последовательность с элементами a_n будем обозначать либо a_n, $n=1,\ 2,\ \ldots$, либо $\{a_n\}$.

---

*) Здесь под элементом понимается пара, состоящая из натурального числа и соответствующего ему при рассматриваемом соответствии действительного числа (называемого в дальнейшем значением данного элемента последовательности).

По самому определению, последовательность всегда содержит бесконечное множество элементов: любые два разных ее элемента отличаются по крайней мере своими номерами, которых бесконечно много.

Очевидно, что числовая последовательность является частным случаем функции. Именно, последовательность является *функцией, определенной на множестве натуральных чисел и принимающей значения в множестве действительных чисел*, т. е. функцией вида $f: N \to R$ (см. п. 1.3*).

Иногда в качестве номеров бывает удобно употреблять не все натуральные числа, а лишь некоторые из них. Например, натуральные числа, начиная с некоторого натурального числа n_0: a_n, $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$, или одни четные числа: a_n, $n = 2, 4, \ldots$. Случается, что для нумерации употребляются не только натуральные, но и другие числа, например a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (здесь в качестве еще одного номера добавлен нуль). Во всех этих случаях можно перенумеровать заново a_n, используя все натуральные числа m и только их. В первом примере следует положить $m = n - n_0 + 1$, во втором — $m = \frac{n}{2}$, в третьем — $m = n + 1$. Поэтому в подобных случаях также говорится, что a_n образуют последовательность и, конечно, указывается, какие значения принимают номера n.

Определение 2. *Число a называется пределом данной последовательности $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство*

$$|a_n - a| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

При этом пишут $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, или $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

Употребляя логические символы, это определение можно записать в виде:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_\varepsilon \in N)\,(\forall n \geqslant n_\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Последовательность, у которой существует предел, называется *сходящейся*.

Таким образом, последовательность $\{a_n\}$ является сходящейся, если существует такое число a, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

С употреблением логических символов это определение выглядит следующим образом:

$$(\exists a \in R)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_\varepsilon \in N)\,(\forall n \geqslant n_\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Последовательность, не являющаяся сходящейся, называется расходящейся.

Отметим, что неравенство (3.1) равносильно неравенству

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon.$$

Напомним, что для заданного числа $x\in\boldsymbol{R}$ всякий интервал вида $(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$, называется *ε-окрестностью*, или просто окрестностью, числа (точки) x и обозначается через $U(x,\ \varepsilon)$ или $U(x)$.

С помощью понятия окрестности определение предела последовательности можно перефразировать следующим образом.

Определение 2′. *Число a является пределом последовательности $\{a_n\}$, если в любой его окрестности содержатся почти все члены последовательности, т. е. все члены последовательности, за исключением их конечного числа.*

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ и $a_n\leqslant a$ (соответственно $a_n\geqslant a$) для всех $n=1,\ 2,\ \ldots$, то говорят, что последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу a *слева* (соответственно *справа*) и иногда вместо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$ $=a$ пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a-0$ (соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a+0$).

Понятие предела последовательности связано в определенном смысле с встречающейся на практике задачей получения значения некоторой интересующей нас величины с наперед заданной фиксированной точностью $\varepsilon>0$. Последовательные приближенные значения a_n рассматриваемой величины могут получаться в результате проведения каких-либо экспериментов, или вычисления по каким-нибудь рекуррентным формулам или каким-то другим путем. Эта задача будет, очевидно, решена, если найдется номер n_ε, начиная с которого все значения a_n будут отклоняться от точного значения рассматриваемой величины в пределах заданной точности. Конечно, если указанное n_ε существует лишь для одного данного $\varepsilon>0$, это еще не означает, что последовательность $\{a_n\}$ сходится: в определении предела последовательности требуется, чтобы соответствующий номер n_ε можно было бы подобрать для любого $\varepsilon>0$.

Примеры. 1. Последовательность $\{1/n\}$ сходится и имеет своим пределом ноль. В самом деле, каково бы ни было $\varepsilon>0$, по свойству Архимеда (см. п. 2.9) действительных чисел существует такое натуральное число n_ε, что $n_\varepsilon>\frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому для всех $n\geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство $0<\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{n_\varepsilon}<\varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Очевидно, что последовательность $\{1/n\}$ сходится к нулю справа.

2. Последовательность $\left\{\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$ является расходящейся. В самом деле, каково бы ни было число a, вне его ε-окрестности,

например при $0<\varepsilon<1$, заведомо лежит бесконечное число членов данной последовательности, и, значит, оно не является ее пределом.

3. Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2}n=$ $=0$, что следует (почему?) из того, что

$$\left|\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2}n\right|\leqslant\frac{1}{n} \text{ и } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Сходящаяся последовательность $\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$ не является последовательностью, сходящейся к своему пределу слева или справа.

4. Последовательность $\{n\}$ расходится.

Действительно, каково бы ни было число a, например, для $\varepsilon=1$ найдется согласно свойству Архимеда такое натуральное n_0, что $n_0>a+1$. Следовательно, и для всех натуральных $n\geqslant n_0$ будем иметь $n>a+1$. Поэтому никакое число a не может являться пределом последовательности $\{n\}$.

В примерах 2 и 4 при доказательстве расходимости последовательностей было использовано позитивное определение того обстоятельства, что число a не является пределом данной последовательности. Сформулируем это определение.

Определение 3. *Число a не является*) пределом последовательности $\{a_n\}$, если существует такое $\varepsilon>0$, что для всякого натурального n существует такое натуральное $m_n>n$ **), что*

$$|a_{m_n}-a|\geqslant\varepsilon.$$

В логических символах это определение имеет вид

$$\lim_{n\to\infty}a_n\neq a\Longleftrightarrow(\exists\varepsilon>0)(\forall n\in N)(\exists m>n):|a_m-a|\geqslant\varepsilon.$$

Напомним, что при формулировании отрицания какого-либо утверждения логические символы существования $\exists$ и всеобщности $\forall$ меняются местами. Именно так и произошло в данном случае, в чем легко убедиться, сравнив запись определений 2 и 4 в логических символах.

Заметим, что определение 3 не является самостоятельным определением — оно является логическим следствием определения 2.

Упражнения. 1. Сформулировать позитивное определение понятия расходящейся последовательности.

2. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

Задача 2. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится тогда и только тогда, когда существует такое число $\varepsilon>0$, что, каково бы ни было действи-

*) Здесь частица «не» входит не в определение, а в определяемое понятие.

**) Индекс n у числа m_n показывает, что это число зависит от выбора числа n.

тельное число a и каков бы ни был номер n, найдется такой номер $m > n$, для которого выполняется неравенство $|x_m - a| \geqslant \varepsilon$.

Упражнение 3. Записать позитивное определение расходящейся последовательности и условие задачи 2 в логических символах и сравнить их.

В рассмотренных выше примерах существование или отсутствие пределов у данных последовательностей было довольно очевидным, а доказательства сводились к элементарной проверке определения предела последовательности.

В качестве более сложного примера отыскания предела последовательности докажем следующее утверждение.

Пример 5. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то последовательность средних арифметических ее членов*

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

также сходится и притом к тому же пределу, что и сама последовательность $\{x_n\}$.

Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Прежде всего заметим, что для любых натуральных чисел n_0 и $n > n_0$ имеет место равенство

$$y_n - a = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - a =$$
$$= \frac{x_1 + \ldots + x_{n_0} - n_0 a}{n} + \frac{(x_{n_0+1} - a) + \ldots + (x_n - a)}{n}. \quad (3.2)$$

Если теперь задано $\varepsilon > 0$, то согласно определению предела существует такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.3)$$

Поскольку $x_1 + \ldots + x_{n_0} - n_0 a$ — фиксированное число, а $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, то, как нетрудно видеть, и

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_1 + \ldots + x_{n_0} - n_0 a}{n} = 0.$$

Следовательно, существует такой номер m_0, что для всех $n \geqslant m_0$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{x_1 + \ldots + x_{n_0} - n_0 a}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.4)$$

Пусть $n_\varepsilon = \max\{n_0, m_0\}$. Тогда для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ в силу (3.2), (3.3) и (3.4) получим

$$|y_n - a| \leqslant \left|\frac{x_1 + \ldots + x_{n_0} - n_0 a}{n}\right| + \frac{|x_{n_0+1} - a| + \ldots + |x_n - a|}{n} <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - n_0}{n}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. □

Упражнение 4. Доказать: 1) что отбрасывание или замена конечного числа элементов последовательности не влияет на ее сходимость, причем в случае сходящейся последовательности не влияет и на величину предела.

2) если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$ и $z_n = \begin{cases} x_k & \text{при } n = 2k-1, \\ y_k & \text{при } n = 2k, \end{cases}$ $k = 1, 2, \ldots$, то и $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$.

3.2. БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Для удобства вводится также понятие последовательностей, имеющих своим пределом бесконечность. Такие последовательности называются *бесконечно большими*. Определим их.

Определение 4. *Последовательность $\{x_n\}$ называют бесконечно большой, если для любого числа ε существует такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n| > \varepsilon$.*

В этом случае, употребляя символ ∞, пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Если последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$, такова, что для любого числа ε [*] существует такое n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство $x_n > \varepsilon$ (соответственно $x_n < \varepsilon$), то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $\left(\text{соответственно } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty\right)$. Во всех этих случаях говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет *бесконечный предел*, соответственно равный ∞, $+\infty$ или $-\infty$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, т. е. $\{x_n\}$ является бесконечно большой последовательностью. Очевидно, что бесконечно большие последовательности не имеют предела в том смысле, как он был определен в п. 3.1. Применение в этом случае обозначения «lim» и использование слова «предел» является традиционным.

В дальнейшем всегда под пределом последовательности будем понимать конечный предел, т. е. число, если, конечно, не оговорено противное.

---

[*] Следует обратить внимание на то, что здесь ε не предполагается положительным.

Термин «сходящаяся последовательность» употребляется только для последовательностей, имеющих конечный предел.

С помощью понятия окрестности можно всем сформулированным выше определениям конечного или бесконечного предела последовательности придать более единообразную форму. В п. 2.6 было введено понятие окрестности чисел $x \in \boldsymbol{R}$ и бесконечно удаленных точек $+\infty$ и $-\infty$. Аналогично можно для любого $\varepsilon > 0$ определить и понятие ε-окрестности $U(\infty, \varepsilon)$ бесконечности ∞ без знака:

$$U(\infty, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} U(+\infty, \varepsilon) \cup U(-\infty, \varepsilon).$$

ε-окрестность $U(\infty, \varepsilon)$ называют также просто окрестностью бесконечности ∞ и обозначают через $U(\infty)$.

Используя понятие окрестности, определение конечного и любого бесконечного предела числовой последовательности можно сформулировать единым образом.

Определение 5. *Элемент a, являющийся числом или одной из бесконечностей ∞, $+\infty$, $-\infty$, называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если какова бы ни была окрестность $U(a)$ элемента a, для нее существует такой номер $n_0 \in \boldsymbol{N}$, что для всех $n \geqslant n_0$, $n \in \boldsymbol{N}$, справедливо включение $x_n \in U(a)$.*

Наряду с числовыми последовательностями в нашем курсе будут встречаться последовательности точек расширенной числовой прямой, т. е. занумерованные натуральными числами совокупности $\{x_n\}$ элементов расширенного множества действительных чисел $\overline{\boldsymbol{R}}$ (см. п. 2.5). Таким образом, элементами этих последовательностей наряду с действительными числами могут быть бесконечно удаленные точки $+\infty$ и $-\infty$. Для таких последовательностей также можно ввести понятие предела, аналогичное пределу числовых последовательностей и содержащее его в себе как частный случай.

Определение 6. *Элемент a, являющийся числом или одной из бесконечностей ∞, $+\infty$, $-\infty$, называется пределом последовательности точек $x_n \in \overline{\boldsymbol{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, если какова бы ни была окрестность $U(a)$ элемента a, для нее существует такой номер $n_0 \in \boldsymbol{N}$, что для всех $n \geqslant n_0$, $n \in \boldsymbol{N}$, выполняется включение $x_n \in U(a)$.*

Если последовательность $x_n \in \overline{\boldsymbol{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, такова, что все ее члены равны между собой: $x_n = x_m$ при всех $n \in \boldsymbol{N}$ и $m \in \boldsymbol{N}$, то она, как известно, называется *стационарной*.

Всякая стационарная последовательность точек расширенного множества действительных чисел имеет предел, равный общему значению ее членов. Это сразу следует из того, что каждая точка расширенной числовой прямой содержится в любой своей окрестности. В самом деле, если для всех $n \in \boldsymbol{N}$ имеет место $x_n = a \in \overline{\boldsymbol{R}}$, то для любой окрестности $U(a)$ точки a и всех $n \in N$ очевидным образом выполняется включение $x_n = a \in U(a)$.

В дальнейшем под последовательностью всегда понимается числовая последовательность, т. е. последовательность, элементами которой являются действительные числа, если, конечно, специально не оговорено что-либо другое.

Упражнения. 5. Привести пример неограниченной последовательности, не являющейся бесконечно большой.

6. Доказать, что если $a_n \leqslant |b_n|$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

7. Доказать, что любая подпоследовательность бесконечно большой последовательности также является бесконечно большой последовательностью.

8. Доказать: почленное произведение бесконечно большой последовательности на последовательность, абсолютная величина всех членов которой ограничена снизу положительной постоянной, является бесконечно большой последовательностью.

3.3. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Докажем прежде всего корректность определения предела в том смысле, что если он существует, то он единствен.

Теорема 1. *Последовательность точек расширенной числовой прямой может иметь на этой прямой только один предел.*

Следствие. *Числовая последовательность может иметь только один предел, конечный или бесконечный определенного знака.*

Доказательство теоремы. Допустим, что утверждение теоремы несправедливо. Это означает, что существует последовательность $x_n \in \bar{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, у которой имеется, по крайней мере, два различных предела $a \in \bar{R}$ и $b \in \bar{R}$. Выберем $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ так, чтобы ε_1-окрестность точки a не пересекалась с ε_2-окрестностью точки b. Это всегда можно сделать согласно лемме п. 2.6 (см. рис. 4, *а*, *б*, *в* и *г*). В силу определения предела из условия $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ следует, что существует такой номер $n_1 \in N$, что для всех номеров $n \geqslant n_1$, $n \in N$, имеет место включение $x_n \in U(a, \varepsilon_1)$, а из условия $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ следует, что существует такое $n_2 \in N$, что для всех $n \geqslant n_2$, $n \in N$, справедливо включение $x_n \in U(b, \varepsilon_2)$. Следовательно, если обозначить через n_0 наибольший из номеров n_1 и n_2: $n_0 \overset{\text{def}}{=} \max\{n_1, n_2\}$, то для любого $n \geqslant n_0$ будем одновременно иметь $x_n \in U(a, \varepsilon_1)$ и $x_n \in U(b, \varepsilon_2)$, т. е. $x_n \in U(a, \varepsilon_1) \cap U(b, \varepsilon_2)$. Это противоречит условию $U(a, \varepsilon_1) \cap U(b, \varepsilon_2) = \varnothing$. $\square$

Следствие является частным случаем утверждения теоремы.

Для единственности бесконечного предела последовательности элементов из $\bar{R}$ существенным является рассмотрение лишь бесконечностей определенного знака, так как если последовательность имеет своим пределом бесконечность со знаком, то одновременно ее пределом является и бесконечность без знака. Например, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то, конечно, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Докажем теперь некоторые простые свойства конечных и бесконечных пределов.

I. *Если* $x_n \in \overline{R}$, $y_n \in \overline{R}$, $z_n \in \overline{R}$, $n = 1, 2, \ldots,$

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n \tag{3.5}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a \in \overline{R}, \tag{3.6}$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Доказательство. Пусть зафиксировано $\varepsilon > 0$. Тогда согласно определению предела существуют такие $n_1 \in N$ и $n_2 \in N$, что для всех $n \geqslant n_1$, $n \in N$, выполняется включение $x_n \in U(a, \varepsilon)$, а для всех $n \geqslant n_2$, $n \in N$, — включение $z_n \in U(a, \varepsilon)$. Следовательно, если обозначить через n_0 наибольшее из чисел n_1 и n_2: $n_0 \overset{\text{def}}{=} \max\{n_1, n_2\}$, то для всех номеров $n \geqslant n_0$, $n \in N$, будем иметь $x_n \in U(a, \varepsilon)$, $z_n \in U(a, \varepsilon)$, а поэтому и $[x_n, z_n] \subset U(a, \varepsilon)$ (см. замечание 1 в п. 2.6). Неравенство (3.5) означает, что $y_n \in [x_n, z_n]$. Следовательно, при $n \geqslant n_0$ имеет место $y_n \in U(a, \varepsilon)$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. $\square$

II. *Если* $x_n \leqslant y_n$, $x_n \in \overline{R}$, $y_n \in \overline{R}$, $n = 1, 2, \ldots,$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *(соответственно,* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$*), то и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ *(соответственно,* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$*).*

Это свойство является усилением свойства I для бесконечных пределов: в этом случае вторая последовательность $\{z_n\}$ не нужна.

Доказательство. Из условия $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_\varepsilon \in N$, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$, $n \in N$, выполняется условие $x_n > \varepsilon$. В силу неравенства $x_n \leqslant y_n$, очевидно, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ имеет также место неравенство $y_n > \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

Аналогично рассматривается случай $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$. $\square$

III. *Если* $x_n \in \overline{R}$, $y_n \in \overline{R}$, $n = 1, 2, \ldots,$ *и существуют пределы* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *причем* $a < b$, $a \in \overline{R}$, $b \in \overline{R}$, *то существует такой номер* $n_0 \in N$, *что для всех номеров* $n \geqslant n_0$, $n \in N$, выполняется неравенство $x_n < y_n$.

Следствие. *Если существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \in \overline{R}$, $n = 1, 2, \ldots,$ $a \in \overline{R}$ *и* $a < c$ *(соответственно,* $a > c$*),* $c \in \overline{R}$, *то суще-*

ствует такое $n_0 \in N$, что для всех $n \geqslant n_0$, $n \in N$, справедливо неравенство $x_n < c$ (соответственно, $x_n > c$).

Доказательство. Выберем какие-либо числа $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ так, чтобы окрестности $U(a, \varepsilon_1)$ и $U(b, \varepsilon_2)$ не пересекались (см. п. 2.6). Тогда ясно, что в силу неравенства $a < b$ для любых $x \in U(a, \varepsilon_1)$ и $y \in U(b, \varepsilon_2)$ выполняется неравенство $x < y$ (см. замечание 2 в п. 2.6). В силу определения предела существуют такие $n_1 \in N$ и $n_2 \in N$, что при $n \geqslant n_1$, $n \in N$, выполняется включение $x_n \in U(a, \varepsilon_1)$, а при $n \geqslant n_2$, $n \in N$, — включение $y_n \in U(b, \varepsilon_2)$. Следовательно, если положить $n_0 \stackrel{\text{def}}{=} \max\{n_1, n_2\}$, то при $n \geqslant n_0$ будет справедливо неравенство $x_n < y_n$. □

Следствие вытекает из свойства III, если в нем в качестве последовательности $\{y_n\}$ взять стационарную последовательность $y_n = c$, $n = 1, 2, \ldots$, (см. п. 3.2).

IV. *Если существует $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \in \overline{R}$, $x_n \in \overline{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, и для всех $n \in N$ справедливо неравенство $x_n \leqslant b$ (соответственно, неравенство $x_n \geqslant b$), $b \in \overline{R}$, то $a \leqslant b$ (соответственно, $a \geqslant b$).*

Действительно, если бы оказалось, что $a > b$ (соответственно, $a < b$), то согласно следствию свойства III нашлось бы такое $n_0 \in N$, что при $n \geqslant n_0$, $n \in N$, имело бы место неравенство $x_n > b$ (соответственно, $x_n < b$), что противоречит предположению, что $x_n \leqslant b$ ($x_n \geqslant b$) для всех $n \in N$. □

Отметим, что нас в основном интересуют числовые последовательности. Последовательности же точек расширенной числовой прямой введены прежде всего для большей компактности изложения: они позволяют не рассматривать отдельно случаи конечных и бесконечных определенного знака пределов последовательностей. Исходя из основных целей, в дальнейшем определения и утверждения будут в основном формулироваться для числовых последовательностей, хотя многие из них безо всякого труда обобщаются на случай последовательностей точек расширенной числовой прямой.

Замечание. Если последовательность $\{a_n\}$ имеет конечный предел, равный a, и если фиксировано некоторое число $c > 0$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер, который будет, так же как и в определении предела, обозначаться n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < c\varepsilon.$$

Действительно, если положить $\varepsilon_1 = c\varepsilon$, то согласно определению предела последовательности существует такой номер n_{ε_1}, что для всех номеров $n \geqslant n_{\varepsilon_1}$, выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon_1 = c\varepsilon$$

и в качестве номера n_ε можно взять номер n_{ε_1}.

Например, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Полезным понятием является понятие подпоследовательности данной последовательности.

Определение 7. *Последовательность b_k, $k = 1, 2, \ldots$, называется подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$, если для любого k существует такое натуральное n_k, что $b_k = a_{n_k}$, причем $n_{k_1} < n_{k_2}$ тогда и только тогда, когда $k_1 < k_2$. Последовательность $\{b_k\}$ обозначается в этом случае также $\{a_{n_k}\}$ или a_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots$.*

Иначе говоря, если дана какая-либо последовательность и из некоторого подмножества ее элементов образована новая последовательность, то она называется *подпоследовательностью исходной последовательности*, если порядок следования в ней элементов такой же, как и в данной последовательности.

Так, последовательность $1, 3, 5, \ldots, 2n+1, \ldots$ является, а последовательность $2, 1, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ не является подпоследовательностью натурального ряда чисел $1, 2, \ldots, n, \ldots$ В обоих случаях элементы последовательностей образуют подмножество *) множества натуральных чисел, но в первом случае члены последовательности расположены в том же порядке, как в натуральном ряде чисел, а во втором случае этот порядок нарушен.

Если $\{a_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности, то, очевидно, $n_k \geqslant k$, $k = 1, 2, \ldots$, и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty. \tag{3.7}$$

В дальнейшем мы будем неоднократно пользоваться следующей леммой.

Лемма. *Если последовательность точек расширенного множества действительных чисел имеет предел (конечный или равный ∞, $+\infty$ или $-\infty$), то любая ее подпоследовательность имеет тот же предел.*

Доказательство. Пусть $x_n \in \overline{\boldsymbol{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\{x_{n_k}\}$ — некоторая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где a — либо число, либо одна из бесконечностей ∞, $+\infty$, $-\infty$, то согласно определению 6 для любой окрестности $U(a)$ элемента a существует такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$,

---

*) Напомним (см. п. 1.1), что само множество также считается своим подмножеством.

$n \in N$, выполняется включение

$$x_n \in U(a). \tag{3.8}$$

В силу (3.7) для указанного n_0 существует такое $k_0 \in N$, что при всех $k \geqslant k_0$, $k \in N$, будет иметь место неравенство $n_k \geqslant n_0$ и, следовательно, в силу (3.8) — включение

$$x_{n_k} \in U(a).$$

Это и означает, что

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a.$$

Упражнение 9*. Пусть $k \longmapsto n_k$ — некоторая биекция множества натуральных чисел N на себя: $k \in N$, $n_k \in N$. Доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится (расходится), то и последовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится (расходится), причем в случае сходимости последовательности $\{x_n\}$ или существования у нее какого-либо бесконечного предела последовательность $\{x_{n_k}\}$ имеет тот же предел.

3.4. ОГРАНИЧЕННОСТЬ СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Следует различать *последовательность* $\{a_n\}$, т. е. множество элементов a_n и *множество значений ее элементов*. Первое множество всегда бесконечно, так как состоит из совокупности элементов, отличающихся по крайней мере номерами $n = 1, 2, \ldots$ Второе множество состоит из всех чисел, являющихся значениями элементов данной последовательности, оно может быть и конечным. Например, последовательность $a_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, как и всякая последовательность, состоит из бесконечного числа элементов, а множество значений ее элементов состоит из одного числа 1.

Определение 8. *Последовательность называется ограниченной сверху (снизу), если множество значений ее элементов ограничено сверху (снизу).*

В терминах элементов последовательности это определение может быть перефразировано следующим образом.

Определение 8′. *Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число b, что для всех номеров $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $a_n \leqslant b$ (соответственно неравенство $a_n \geqslant b$).*

Определение 9. *Последовательность, ограниченная сверху и снизу, называется просто ограниченной.*

Очевидно, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда существует такое число b, что для всех номеров $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $|a_n| \leqslant b$.

Определение 10. *Последовательность, не являющаяся ограниченной (сверху, снизу), называется неограниченной (сверху, снизу).*

Например, последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и $\left\{\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$ ограничены. Последовательность $\{n\}$ не ограничена, точнее она ограничена снизу, но не ограничена сверху, а последовательность $\left\{n\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$ является неограниченной как сверху, так и снизу.

Теорема 2. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть дана сходящаяся последовательность $\{a_n\}$ и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Возьмем, например, $\varepsilon = 1$. Согласно определению предела последовательности, существует такое n_1, что для всех $n \geqslant n_1$ выполняется неравенство $|a_n - a| < 1$. Пусть d — наибольшее из чисел 1, $|a_1 - a|$, ..., $|a_{n-1} - a|$. Тогда для всех $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство $|a_n - a| \leqslant d$, т. е. для всех n

$$a - d \leqslant a_n \leqslant a + d.$$

Это и означает ограниченность заданной последовательности. □

3.5. МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение 11. *Верхняя (нижняя) грань множества значений элементов последовательности* $\{a_n\}$ *называется верхней (нижней) гранью данной последовательности и обозначается* $\sup\{a_n\}$ *или* $\sup\limits_{n=1,2,\ldots} a_n$ *(соответственно* $\inf\{a_n\}$ *или* $\inf\limits_{n=1,2,\ldots} a_n$*).*

Если верхняя (нижняя) грань является числом, то это определение можно сформулировать следующим образом.

Определение 11′. *Число a является верхней (нижней) гранью последовательности a_n, $n = 1, 2, \ldots$, если:*

1) *для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $a_n \leqslant a$ (соответственно неравенство $a_n \geqslant a$);*

2) *для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что $a_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$ (соответственно $a_{n_\varepsilon} < a + \varepsilon$).*

Аналогично можно сформулировать определение верхней (нижней) грани последовательности в случае, когда указанная грань бесконечна. (Сделайте это.)

В качестве примеров отметим, что $\sup\{1/n\} = 1$, $\inf\{1/n\} = 0$, $\sup\{n\} = +\infty$, $\inf\{n\} = 1$. Здесь везде $n = 1, 2, \ldots$

Определение 12. *Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей (убывающей) последовательностью, если для каждого $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $x_n \leqslant x_{n+1}$ (соответственно неравенство $x_n \geqslant x_{n+1}$).* *)

---

*) Возрастающие (убывающие) последовательности называются также неубывающими (соответственно невозрастающими).

Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными*.

Например, последовательность $\{1/n\}$ убывает, последовательность $\{n\}$ возрастает, а последовательность $\left\{\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$ не является монотонной.

Теорема 3. *Всякая возрастающая (убывающая) последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, конечный, если она ограничена сверху (снизу) и бесконечный, равный $+\infty$ (соответственно $-\infty$), если она неограничена сверху (снизу), причем*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$$

(соответственно,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}\Big).$$

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ возрастает и ограничена сверху. В силу последнего условия, она имеет конечную верхнюю грань (см. теорему 1 в п. 2.8). Пусть $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{x_n\}$. Покажем, что $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из того, что $\beta = \sup\{x_n\}$, следует, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство $x_n \leqslant \beta$ и что существует такой номер n_ε, что $x_{n_\varepsilon} > \beta - \varepsilon$. Тогда в силу возрастания последовательности $\{x_n\}$ для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ будем иметь: $\beta - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leqslant x_n \leqslant \beta$. Поэтому для всех $n \geqslant n_\varepsilon$, $n \in N$, выполняется неравенство $|x_n - \beta| < \varepsilon$. Это и означает, что $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Если последовательность $\{x_n\}$ неограничена сверху, то $\sup\{x_n\} = +\infty$ (см. п. 2.8). Покажем, что в этом случае и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Снова выберем произвольным образом $\varepsilon > 0$. Из того, что последовательность $\{x_n\}$ неограничена сверху, следует, что существует такой номер n_ε, что $x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$. Тогда в силу возрастания последовательности $\{x_n\}$ для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ будем иметь: $x_n \geqslant x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Аналогично разбирается случай убывающих последовательностей. Впрочем, его можно свести и к случаю возрастающей последовательности, если заметить, что для каждой убывающей последовательности $\{x_n\}$ последовательность $\{-x_n\}$ будет уже возрастающей. $\square$

Таким образом, всякая монотонная последовательность имеет предел: конечный, если она ограничена, и бесконечный, если она не ограничена. Этот предел равен $+\infty$, если монотонная последовательность не ограничена сверху, и он равен $-\infty$, если она не ограничена снизу.

Поскольку всякая подпоследовательность монотонной последовательности также монотонна, то она в свою очередь всегда имеет конечный или бесконечный предел, который, очевидно, совпадает с пределом всей последовательности (см. лемму в п. 3.3).

Мы видели, что если последовательность сходится, то она ограничена (теорема 2), отсюда, в частности, следует, что если возрастающая последовательность сходится, то она ограничена сверху; с другой стороны, если возрастающая последовательность ограничена сверху, то она сходится (теорема 3). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие. *Для того чтобы возрастающая последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху.*

Аналогичное утверждение справедливо и для убывающей последовательности.

Замечание. Если $[a_n, b_n]$ — система вложенных отрезков, по длине стремящихся к нулю, а ξ — точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы, то

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{3.9}$$

В самом деле, в п. 2.10 было показано, что $\xi = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$. С другой стороны, последовательность $\{a_n\}$ (соответственно $\{b_n\}$) возрастает (убывает), откуда и следует (3.9).

Пример. Число e.

Пусть $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \ldots$

Покажем, что эта последовательность сходится. Применяя формулу бинома Ньютона, получаем:

$$\begin{aligned} x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \\ &= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots \\ &\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{1\cdot 2\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots \\ &\ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots \\ &\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Поскольку при переходе от n к $n+1$ число слагаемых, которые все положительны, возрастает и, кроме того, каждое слагаемое увеличивается:

$$1-\frac{s}{n} < 1-\frac{s}{n+1}, \quad s = 1, 2, \ldots, n-1,$$

то

$$x_n < x_{n+1}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Далее, замечая, что в (3.10) каждая из скобок вида $\left(1 - \frac{s}{n}\right)$ меньше единицы и $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ для всех $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, имеем

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leqslant 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Сумма $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$ (которую легко подсчитать по известной из элементарной математики формуле для суммы членов геометрической прогрессии, она равна $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$) при любом $n = 1,\ 2,\ \ldots$ меньше единицы, поэтому окончательно

$$2 \leqslant x_n < x_{n+1} < 3. \tag{3.11}$$

Итак, последовательность $\{x_n\}$ возрастает и ограничена сверху, а значит, согласно теореме 3, имеет предел. Этот предел и обозначается буквой e.

Переходя к пределу в (3.11), получаем $2 < e \leqslant 3$. Более точными оценками можно получить, что справедливо приближенное равенство

$$e \approx 2{,}718281828459045.$$

Доказывается также, что число e иррационально и, более того, трансцендентно, т. е. не является корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Число e в математическом анализе играет особую роль. Оно, в частности, является основанием натуральных логарифмов.

3.6. ТЕОРЕМА БОЛЬЦАНО—ВЕЙЕРШТРАССА

В п. 3.4 было доказано, что всякая сходящаяся последовательность ограничена. Обратное утверждение, конечно, неверно. Например, последовательность $x_n = (-1)^n$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, ограничена и расходится. Однако оказывается, что всякая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность. Это утверждение называется теоремой Больцано — Вейерштрасса *) или свойством компактности ограниченной последовательности.

Теорема 4. *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность, а из любой неограниченной последовательности можно выделить бесконечно большую*

*) Б. Больцано (1781—1848) — чешский математик; К. Вейерштрасс (1815—1897) — немецкий математик.

подпоследовательность, имеющую своим пределом бесконечность определенного знака.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена, т. е. существует такой отрезок $[a, b]$, что $a \leqslant x_n \leqslant b$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ Разделим отрезок $[a, b]$ на два равных отрезка. По крайней мере один из получившихся отрезков содержит бесконечно много элементов данной последовательности. Обозначим его через $[a_1, b_1]$. Пусть x_{n_1} — какой-либо из членов данной последовательности, лежащий на отрезке $[a_1, b_1]$.

Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ на два равных отрезка; снова хоть один из получившихся двух отрезков содержит бесконечно много членов исходной последовательности, обозначим его через $[a_2, b_2]$. В силу того, что на отрезке $[a_2, b_2]$ бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, найдется такой член x_{n_2}, что $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ и $n_2 > n_1$. Продолжая этот процесс, получаем последовательность отрезков $[a_k, b_k]$, в которой каждый последующий является половиной предыдущего, и подпоследовательность таких элементов x_{n_k} данной последовательности, что $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots$ и $n_{k''} > n_{k'}$ при $k'' > k'$. Последовательность $\{x_{n_k}\}$ является в силу построения подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$. Покажем, что эта подпоследовательность сходящаяся.

Последовательность отрезков $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots$, является последовательностью вложенных отрезков, по длине стремящихся к нулю, так как $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \to 0$ при $k \to \infty$. Согласно принципу вложенных отрезков (см. п. 2.10), существует единственная точка ξ, принадлежащая всем этим отрезкам. Как мы видели (см. (3.9) в замечании к теореме 3), $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = \lim\limits_{k \to \infty} b_k = \xi$, но $a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k$, $k = 1, 2, \ldots$, поэтому в силу свойства I (см. п. 3.3) сходящихся последовательностей последовательность $\{x_{n_k}\}$ также сходится, и $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = \xi$.

Пусть теперь последовательность $\{x_n\}$ неограничена. Тогда она либо неограничена сверху, либо неограничена снизу, либо имеет место и то и другое. Пусть для определенности последовательность $\{x_n\}$ неограничена сверху. Тогда существует такой номер $n_1 \in N$, что $x_{n_1} > 1$.

Очевидно, последовательность x_n, $n = n_1 + 1$, $n_1 + 2, \ldots$, также неограничена сверху, так как получается из данной неограниченной сверху последовательности x_n, $n = 1, 2, \ldots$, отбрасыванием конечного числа членов. Поэтому существует такое $n_2 > n_1$, $n_2 \in N$, что $x_{n_2} > 2$.

Продолжая этот процесс, получаем последовательность таких номеров n_k, что

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

и

$$x_{n_1} > 1,\ x_{n_2} > 2,\ \ldots,\ x_{n_k} > k,\ \ldots$$

Отсюда следует, что $\{x_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ и в силу свойства II п. 3.3 что $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = \infty$. □

Определение 13. *Предел, конечный или бесконечный определенного знака, подпоследовательности данной последовательности называется ее частичным пределом.*

Теорема Больцано — Вейерштрасса (первая часть теоремы 4) и ее аналог для неограниченных последовательностей (вторая часть теоремы 4) показывают, что

всякая последовательность имеет хотя бы один частичный конечный или бесконечный предел, причем заведомо конечный, если данная последовательность ограничена.

Таким образом, каждая числовая последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in R$, имеет хотя бы один частичный предел в расширенном множестве действительных чисел, т. е. множество частичных пределов в $\bar{R}$ для любой последовательности всегда не пусто.

Упражнения. 10. Доказать, что для того чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена и имела единственный частичный предел.

11. Доказать, что элемент a (число или одна из бесконечностей $+\infty$ и $-\infty$) является частичным пределом последовательности тогда и только тогда, когда в любой его окрестности содержится бесконечно много членов данной последовательности.

3.7. КРИТЕРИЙ КОШИ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

До сих пор не было дано достаточно общего критерия, с помощью которого можно было бы узнать, сходится ли данная последовательность. Само определение сходящейся последовательности для этого мало удобно, так как в него входит значение предела, которое может быть и неизвестным. Поэтому желательно иметь такой критерий для определения сходимости и расходимости последовательностей, который базировался бы только на свойствах элементов данной последовательности. Нижеследующая теорема 5 и дает как раз подобный критерий.

Определение 14. *Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши* *), *если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров n и m, удовлетворяющих условию $n \geq n_\varepsilon$, $m \geq n_\varepsilon$, справедливо неравенство*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{3.12}$$

Последовательности, удовлетворяющие условию Коши, называются также *фундаментальными последовательностями*.

*) О. Коши (1798—1857) — французский математик.

Условие (3.12) можно сформулировать и таким образом.

Для любого $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* n_ε, *что для всех номеров* $n \geqslant n_\varepsilon$ *и всех целых неотрицательных* p

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon. \tag{3.13}$$

Для того чтобы убедиться в равносильности условий (3.12) и (3.13), достаточно положить $p = n - m$, если $n \geqslant m$, и $p = m - n$, если $m > n$.

Теорема 5 (критерий Коши). *Для того чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.*

Доказательство необходимости. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Зададим $\varepsilon > 0$; тогда, согласно определению предела последовательности, существует такое n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть теперь $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$, тогда

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

т. е. выполняется условие Коши.

Доказательство достаточности. Пусть последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое n_ε, что если $n \geqslant n_\varepsilon$ и $m \geqslant n_\varepsilon$, то $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Возьмем, например, $\varepsilon = 1$, тогда существует такое n_1, что при $n \geqslant n_1$ и $m \geqslant n_1$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < 1$. В частности, если $n \geqslant n_1$ и $m = n_1$, то $|x_n - x_{n_1}| < 1$, т. е. $x_{n_1} - 1 < x_n < x_{n_1} + 1$ при $n \geqslant n_1$. Это значит, что последовательность x_n, $n = n_1, n_1 + 1, \ldots$ ограничена. Поэтому в силу теоремы 4 существует ее сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Покажем, что вся данная последовательность $\{x_n\}$ также сходится и имеет пределом число a. Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда, во-первых, по определению предела последовательности существует такое k_ε, что для всех номеров $k \geqslant k_\varepsilon$, или, что то же самое согласно определению подпоследовательности, для всех $n_k \geqslant n_{k_\varepsilon}$ выполняется неравенство $|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Во-вторых, так как последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши, то существует такое n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $m \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Положим $N_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n_{k_\varepsilon}\}$ и зафиксируем некоторое $n_k \geqslant N_\varepsilon$. Тогда для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ получим:

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leqslant$$

$$\leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а это и доказывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. $\square$

Упражнения. 12. Сформулировать позитивные необходимые и достаточные условия, являющиеся отрицанием критерия Коши, для того чтобы последовательность не имела предела.

13. Доказать, что для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $n_\varepsilon \in N$, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$, $n \in N$, выполняется неравенство $|x_n - x_{n_\varepsilon}| < \varepsilon$.

Задача 3. Выяснить, будет или нет вытекать сходимость последовательности $\{x_n\}$ из условия, что для любого натурального p существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+p} - x_n) = 0$.

3.8. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Над последовательностями можно производить арифметические операции сложения, вычитания, умножения и деления. Определим их.

Определение 15. *Пусть заданы последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$; суммой, разностью и произведением этих последовательностей называются соответственно последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$ и $\{x_n y_n\}$. Если $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то частным от деления последовательности $\{x_n\}$ на последовательность $\{y_n\}$ называется последовательность $\{x_n/y_n\}$. Наконец, произведением последовательности $\{x_n\}$ на число c называется последовательность $\{cx_n\}$.*

Если последовательность $\{y_n\}$ такова, что в ней имеется лишь конечное число элементов, равных нулю, т. е. существует такое $n_0 \in N$, что при $n \geqslant n_0$, $n \in N$, выполняется неравенство $y_n \neq 0$, то можно рассматривать последовательность $\{x_n/y_n\}$, понимая под ней последовательность с номерами $n \geqslant n_0$.

Определение 16. *Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой последовательностью, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.*

Мы уже встречались в п. 3.1 с бесконечно малыми последовательностями $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\alpha_n = \frac{1}{n} \sin\frac{\pi}{2} n$, $n = 1, 2, \ldots$

Отметим несколько свойств бесконечно малых последовательностей.

I. *Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Покажем, что и последовательности $\{\alpha_n + \beta_n\}$ и $\{\alpha_n - \beta_n\}$ являются также бесконечно малыми. Зададим $\varepsilon > 0$, тогда существует (почему?) такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняются неравенства $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому для $n \geqslant n_\varepsilon$ имеем

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n \pm \beta_n) = 0$.

Соответствующее утверждение для любого конечного числа слагаемых следует из доказанного по индукции. □

Задача 4. Определив сумму бесконечного числа занумерованных слагаемых (обобщающую понятие суммы конечного числа слагаемых), а затем сумму бесконечного числа последовательностей, построить пример бесконечного числа бесконечно малых последовательностей, сумма которых не является бесконечно малой последовательностью.

II. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность является бесконечно малой последовательностью.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, а $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, т. е. существует такое число $b > 0$, что для всех номеров $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $|x_n| \leqslant b$.

Зададим $\varepsilon > 0$; в силу определения бесконечно малой последовательности существует такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{b}$. Поэтому для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ имеем

$$|\alpha_n x_n| = |\alpha_n|\,|x_n| < \frac{\varepsilon}{b} \cdot b = \varepsilon,$$

что и означает, что последовательность $\{\alpha_n x_n\}$ бесконечно малая. □

Следствие. *Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.*

Это сразу следует по индукции из свойства II, если заметить, что бесконечно малая последовательность, как и всякая последовательность, имеющая предел, ограничена (см. теорему 2 п. 3.4).

Задача 5. Определив произведение бесконечного числа занумерованных сомножителей (обобщающее понятие произведения конечного числа сомножителей), а затем произведение бесконечного числа последовательностей, построить пример бесконечного числа бесконечно малых последовательностей, произведение которых не является бесконечно малой последовательностью.

Упражнение 14. Доказать, что для того чтобы последовательность $x_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, была бесконечно малой, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $1/x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, была бесконечно большой.

3.9. СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ, СВЯЗАННЫЕ С АРИФМЕТИЧЕСКИМИ ОПЕРАЦИЯМИ НАД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ

Лемма. *Для того чтобы число a являлось пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы ее член x_n имел вид $x_n = a + \alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\{\alpha_n\}$ есть бесконечно малая последовательность.*

В самом деле, пусть задана какая-либо последовательность $\{x_n\}$ и число a; положим $\alpha_n \stackrel{\text{def}}{=} x_n - a$. Тогда условие $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ согласно определению предела последовательности равносильно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in N$, что для всех $n \geqslant n_0$, $n \in N$, выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, т. е. неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, а это и равносильно тому, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. □

Эта лемма показывает особую роль бесконечно малых последовательностей при изучении понятия предела, так как общее понятие предела последовательности с помощью этой леммы сводится к понятию нулевого предела. Это обстоятельство далее широко используется при изучении ряда свойств сходящихся последовательностей.

1°. *Если $x_n = c$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.*

В самом деле, последовательность $x_n - c = c - c = 0$ бесконечно малая, и поэтому в силу леммы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. □

2°. *Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то последовательности $\{x_n \pm y_n\}$ также сходятся и*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$

т. е. предел алгебраической суммы двух сходящихся последовательностей равен такой же сумме пределов данных последовательностей.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Согласно необходимости условий леммы для существования предела, имеем

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Следовательно, $x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, где в силу свойства I бесконечно малых последовательностей (см. п. 3.8) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n \pm \beta_n) = 0$. Поэтому, согласно достаточности условий леммы для существования предела, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. □

Следствие. *Предел конечной алгебраической суммы сходящихся последовательностей равен такой же алгебраической сумме пределов отдельных последовательностей.*

Это непосредственно следует по индукции из доказанного свойства пределов сходящихся последовательностей.

3°. *Если последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *сходятся, то последовательность* $\{x_n y_n\}$ *также сходится и*

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n,$$

т. е. предел произведения сходящихся последовательностей существует и равен произведению пределов данных последовательностей.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, тогда

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$; поэтому $x_n y_n = (a+\alpha_n)(b+\beta_n) = ab + (\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n)$.

В силу свойств I и II бесконечно малых последовательностей (см. п. 3.8) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n) = 0$; поэтому

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Следствие 1. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *сходится, то для любого числа* c *последовательность* $\{cx_n\}$ *также сходится и*

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = c \lim_{n\to\infty} x_b,$$

т. е. постоянную можно выносить за знак предела.

Это утверждение сразу вытекает из свойств 1° и 3°.

Следствие 2. *Если* $\{x_n\}$ — *сходящаяся последовательность и* k — *натуральное число, то*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^k.$$

Это непосредственно по индукции следует из свойства 3°.

4°. *Если последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *сходятся,* $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots,$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, *то последовательность* $\{x_n/y_n\}$ *сходится и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n / \lim_{n\to\infty} y_n,$$

т. е. при сделанных предположениях предел частного сходящихся последовательностей существует и равен частному от пределов данных последовательностей.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$ и для определенности $b > 0$. Тогда

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, а согласно следствию из свойства III пределов последовательностей из п. 3.3, существует такой номер n_0, что для всех номеров $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $y_n > \frac{b}{2} > 0$ (действительно, заметив, что $\frac{b}{2} < b$, в указанном свойстве в качестве c надо взять $c = \frac{b}{2}$) — здесь используется предположение, что $b > 0$; поэтому при $n \geqslant n_0$ имеем $\frac{1}{y_n} < \frac{2}{b}$ (поскольку $y_n \neq 0$, то на него можно делить).

Далее,

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b + \beta_n)}(\alpha_n b - \beta_n a). \qquad (3.14)$$

Здесь $0 < \frac{1}{b(b+\beta_n)} = \frac{1}{by_n} < \frac{2}{b^2}$, т. е. последовательность $1/(b(b+\beta_n))$, $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$, ограничена (отсюда, конечно, следует, что эта последовательность ограничена и при всех $n = 1, 2, \ldots$).

В силу свойств бесконечно малых последовательностей последовательность $\{\alpha_n b - \beta_n b\}$ является бесконечно малой, поэтому и последовательность $\left\{\frac{1}{b(b+\beta_n)}(\alpha_n b - \beta_n a)\right\}$ бесконечно малая. В силу этого из (3.14) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Аналогично рассматривается случай, когда $b < 0$. □

Замечание. В случае последовательностей, имеющих бесконечные пределы, утверждения, аналогичные 1°—4°, вообще говоря, не имеют места. Например, пусть $x_n = n + 1$, $y_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 1.$$

Если $x_n = 2n$, $y_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = +\infty.$$

Если же $x_n = n + \sin\frac{n\pi}{2}$, $y_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty,$$

а последовательность $x_n - y_n = \sin\frac{n\pi}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$, не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

Эти примеры показывают, что при одинаковых предположениях относительно последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, имеющих бесконечные пределы, для последовательностей $\{x_n - y_n\}$ могут встретиться самые разнообразные случаи. Вместе с тем отдельные обобщения свойств 1°—4° на случай последовательностей с бесконечными пределами все-таки имеют место. Например, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ $\left(\text{или } \lim\limits_{n\to\infty} y_n \text{ конечен}\right)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$ или, если $\alpha > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (рекомендуется доказать самостоятельно).

Упражнение 15. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, а последовательность $\{y_n\}$ ограничена, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$.

Примеры. 1. Пусть $a > 0$, $x_0 > 0$ и

$$x_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.15}$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$. По индукции сразу ясно, что $x_n > 0$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Покажем сначала, что

$$x_n \geqslant \sqrt{a}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.16}$$

Для этого предварительно заметим, что из очевидного неравенства $(t-1)^2 \geqslant 0$ в случае $t > 0$ следует неравенство $t + \frac{1}{t} \geqslant 2$. Используя это неравенство при $t = \frac{x_n}{\sqrt{a}}$ в силу (3.15) получаем:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right) \geqslant \frac{\sqrt{a}}{2} 2 = \sqrt{a}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Покажем теперь, что последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$, монотонно убывает. Применяя неравенство (3.16), получаем:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{x_n}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) \leqslant \frac{x_n}{2} 2 = x_n,$$
$$n = 1, 2, \ldots. \tag{3.17}$$

Итак, $\sqrt{a} \leqslant \ldots \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n \leqslant \ldots \leqslant x_1$, где бы ни было расположено «нулевое приближение» $x_0 > 0$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу и монотонно убывает, поэтому, согласно теореме 3, она имеет предел.

Пусть $\lim x_n = x$. Переходя к пределу, в равенстве (3.15) при $n \to \infty$, получаем равенство

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right),$$

откуда $x^2 = a$, и так как $x_n \geqslant 0$, то и $x \geqslant 0$, поэтому $x = \sqrt{a}$.

Формула (3.15) может служить для приближенного вычисления значений квадратного корня из числа a. Она действительно применяется на практике с этой целью, в частности, при вычислениях на быстродействующих счетных машинах.

Нетрудно подсчитать и точность, с которой n-е приближение, т. е. член x_n, дает значение корня $\sqrt{a}$.

Из рекуррентной формулы (3.15) имеем:

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}\left(x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a\right) =$$
$$= \frac{1}{2x_n}\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Применяя неравенство (3.16), отсюда находим:

$$0 \leqslant x_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Полученная оценка не совсем удобна на практике, поскольку мы не знаем значения корня $\sqrt{a}$ — мы его ищем. Однако всегда можно найти приближенно такое c, что $0 < c < \sqrt{a}$, причем можно выбрать и $x_0 \geqslant c$, тогда из полученной оценки будем иметь

$$0 \leqslant x_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2c}\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

или

$$\frac{1}{2c}\left(x_{n+1} - \sqrt{a}\right) \leqslant \left[\frac{1}{2c}\left(x_n - \sqrt{a}\right)\right]^2, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Отсюда по индукции находим:

$$\frac{1}{2c}\left(x_n - \sqrt{a}\right) \leqslant \left[\frac{1}{2c}\left(x_{n-1} - \sqrt{a}\right)\right]^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left[\left(\frac{1}{2c}\left(x_{n-2} - \sqrt{a}\right)\right)^2\right]^2 \leqslant \ldots \leqslant \left[\frac{1}{2c}\left(x_0 - \sqrt{a}\right)\right]^{2^n}. \qquad (3.18)$$

Если выбрать нулевое приближение x_0 так, чтобы

$$q \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2c}\left|x_0 - \sqrt{a}\right| < 1,$$

то из (3.18) получится, что

$$0 \leqslant x_n - \sqrt{a} \leqslant 2cq^{2^n}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

т. е. последовательность (3.15) сходится к значению корня гораздо быстрее геометрической прогрессии со знаменателем q, $0<q<1$.

Для иллюстрации приближенного вычисления корня по формуле (3.15) приведём результаты вычисления $\sqrt{2}$ на ЭВМ в случае, когда в качестве нулевого приближения x_0 было выбрано $x_0=1$:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \mathbf{1},500000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\\
x_2 &= \mathbf{1{,}41}6666666666666666666666666666666666666666666666666666666666\\
x_3 &= \mathbf{1{,}41421}568627450980392156862745098039215686274509803921568627\\
x_4 &= \mathbf{1{,}41421356237}4689910626295578890134910116559622115744044584\!90\\
x_5 &= \mathbf{1{,}41421356237309504880168}9623502530243614981925776197428498\!28\\
x_6 &= \mathbf{1{,}41421356237309504880168872420969807856967187537}723400156101\\
x_7 &= \mathbf{1{,}41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667}
\end{aligned}
$$

Здесь полужирным шрифтом выделены числа, являющиеся правильным приближением $\sqrt{2}$ с точностью до числа значащих цифр, входящих в выделенное число (эти цифры стабилизируются в процессе вычисления). Число правильных в этом смысле цифр удваивается (как это видно из таблицы) при переходе к следующему приближению: в x_1 имеется одна правильная цифра, в x_2 уже 3, в x_3 — 6, в x_4 — 12, в x_5 — 24, в x_6 — 48, а x_7 даёт уже правильное приближение $\sqrt{2}$ с 60 значащими цифрами, т. е. со всеми использованными разрядами.

Заметим, что если число $a>0$ таково, что корень из него вычисляется в конечном виде в том смысле, что существует такая конечная десятичная дробь x, что $x^2=a$, то эта дробь может быть найдена (во всяком случае принципиально) с помощью классического метода извлечения корня «столбиком». В случае же извлечения корня из этого числа с помощью формулы (3.15), если x_0 выбрано отличным от точного значения корня: $x_0 \neq \sqrt{a}$, то указанное точное значение корня не получится ни на каком шаге. Это следует из того, что в случае $x_0 \neq \sqrt{a}$ последовательность (3.15) строго убывает: $x_{n+1}<x_n$, $n=1, 2, \ldots$.

Прежде чем рассматривать дальнейшие примеры докажем одно полезное неравенство.

Лемма (неравенство Бернулли *)). *Пусть $\alpha>0$, тогда для любого натурального n справедливо неравенство*

$$(1+\alpha)^n > 1+n\alpha. \tag{3.19}$$

Доказательство. По формуле бинома Ньютона имеем

$$(1+\alpha)^n = 1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2+\ldots+\alpha^n.$$

Все слагаемые в правой части равенства положительны; отбрасывая все из них кроме первого и второго, отчего правая часть может только уменьшиться, получаем искомое неравенство (3.19).

*) Я. Бернулли (1654—1705) — швейцарский математик.

Вернемся к рассмотрению примеров.

2. Если $p>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} p^n=+\infty$, а если $0<p<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} p^n=0$.

Пусть сначала $p>1$, тогда $p=1+\alpha$, где $\alpha>0$, и по неравенству Бернулли (см. (3.19))

$$p^n=(1+\alpha)^n>1+n\alpha>n\alpha.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha n=\alpha\lim\limits_{n\to\infty} n=+\infty$, $\alpha>0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} p^n=+\infty$.

Если теперь $0<p<1$, то $q=1/p>1$ и

$$\lim_{n\to\infty} p^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q^n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} q^n}=0,$$

ибо по доказанному $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=+\infty$.

3. Для любого $a>0$:

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n}=1, \tag{3.20}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^{-1/n}=1. \tag{3.21}$$

Пусть сначала $a>1$, тогда $b\overset{\text{def}}{=}\sqrt[n]{a}>1$. В самом деле, согласно определению корня $b^n=a$. Если бы $b\leqslant 1$, то, перемножая это неравенство n раз, мы получили бы, что $a=b^n\leqslant 1$, но это противоречит условию $a>1$. Положим

$$x_n\overset{\text{def}}{=}\sqrt[n]{a}-1. \tag{3.22}$$

Согласно сказанному $x_n>0$. Из (3.22) следует, что $a=(1+x_n)^n$. Применяя неравенство Бернулли, получаем

$$a=(1+x_n)^n>nx_n.$$

Следовательно, $0<x_n<\frac{a}{n}$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$; откуда согласно (3.22)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

Если теперь $0<a<1$, то $b\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{a}>1$, и так как в силу доказанного $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}=1$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{b}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{b}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}}=1.$$

Если $a=1$, то $\sqrt[n]{a}=1$, $n=1, 2, \ldots$, и, следовательно, также $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

Таким образом, (3.20) доказано при любом $a>0$. Отсюда сразу следует (3.21):

$$\lim_{n\to\infty} a^{-1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^{1/n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n}}=1. \ \square$$

Упражнение 16. Пусть $a_0>0$, $b_0\geqslant 0$, $a_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$, $b_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$, $n=1, 2, \ldots$. Доказать, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ стремятся к одному и тому же пределу a и что $0\leqslant a-a_n\leqslant\frac{b_0-a_0}{2^n}$, $0\leqslant b_n-a\leqslant\frac{|b_0-a_0|}{2^n}$.

3.10. ИЗОБРАЖЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ БЕСКОНЕЧНЫМИ ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

Пусть задано какое-либо число a, для определенности $a\geqslant 0$. В силу свойства Архимеда существует целое число $n_0>a$. Среди чисел $n=1, 2, \ldots, n_0$ возьмем наименьшее, обладающее свойством $n>a$, и обозначим его α_0+1, тогда $\alpha_0\leqslant a<\alpha_0+1$.

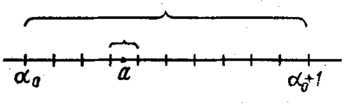


Рис. 8

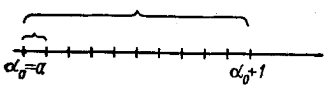


Рис. 9

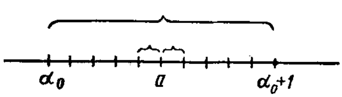


Рис. 10

Разобьем отрезок $I_0=[\alpha_0, \alpha_0+1]$ на десять равных отрезков, т. е. рассмотрим отрезки

$$[\alpha_0,\alpha_1;\ \ \alpha_0,\alpha_1+1/10],$$

где $\alpha_1, =0, 1, 2, \ldots, 9$.

Возможны два случая: либо точка a не совпадает ни с одной точкой деления (рис. 8), либо точка a совпадает с одной из точек деления (рис. 9, 10). В первом случае точка a принадлежит только одному из этих отрезков. Обозначим его

$$I_1=[\alpha_0,\alpha_1;\ \alpha_0,\ \alpha_1+1/10],$$

где α_1 обозначает номер отрезка, т. е. одну из цифр $0, 1, \ldots, 9$.

Во втором случае точка a может принадлежать двум соседним отрезкам (рис. 10). Тогда через $I_1=\left[\alpha_0,\alpha_1;\ \alpha_0,\alpha_1+\frac{1}{10}\right]$ обозначим тот из них, для которого точка a является левым концом. Во всех случаях $a\in I_1$. Разобьем отрезок I_1 в свою очередь на десять равных отрезков и через $I_2=\left[\alpha_0,\alpha_1\alpha_2;\ \alpha_0,\alpha_1\alpha_2+\frac{1}{10^2}\right]$ обозначим тот из получившихся отрезков, который содержит a и для которого точка a не является правым концом. Продолжая этот процесс, получим систему вложенных отрезков

$$I_n = [\underline{a}_n, \bar{a}_n], \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где

$$\underline{a}_n = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n, \quad \bar{a}_n = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n + \frac{1}{10^n},$$

а α_n — одна из цифр 0, 1, 2, ..., 9. Каждый из отрезков I_n содержит a, причем a не является его правым концом,

$$a \in I_n, \quad a \neq \bar{a}_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

длина отрезка I_n равна $1/10^n$ и, следовательно, стремится к нулю при $n \to \infty$.

Конечные десятичные дроби $\underline{a}_n$ и $\bar{a}_n$ называются *десятичными дробями, приближающими число* a. Более точно, число $\underline{a}_n$ называется *нижним десятичным приближением* порядка n, а число $\bar{a}_n$ *верхним десятичным приближением* того же порядка числа a. Они обладают следующими свойствами, непосредственно вытекающими из их определения:

$$\underline{a}_n \leqslant a < \bar{a}_n, \tag{3.23}$$

$$\underline{a}_n \leqslant \underline{a}_{n+1}, \quad \bar{a}_{n+1} \leqslant \bar{a}_n, \tag{3.24}$$

$$\bar{a}_n - \underline{a}_n = 1/10^n. \tag{3.25}$$

В случае, если $a < 0$, то, полагая $b = -a$, определяем

$$\underline{a}_n = -\bar{b}_n, \quad \bar{a}_n = -\underline{b}_n.$$

при этом свойства (3.23) — (3.25), очевидно, сохраняются, лишь в неравенстве (3.23) знаки $\leqslant$ и $<$ поменяются местами.

Свойство (3.24) означает, что отрезки $[\underline{a}_n, \bar{a}_n]$ образуют вложенную систему отрезков. Из свойства (3.25) следует, что длины отрезков $[\underline{a}_n, \bar{a}_n]$ стремятся к нулю. Наконец, (3.23) означает, что точка a принадлежит всем этим отрезкам, поэтому согласно замечанию п. 3.5, она является пределом их концов $\underline{a}_n$ и $\bar{a}_n$.

Итак, в частности, доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Каково бы ни было число a, последовательность $\{\underline{a}_n\}$ монотонно возрастает, последовательность $\{\bar{a}_n\}$ монотонно убывает и*

$$\lim_{n\to\infty} \underline{a}_n = \lim_{n\to\infty} \bar{a}_n = a.$$

Следствие. *Всякое действительное число является пределом последовательности рациональных чисел.*

Следствие леммы вытекает из того, что $\underline{a}_n$ и $\bar{a}_n$ суть рациональные числа.

Пусть теперь снова $a \geqslant 0$ и $\bar{a}_n = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$. Поставим в соответствие числу a бесконечную десятичную дробь $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ Подчеркнем, что здесь α_0 является неотрицательным целым числом, а α_n, $n = 1, 2, \ldots$ — одной из цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$. Поскольку число a является единственным числом, принадлежащим всем отрезкам I_n, $n = 1, 2, \ldots$, то при указанном соответствии разным числам соответствуют разные десятичные дроби, т. е. отличающиеся хотя бы одним α_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Заметим далее, что при нашем построении не может получиться дробь с периодом, состоящим из одной цифры 9. Действительно, пусть числу a соответствует дробь $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{n_0} 9 \ldots 9 \ldots$, где в случае $n_0 \neq 0$ выполняется неравенство $\alpha_{n_0} \neq 9$. Тогда, согласно построению,

$$a \in \left[\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{n_0} 9 \ldots 9;\ \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{n_0} + \frac{1}{10^{n_0}}\right]$$

для всех $n \geqslant n_0$, где n — число десятичных знаков после запятой в дроби $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{n_0} 9 \ldots 9$. Отсюда следует, что a является правым концом всех отрезков I_n, $n \geqslant n_0$, что противоречит выбору этих отрезков.

Таким образом, в силу установленного соответствия каждому действительному числу $a \geqslant 0$ соответствует некоторая бесконечная десятичная дробь, не имеющая периода, состоящего из одной цифры 9. Такие десятичные дроби называются *допустимыми*.

Наконец, каждая бесконечная допустимая десятичная дробь $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ в результате описанного соответствия оказывается поставленной в соответствие некоторому числу a, а именно тому единственному числу, которое принадлежит всем отрезкам:

$$\left[\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n;\ \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n + \frac{1}{10^n}\right], \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Это соответствие можно распространить и на отрицательные числа: если числу $a > 0$ соответствует дробь $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots$, то числу $-a$ поставим в соответствие дробь $-\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots$.

Полученные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 6. *Между множеством всех действительных чисел и множеством допустимых десятичных дробей существует взаимно однозначное соответствие; причем если при этом соответствии числу a соответствует дробь $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$, то*

$$\pm \lim_{n \to \infty} \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n = a.$$

Бесконечная десятичная дробь $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$, соответствующая числу a, называется его *десятичной записью* и используется для его обозначения; поэтому пишут

$$a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

Если бесконечная десятичная дробь имеет период, состоящий только из нулей, $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n 00 \ldots 0 \ldots$, причем $\alpha_n \neq 0$, то говорят, что эта дробь имеет n значащих цифр после запятой; при этом обычно ноль в периоде не пишется, т. е. указанное число записывается конечной десятичной дробью $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ (именно такая запись и употреблялась выше).

Замечание 1. Любой бесконечной десятичной дроби

$$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

(не обязательно допустимой) можно также естественным образом поставить в соответствие единственное действительное число, принадлежащее всем отрезкам:

$$\left[\alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_n;\quad \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_n + \frac{1}{10^n}\right].$$

Однако получившееся при этом соответствие уже не будет взаимно однозначным: может случиться, что разным десятичным дробям будет соответствовать одно и то же действительное число. Именно дробям вида

$$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n 99 \ldots 9 \ldots \quad \text{и} \quad \alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots (\alpha_n + 1)\, 00 \ldots 0 \ldots (\alpha_n \neq 9)$$

соответствует одно и то же число. В описанной выше конструкции соответствия вещественных чисел и бесконечных десятичных дробей мы получили бы не только допустимые десятичные дроби, если бы отказались от условия каждый раз выбирать такой отрезок I_n, что число a не является его правым концом.

Используя запись действительных чисел, с помощью бесконечных десятичных дробей можно получить правило для их сравнения по величине и правила арифметических действий над ними. И то и другое сводится к аналогичным операциям над соответствующими их десятичными приближениями и, быть может, предельному переходу. Сформулируем эти результаты в виде лемм.

Лемма 2. *Пусть a и b — действительные числа. Тогда $a < b$ в том и только том случае, когда существует такое натуральное n_0, что $\underline{a}_n < \underline{b}_n$ для всех $n \geqslant n_0$.*

Действительно, пусть $a < b$. Из

$$a = \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n, \quad b = \lim_{n\to\infty} \underline{b}_n, \quad \text{и} \quad a < \frac{a+b}{2} < b$$

следует (см. свойства пределов последовательностей в п. 3.3), что существует такое n_0, что при всех $n \geqslant n_0$ справедливы неравенства $\underline{a}_n < \frac{a+b}{2}$, $\underline{b}_n > \frac{a+b}{2}$ и, следовательно, неравенство $\underline{a}_n < \underline{b}_n$.

Обратно, если существует n_0 такое, что $\underline{a}_n < \underline{b}_n$ для всех $n \geqslant n_0$, то случай $a > b$ невозможен в силу только что доказанного. Невозможен и случай $a = b$, так как тогда бы в силу однозначной записи чисел с помощью допустимых десятичных дробей при всех $n = 1, 2, \ldots$ выполнялось равенство $\underline{a}_n = \underline{b}_n$. Таким образом, $a < b$. □

Лемма 3. *Пусть a и b — два действительных числа, тогда*

$$\lim_{n\to\infty} (\underline{a}_n + \underline{b}_n) = a + b, \quad \lim_{n\to\infty} (\underline{a}_n - \underline{b}_n) = a - b, \quad \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n \underline{b}_n = ab,$$

а при $b \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n} = \frac{a}{b}.^{*)}$$

Все утверждения этой леммы непосредственно следуют из леммы 1 и свойств пределов, связанных с арифметическими действиями над последовательностями (см. п. 3.9).

Замечание 2. Из леммы 3 следует, что для того чтобы произвести с заданной степенью точности какое-либо арифметическое действие над числами, записанными в виде допустимых десятичных дробей, надо взять с достаточной точностью конечные десятичные приближения и произвести над ними соответствующие действия. При этом при сложении, вычитании и умножении в результате получается снова конечная десятичная дробь. В случае же деления частное двух конечных десятичных дробей будет, вообще говоря, бесконечной десятичной дробью, причем, как это известно из элементарной математики, — периодической. Однако и в этом случае можно с любой степенью точности получить результат, выраженный конечной десятичной дробью. Например, если $\underline{(\underline{a}_n/\underline{b}_n)_n}$ является нижним десятичным приближением порядка n для частного $\underline{a}_n/\underline{b}_n$, то

$$\lim_{n\to\infty} \underline{\left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right)_n} = \frac{a}{b} \tag{3.26}$$

и, следовательно, частное a/b, $b \neq 0$, можно с любой степенью точности выразить с помощью конечных десятичных дробей вида $\underline{\left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right)_n}$.

*) Может случиться, что при некоторых n будем иметь $\underline{b}_n = 0$ и, следовательно, выражение $\underline{a}_n/\underline{b}_n$ будет лишено смысла. Однако в силу условия $b \neq 0$ и свойства III пределов последовательностей, доказанного в п. 3.3, существует такое n_0, что $\underline{b}_n \neq 0$ при $n \geqslant n_0$. В этом случае вместо последовательности $\underline{a}_n/\underline{b}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, следует рассматривать последовательность $\underline{a}_n/\underline{b}_n$, $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$.

Для доказательства равенства (3.26) положим

$$\alpha_n = \frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n} - \frac{a}{b};$$

в силу леммы 3 имеем (см. лемму в п. 3.9) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Теперь, используя (3.23) и (3.25), получаем

$$\underline{\left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right)_n} - \frac{a}{b} = \left[\underline{\left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right)_n} - \frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right] + \left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n} - \frac{a}{b}\right) < \frac{1}{10^n} + \alpha_n.$$

И поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10^n} + \alpha_n\right) = 0$, то равенство (3.26) доказано.

Замечание 3. В результате вышеуказанных вычислений с нижними десятичными приближениями порядка n в случае сложения $\underline{a}_n + \underline{b}_n$, вычитания $\underline{a}_n - \underline{b}_n$ и деления $\underline{(\underline{a}_n/\underline{b}_n)_n}$ мы снова получим конечные десятичные дроби с не более чем n значащими цифрами после запятой. При умножении же $\underline{a}_n\underline{b}_n$ получится, вообще говоря, десятичная дробь с $2n$ значащими цифрами после запятой. Если $\underline{(\underline{a}_n\underline{b}_n)_n}$ является нижним десятичным приближением произведения $\underline{a}_n\underline{b}_n$, то аналогично (3.26) доказывается, что

$$\lim_{n\to\infty} \underline{(\underline{a}_n\underline{b}_n)_n} = ab.$$

Таким образом, при приближенных вычислениях сумм $a+b$, разностей $a-b$, произведений ab и частных a/b, $b \neq 0$, соответственно по формулам

$$\underline{a}_n + \underline{b}_n, \quad \underline{a}_n - \underline{b}_n, \quad \underline{(\underline{a}_n\underline{b}_n)_n} \quad \text{и} \quad \underline{(\underline{a}_n/\underline{b}_n)_n},$$

в результате указанных действий над конечными десятичными дробями $\underline{a}_n$ и $\underline{b}_n$, имеющими не более чем n значащих цифр после запятой, получаются снова десятичные дроби с не более чем n значащими цифрами после запятой, при этом результат может быть получен с любой заданной степенью точности. Именно таким образом и производятся обычно действия с числами на практике.

Замечание 4. Отметим, что при построении способа записи действительных чисел последовательностями цифр за основу было взято число 10 (отрезки последовательно делились на десять равных частей). Вместо числа 10 можно взять любое натуральное число n. При использовании быстродействующих вычислительных машин часто употребляется так называемая двоичная система записи чисел, соответствующая случаю $n=2$. При записи числа в двоичной системе участвуют только две цифры 0 и 1. Например, число 14,625 в двоичной системе будет иметь вид 1110,101, так как

$$14{,}625 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3},$$

а цифры в двоичной системе записи числа являются соответствующими коэффициентами его разложения по степеням двойки.

Замечание 5. При изложении теории действительных чисел можно идти и в обратном порядке: определить действительные числа как бесконечные допустимые десятичные дроби и, используя эту запись, ввести в них соответствующим образом соотношение порядка и арифметические действия.

Существуют и другие построения действительных чисел, которые исходят из других конкретных объектов, однако все они приводят к совокупностям элементов, удовлетворяющих свойствам I — V п. 2.1. Напомним (см. п. 2.4*), что наличие свойств I — V однозначно определяет совокупность элементов, обладающих этими свойствами. Однозначно в том смысле, что любые две совокупности, для элементов которых выполнены условия I — V, изоморфны относительно операций сложения, умножения и свойства упорядоченности. Здесь мы встречаемся с характерной чертой математических методов исследования, для которых совершенно безразлична природа элементов, а важны лишь «количественные связи» между ними, которые в данном случае выражаются свойствами I — V.

3.11*. СЧЕТНОСТЬ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. НЕСЧЕТНОСТЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Возникает естественный вопрос: все ли бесконечные множества содержат одинаковое число элементов или бесконечности бывают разными? Прежде всего оказывается, что непонятно, что вообще означает термин «одинаковое число элементов» для бесконечных множеств. Сравнение бесконечных множеств по количеству содержащихся в них элементов, или, как принято говорить, по их мощности, удобно производить с помощью понятия взаимно однозначного соответствия между элементами множеств (см. п. 1.2*).

Определение 17. *Будем говорить, что два множества X и Y имеют одинаковое количество элементов или что они равномощны, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.*

С этой точки зрения натуральные числа $1, 2, \ldots, n, \ldots$ содержат столько же элементов, сколько и четные числа $2, 4, \ldots, 2n, \ldots$, хотя на первый взгляд последних кажется в два раза меньше. Требуемое взаимное однозначное соответствие получается, если натуральному числу n поставить в соответствие число $2n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Четные числа составляют часть множества натуральных чисел, однако эти множества равномощны, следовательно, в случае бесконечных множеств часть может равняться в нашем смысле целому!

Определение 18. *Множество, которое содержит столько же элементов, сколько натуральный ряд чисел, т. е. равномощное с множеством натуральных чисел, называется счетным.*

Таким образом, если X счетно, то между множеством X и множеством натуральных чисел можно установить взаимно однозначное соответствие, или, как говорят, можно занумеровать элементы множества X, понимая под номером каждого элемента $x \in X$ соответствующее ему при указанном соответствии натуральное число.

Счетные множества являются в определенном смысле простейшими бесконечными множествами. Именно справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Действительно, пусть X — бесконечное множество. Возьмем какой-либо его элемент и обозначим его x_1. В силу того, что X — бесконечное множество, в нем заведомо имеется хоть один элемент, отличный от элемента x_1. Выберем какой-либо из таких элементов и обозначим его x_2.

Пусть в множестве X уже выбраны элементы $x_1, \ldots, x_n$. Поскольку X — бесконечное множество, то в нем заведомо есть еще и другие элементы; выберем какой-либо из оставшихся элементов и обозначим его через x_{n+1} и т. д. В результате мы получили элементы $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, которые образуют счетное подмножество множества X. $\square$

Лемма 2. *Любое бесконечное подмножество счетного множества счетно.*

Доказательство. Пусть X — счетное множество, его элементы могут быть перенумерованы: $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Пусть Y — бесконечное подмножество множества X. Обозначим через b_1 первый встретившийся в ряде $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ элемент множества Y, т. е. тот из элементов $a_n \in X$, который принадлежит множеству Y и имеет наименьший номер $n_0 : b_1 = a_{n_0}$. Через b_2 обозначим тот из элементов a_n, который принадлежит множеству Y и имеет наименьший номер среди номеров $n > n_0$ и т. д. Каждый элемент множества Y имеется в ряде $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$, поэтому через какое-то конечное число шагов он будет обозначен через b_m, и поскольку множество Y бесконечно, то индекс m примет любое значение $1, 2, 3, \ldots$ Таким образом, все элементы множества Y окажутся занумерованными натуральными числами $m = 1, 2, \ldots$. Это и означает, что множество Y является счетным множеством. $\square$

Следующая теорема дает интересный пример счетного множества.

Теорема 7. *Рациональные числа образуют счетное множество.*

Доказательство. Расположим рациональные числа в таблицу следующим способом. В первую строчку поместим все целые числа в порядке возрастания их абсолютной величины и так, что за каждым натуральным числом поставлено ему противоположное:

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \ldots,\quad n,\ -n,\ \ldots,\quad n \in N.$$

Во вторую строчку поместим все несократимые рациональные дроби со знаменателем 2, упорядоченные по их абсолютной величине, причем снова за каждым положительным числом поставим ему противоположное:

$$1/2,\ -1/2,\ 3/2,\ -3/2,\ 5/2,\ -5/2,\ \ldots.$$

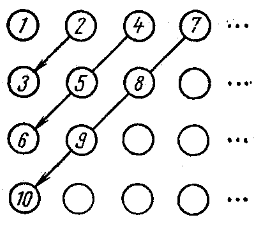
Вообще, в n-ю строчку поместим все несократимые рациональные дроби со знаменателем n, упорядоченные по их абсолютной величине, так что за каждым положительным следует ему противоположное.

В результате получим таблицу с бесконечным числом строк и столбцов:

$$\begin{array}{cccccl}
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \ldots \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \ldots \\
\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \ldots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Очевидно, что каждое рациональное число попадет на какое-то место в этой таблице.

Занумеруем теперь элементы получившейся таблицы согласно следующей схеме (в кружочках стоят номера соответствующих элементов, стрелка указывает направление нумерации):



В результате все рациональные числа оказываются занумерованными, т. е. множество Q рациональных чисел счетно. □

Возникает естественный вопрос: а существуют ли бесконечные множества, не являющиеся счетными? Оказывается, что да, существуют, и они называются, естественно, *несчетными множествами*. Важный пример несчетных множеств устанавливается нижеследующей теоремой.

Теорема 8 (Кантор). *Множество действительных чисел несчетно.*

Доказательство. Допустим противное: пусть удалось занумеровать все действительные числа: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$; запишем их с помощью допустимых десятичных дробей:

$$\begin{array}{l} x_1 = \alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} \quad \ldots \alpha_m^{(1)} \ldots \\ x_2 = \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)} \alpha_2^{(2)} \quad \ldots \alpha_m^{(2)} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)} \alpha_1^{(n)} \quad \ldots \alpha_m^{(n)} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{3.27}$$

Здесь $\alpha_m^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, $m = 1, 2, \ldots$, обозначает одну из цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$ а $\alpha_0^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, — целое число с тем или иным знаком.

Выберем цифру α_n, $n = 1, 2, \ldots$, так, чтобы $\alpha_n \neq \alpha_n^{(n)}$ и $\alpha_n \neq 9$. Тогда дробь $0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ является допустимой, но числа $a = 0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ заведомо нет среди чисел x_n, $n = 1, 2, \ldots$, так как десятичная дробь $0, \alpha_1, \ldots \alpha_n \ldots$ хотя бы одним десятичным знаком отличается от каждой из десятичных дробей (3.27). Полученное противоречие и доказывает теорему. □

Следствие 1. *Множество действительных чисел любого интервала несчетно.*

Доказательство. Докажем, что, более того, множество действительных чисел любого интервала равномощно множеству всех действительных чисел.

В самом деле, прежде всего любой интервал равномощен интервалу $(-1, +1)$. Взаимно однозначное соответствие между интервалом (a, b) и интервалом $(-1, +1)$ можно установить, например, с помощью линейного отображения $x = \frac{2t - a - b}{b - a}$. Если $a < t < b$, то $-1 < x < +1$. Интервал $(-1, +1)$ взаимно однозначно с помощью отображения

$$f(x) = \frac{x}{1 - |x|}, \quad -1 < x < 1,$$

отображается на всю действительную ось (проверьте это). Таким образом оказывается, что интервал (a, b) равномощен всей действительной оси и, следовательно, является несчетным множеством. □

Взаимно однозначное соответствие между интервалом и всей прямой легко можно наглядно осуществить геометрическим методом: сначала спроектируем открытую полуокружность, т. е. полуокружность без концевых точек, с помощью параллельной проекции на интервал (рис. 11) и, тем самым, установим между их точками взаимно однозначное соответствие. Затем с помощью центральной проекции из центра полуокружности спроектируем ее на прямую (рис. 12). Эта проекция также устанавливает взаимно однозначное соответствие, но на этот раз между указанной полуокружностью и всей прямой.

Следствие 2. *На любом интервале имеются иррациональные числа.*

Доказательство. Действительно, если бы на некотором интервале не оказалось бы иррационального числа, то это означало бы, что все точки этого интервала являются рациональными числами, т. е. являются подмножеством счетного множества рациональных чисел и, значит, образуют конечное, или счетное, множество (см. лемму 2), что противоречит следствию 1. $\square$

Рис. 11

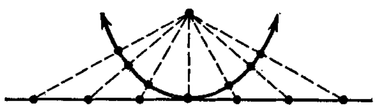


Рис. 12

Замечание. В п. 3.10 доказано, что действительное число есть предел последовательности рациональных чисел (например, своих верхних десятичных приближений). Отсюда сразу следует, что всякий интервал содержит бесконечно много рациональных чисел. В самом деле, пусть задан интервал (a, b). Выберем какое-либо число $\xi \in (a, b)$, например $\xi = \frac{a+b}{2}$. Тогда если ξ_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — верхние десятичные приближения для ξ, то $\xi_n \neq \xi$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_n = \xi$. Поскольку интервал (a, b) является окрестностью выбранной точки ξ, то согласно определению предела последовательности почти все рациональные числа ξ_n будут содержаться в интервале (a, b). Иначе говоря, найдется такой номер n_0, что для всех номеров $n \geqslant n_0$ будет выполняться неравенство $a < \xi_n < b$, т. е. ξ_n, $n = n_0, n_0 + 1, \ldots,$ — искомые рациональные числа.

Таким образом, на любом интервале числовой оси содержатся как рациональные, так и иррациональные числа. Это свойство кратко выражают, говоря, что «рациональные и иррациональные числа образуют всюду плотные подмножества множества действительных чисел».

Упражнение 17. Доказать, что множества точек интервала, отрезка и полуинтервала равномощны.

3.12*. ВЕРХНИЙ И НИЖНИЙ ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В п. 3.6 было показано, что любая числовая последовательность всегда имеет по крайней мере один частичный предел, конечный или бесконечный. Наибольший и наименьший из них (ниже будет показано, что они всегда существуют) играют особую роль в теории последовательностей. Здесь понятия «наибольший» и «наименьший» понимаются в смысле расширенного множества действительных чисел $\bar{R}$ (см. п. 2.7), т. е. в частности, наибольшим (наименьшим) элементом множества $X \subset \bar{R}$ может оказаться $+\infty$ (соответственно $-\infty$). Это будет иметь место тогда, когда $+\infty \subset X$ $(-\infty \subset X)$. В нашем случае это будет означать, что бесконечность соответствующего знака является частичным пределом рассматриваемой последовательности.

Определение 19. *Наибольший частичный предел последовательности $\{x_n\}$ называется ее верхним пределом и обозначается $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, а наименьший частичный предел называется нижним пределом и обозначается $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.*

Теорема 9. *У любой последовательности $\{x_n\}$ существует как наибольший, так и наименьший частичный предел.*

Доказательство. Докажем существование наибольшего частичного предела. Для заданной последовательности $\{x_n\}$ возможны два случая: либо она ограничена сверху, либо нет. Если она не ограничена сверху, то $+\infty$ является ее частичным пределом и, очевидно, наибольшим, т. е. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$.

Если же последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, то снова возможны два случая: либо множество ее конечных пределов, которое мы обозначим через A, не пусто, либо оно пусто. Рассмотрим сначала первый случай. Из ограниченности сверху данной последовательности $\{x_n\}$ следует и ограниченность сверху непустого множества A ее конечных частичных пределов. В силу этого множество A имеет конечную верхнюю грань. Покажем, что $b = \sup A$ является частичным пределом, т. е. что $b \in A$. Действительно, если бы $b \notin A$, то существовало бы такое $\varepsilon > 0$, что в интервале $(b-\varepsilon,\ b+\varepsilon)$ содержалось бы лишь конечное число членов последовательности $\{x_n\}$ (в частности, ни одного), и поэтому (почему?) в этом интервале не было бы ни одного элемента A, что противоречит условию $b = \sup A$.

Таким образом, $b \in A$ и, следовательно, является наибольшим элементом множества A, поэтому $b = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

В оставшемся случае, т. е. когда последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху и множество ее конечных частичных пределов A пусто, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ (докажите это), т. е. в этом случае множество ее частичных пределов состоит из одного элемента $-\infty$, который тем самым является и наибольшим в этом множестве, т. е. здесь

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty.$$

Аналогично для любой последовательности доказывается и существование наименьшего (конечного или бесконечного) частичного предела. □

Упражнение 18. Пусть $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$ Найти $\varliminf_{n\to\infty} x_n$, $\varlimsup_{n\to\infty} x_n$, $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$.

Теорема 10. *Для того чтобы число a было верхним пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно выполнение для любого числа $\varepsilon > 0$ совокупности следующих двух условий.*

1. *Существует номер n_ε такой, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ справедливо неравенство $x_n < a + \varepsilon$.*

2. *Для любого номера n_0 существует номер n' (зависящий от ε и от n_0) такой, что $n' > n_0$ и $x_{n'} > a - \varepsilon$.*

Условие 1 означает, что при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ в последовательности $\{x_n\}$ существует лишь конечное число членов x_n таких, что $x_n \geqslant a + \varepsilon$ (их номера меньше n_ε).

Условие же 2 означает, что при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ в последовательности $\{x_n\}$ существует бесконечно много членов x_n таких, что $x_n > a - \varepsilon$.

Доказательство необходимости. Пусть $a = \varlimsup_{n\to\infty} x_n$ и пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Если бы на полуинтервале $[a+\varepsilon, +\infty)$ оказалось бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, то нашлась бы подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, элементы которой принадлежат этому полуинтервалу и которая имеет конечный или бесконечный предел. Обозначим его через b. Очевидно, $b \geqslant a + \varepsilon > a$, что противоречит тому, что a — наибольший частичный предел последовательности $\{x_n\}$. Свойство 1 доказано.

Далее, поскольку верхний предел является и частичным пределом, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Почти все члены последовательности $\{x_{n_k}\}$ больше $a - \varepsilon$ и, следовательно, существует бесконечно много членов данной последовательности $\{x_n\}$, больших, чем $a - \varepsilon$. Свойство 2 также доказано.

Доказательство достаточности. Пусть число a удовлетворяет условиям 1 и 2. Покажем, что тогда a является частичным пределом. Возьмем $\varepsilon = 1/k$, $k = 1, 2, \ldots$. Для каждого натурального k существует номер n_k такой, что $x_{n_k} > a - 1/k$ (согласно условию 2) и $x_{n_k} < a + 1/k$ (согласно условию 1). Поскольку для любого k множество элементов x_n данной последовательности, для которых выполняются неравенства $a - \frac{1}{k} < x_n < a + \frac{1}{k}$, бесконечно, то номера n_k можно последовательно ($k = 1, 2, \ldots$) выбрать так, чтобы $n_{k_1} < n_{k_2}$ при $k_1 < k_2$. В результате мы получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ данной последовательности $\{x_n\}$. Из неравенства $|a-x_{n_k}|<\frac{1}{k}$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$, т. е. что a является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$.

Покажем теперь, что число a является наибольшим частичным пределом. Действительно, если бы нашелся частичный предел b последовательности $\{x_n\}$ такой, что $b>a$, то беря $\varepsilon>0$ так, что $a+\varepsilon<b$ мы получим, что на промежутке $(a+\varepsilon, +\infty)$ будет находиться бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$ (а именно почти все члены подпоследовательности, сходящейся к b). Это противоречит условию 1. $\square$

Упражнения. 19. Доказать, что для того чтобы последовательность имела предел (конечный или бесконечный, равный одному из символов $+\infty$ или $-\infty$), необходимо и достаточно, чтобы $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

20. Доказать, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n)\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n+\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$.

21. Доказать, что

$$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=\inf_n\left\{\sup_{m\geqslant n} x_m\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{m\geqslant n} x_m\right\},$$

$$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=\sup_n\left\{\inf_{m\geqslant n} x_m\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\inf_{m\geqslant n} x_m\right\}.$$

§ 4. ФУНКЦИИ И ИХ ПРЕДЕЛЫ

4.1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

При изучении тех или иных процессов реального мира (физических, химических, биологических, экономических и всевозможных других) мы постоянно встречаемся с теми или иными характеризующими их величинами, меняющимися в течение рассматриваемых процессов. При этом часто бывает, что изменению одной величины сопутствует и изменение другой или даже, более того, изменение одной величины является причиной изменения другой. Взаимосвязные изменения числовых характеристик рассматриваемых величин приводят к их функциональной зависимости в соответствующих математических моделях. Поэтому понятие функции является одним из самых важных понятий в математике и ее приложениях.

В нашем курсе математического анализа будут сначала изучаться только действительные функции одного действительного аргумента, т. е. функции $f: E\to \boldsymbol{R}$, где $E\subset \boldsymbol{R}$. Независимые и зависимые переменные называются в этом случае *действительными* (*вещественными*) *переменными*. Затем появятся функции многих переменных, т. е. функции, определенные на некотором множестве элементов, каждый из которых представляет собой упорядоченную совокупность чисел. Будут также изучаться функции, прини-