тате мы получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ данной последовательности $\{x_n\}$. Из неравенства $|a - x_{n_k}| < \frac{1}{k}$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, т. е. что a является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$.

Покажем теперь, что число a является наибольшим частичным пределом. Действительно, если бы нашелся частичный предел b последовательности $\{x_n\}$ такой, что $b > a$, то беря $\varepsilon > 0$ так, что $a + \varepsilon < b$ мы получим, что на промежутке $(a+\varepsilon, +\infty)$ будет находиться бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$ (а именно почти все члены подпоследовательности, сходящейся к b). Это противоречит условию 1. $\square$

Упражнения. 19. Доказать, что для того чтобы последовательность имела предел (конечный или бесконечный, равный одному из символов $+\infty$ или $-\infty$), необходимо и достаточно, чтобы $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

20. Доказать, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n$.

21. Доказать, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \inf_n \left\{\sup_{m\geqslant n} x_m\right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{\sup_{m\geqslant n} x_m\right\},$$

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \sup_n \left\{\inf_{m\geqslant n} x_m\right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{\inf_{m\geqslant n} x_m\right\}.$$

§ 4. ФУНКЦИИ И ИХ ПРЕДЕЛЫ

4.1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

При изучении тех или иных процессов реального мира (физических, химических, биологических, экономических и всевозможных других) мы постоянно встречаемся с теми или иными характеризующими их величинами, меняющимися в течение рассматриваемых процессов. При этом часто бывает, что изменению одной величины сопутствует и изменение другой или даже, более того, изменение одной величины является причиной изменения другой. Взаимосвязные изменения числовых характеристик рассматриваемых величин приводят к их функциональной зависимости в соответствующих математических моделях. Поэтому понятие функции является одним из самых важных понятий в математике и ее приложениях.

В нашем курсе математического анализа будут сначала изучаться только действительные функции одного действительного аргумента, т. е. функции $f: E \to \boldsymbol{R}$, где $E \subset \boldsymbol{R}$. Независимые и зависимые переменные называются в этом случае *действительными* (*вещественными*) *переменными*. Затем появятся функции многих переменных, т. е. функции, определенные на некотором множестве элементов, каждый из которых представляет собой упорядоченную совокупность чисел. Будут также изучаться функции, принимающие комплексные значения, функции, аргументами которых являются комплексные числа и другие функции более общей природы.

Над функциями, принимающими числовые значения (такие функции называются *числовыми функциями*), можно производить различные арифметические операции. Если даны две числовые функции f и g, определенные на одном и том же множестве X, а c — некоторое число (или, как часто говорят, постоянное), то функция cf определяется как функция, принимающая в каждой точке $x \in X$ значение $cf(x)$; функция $f+g$ — как функция, принимающая в каждой точке $x \in X$ значение $f(x)+g(x)$; fg — как функция, в каждой точке принимающая значение $f(x)g(x)$; наконец, f/g — как функция, в каждой точке $x \in X$ равная $f(x)/g(x)$ (что, конечно, имеет смысл лишь при $g(x) \neq 0$).

Числовая функция f, определенная на множестве X, называется *ограниченной сверху* (*ограниченной снизу*), если множество ее значений ограничено сверху (снизу). Иначе говоря, функция f ограничена сверху (снизу), если существует такая постоянная M, что для каждого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant M$ (соответственно $f(x) \geqslant M$).

Функция f, ограниченная на множестве X как сверху, так и снизу, называется просто *ограниченной* на этом множестве. Очевидно, что функция f ограничена на множестве X в том и только том случае, если существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для каждого $x \in X$.

Верхняя (нижняя) грань множества значений Y_f числовой функции $y = f(x)$, определенной на множестве X, называется *верхней* (*нижней*) *гранью* функции f и обозначается

$$\sup f, \ \sup_X f, \ \sup_{x \in X} f(x) \ \left(\inf f, \ \inf_X f, \ \inf_{x \in X} f(x)\right).$$

Более подробно это означает, что, например, $\lambda = \sup f$, если, во-первых, для каждого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant \lambda$ и, во-вторых, для любого $\lambda' < \lambda$ существует такое $x_{\lambda'} \in X$, что $f(x_{\lambda'}) > \lambda'$. Индекс λ' у элемента множества X показывает, что он зависит от выбора числа λ'.

В приведенном определении верхняя (нижняя) грань функции может быть как конечной, так и бесконечной.

Согласно результатам п. 2.8, функция f ограничена сверху (снизу) на множестве X тогда и только тогда, когда она имеет на этом множестве конечную верхнюю (нижнюю) грань.

Упражнения. 1. Доказать, что если функция f неограничена сверху (соответственно снизу) на отрезке $[a, b]$, то существует такая последовательность точек $x_n \in [a, b]$, $n = 1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty$ (соответственно $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty$).

2. Доказать, что если функция неограничена на отрезке, то существует точка этого отрезка, в каждой окрестности которой функция неограничена.

3. Построить пример функции, определенной на отрезке и неограниченной на нем.

Будем говорить, что числовая функция f, определенная на множестве X, принимает в точке $x_0 \in X$ *наибольшее значение* (соответственно *наименьшее*), если $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно $f(x) \geqslant f(x_0)$) для каждой точки $x \in X$. В этом случае будем писать $f(x_0) = \max\limits_X f$ или $f(x_0) = \max f$ (соответственно $f(x_0) = \min\limits_X f$ или $f(x_0) = \min f$).

Наибольшее (наименьшее) значение функции называется также ее *максимальным* (*минимальным*) значением. Максимальные и минимальные значения называются *экстремальными*.

Очевидно, что если функция f принимает в точке x_0 наибольшее (наименьшее) значение, то $f(x_0) = \sup f$ (соответственно $f(x_0) = \inf f$).

Отметим еще, что если заданы множества X, Y и соответствие f, ставящее в соответствие каждому элементу множества X единственный элемент множества Y, то этим функция f, определенная на множестве X и с множеством значений, содержащимся в множестве Y, полностью определена. В частности, безразлично, какой буквой обозначать аргумент и какой — значение функции. Так, при заданном указанном соответствии f записи $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ и $v = f(u)$, $u \in X$, $v \in Y$, обозначают одно и то же. Например, $y = \log_a x$, $x > 0$ и $x = \log_a y$, $y > 0$ обозначают одну и ту же функцию.

4.2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

В этой главе изучаются только действительные функции одной действительной переменной, поэтому остановимся на способах задания только таких функций.

Прежде всего функции могут задаваться при помощи формул: аналитический способ. Для этого используется некоторый запас изученных и специально обозначенных функций, алгебраические действия и предельный переход. Например, $y = ax + b$, $y = ax^2$, $y = \sin x$, $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 1 + \sqrt{\lg \cos 2\pi x}$.

При этом всегда под функцией, заданной некоторой формулой, понимается функция, определенная на множестве всех тех действительных чисел, для которых, во-первых, указанная формула имеет смысл и, во-вторых, в процессе проведения всех необходимых вычислений по этой формуле получаются только действительные числа, причем окончательный результат вычислений для данного числа x из области определения рассматриваемой функции является ее *значением* в точке x. Так, областью существования функции $f(x)=\frac{x+|x|}{\sqrt{1-x^2}}$ является интервал $(-1, 1)$, хотя эта функция и принимает действительные значения на полупрямой $x<1$ с «выколотой точкой» $x=-1$.

Иногда функция задается с помощью нескольких формул, например

$$f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{для} \quad x>0, \\ 0 & \text{для} \quad x=0, \\ x-1 & \text{для} \quad x<0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Функция может быть задана также просто с помощью описания соответствия. Поставим в соответствие каждому числу $x>0$ число 1, числу 0 — число 0, а каждому $x<0$ — число -1. В результате получим функцию, определенную на всей вещественной оси и принимающую три значения: 1, 0 и -1. Эта функция имеет специальное обозначение $\operatorname{sign} x$ *) и, конечно, может быть записана с помощью нескольких формул:

$$\operatorname{sign} x=\begin{cases} 1 & \text{для} \quad x>0, \\ 0 & \text{для} \quad x=0, \\ -1 & \text{для} \quad x<0. \end{cases}$$

Другой пример: каждому рациональному числу поставим в соответствие число 1, а каждому иррациональному — число ноль. Полученная функция называется *функцией Дирихле* **).

Отметим, что всякая формула является символической записью некоторого где-то описанного ранее соответствия, так что, в конце концов, нет принципиального различия между заданием функции с помощью формулы или с помощью описания соответствия; это различие чисто внешнее.

Следует также иметь в виду, что всякая вновь определенная функция, если для нее ввести специальное обозначение, может служить для определения других функций с помощью формул, включающих этот новый символ.

Если речь идет о действительных функциях одного действительного аргумента, то для наглядного представления о характере функциональной зависимости часто строятся графики функций.

Графиком функции $y=f(x)$ (x и y — числа) называется множество точек на плоскости с координатами $(x, f(x))$, $x\in X$ (X — как всегда, область определения функции).

---

*) Signum — по латыни означает «знак»

**) Л. Дирихле (1805—1859) — немецкий математик.

Так, график функции (4.1) имеет вид, изображенный на рис. 13, а график функции $y=1+\sqrt{\lg\cos 2\pi x}$ состоит из отдельных точек (рис. 14).

Множество точек $\{(x, y): x\in X, y\geqslant f(x)\}$ называется *надграфиком* данной функции f, а множество $\{(x, y): x\in X, y\leqslant f(x)\}$ *ее подграфиком.*

Графическое изображение функции также может служить для задания функциональной зависимости. Правда, это задание будет приближенно, потому что измерение отрезков практически можно производить лишь с определенной степенью точности. Примерами графического задания функций, встречающимися на практике, могут служить, например, показания осциллографа.

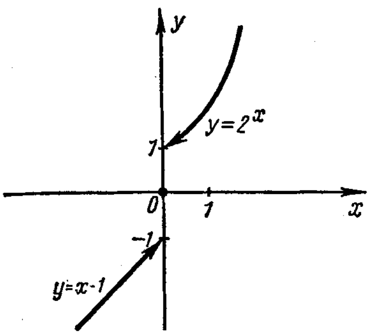

Рис. 13

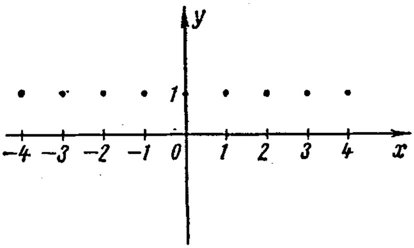

Рис. 14

Функцию можно задать еще с помощью таблиц, т. е. для некоторых значений переменной x указать соответствующие значения переменной y. Данные таблиц могут быть получены как непосредственно из опыта, так и с помощью тех или иных математических расчетов. Примерами такого задания функций являются логарифмические таблицы и таблицы тригонометрических функций.

Наконец, при проведении численных расчетов на компьютерах функции задаются с помощью программ для их вычисления при нужных значениях аргумента или требуемые значения функции в готовом виде закладываются тем или иным способом в память компьютера.

Упражнения. Построить графики функций:

4. $y=2x+1$.
5. $y=ax+b$.
6. $y=a/x$.
7. $y=2x^2$.
8. $y=ax^2+bx+c$.
9. $y=2^x$.
10. $y=(1/2)^x$.
11. $y=\lg x$.
12. $y=\log_{1/2} x$.
13. $y=\sin 2x$.
14. $y=2\cos(3x+2)+1$.
15. $y=\operatorname{tg} 3x$.

16. $y=\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x$
17. $y=\arcsin x$.
18. $y=3\arccos\frac{x}{2}+1$.
19. $y=\operatorname{arctg} x$.
20. $y=\frac{x^2+1}{x^2-4}$.
21. $y=\frac{x^2(x-1)^2}{x+1}$.

Рассмотрим более подробно некоторые специальные аналитические способы задания функции.

Неявные функции. Пусть дано уравнение вида

$$F(x, y)=0, \tag{4.2}$$

т. е. задана функция $F(x, y)$ двух действительных переменных x и y, и рассматриваются только такие пары x, y (если они существуют), для которых выполняется условие (4.2).

Пусть существует такое множество X, что для каждого $x_0 \in X$ существует по крайней мере одно число y, удовлетворяющее уравнению $F(x_0, y)=0$. Обозначим одно из таких y-ков через y_0 и поставим его в соответствие числу $x_0 \in X$. В результате получим функцию f, определенную на множестве X и такую, что $F(x_0, f(x_0))=0$ для всех $x_0 \in X$. В этом случае говорят, что функция f задается неявно уравнением (4.2). Одно и то же уравнение (4.2) задает, вообще говоря, не одну, а некоторое множество функций.

Функции, неявно задаваемые уравнениями вида (4.2), называются *неявными функциями* в отличие от функций, задаваемых формулой, разрешенной относительно переменной y, т. е. формулой вида $y=f(x)$.

Термин «неявная функция» отражает не характер функциональной зависимости, а лишь способ ее задания. Одна и та же функция может быть задана как явно, так и неявно. Например, функции $f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$ и $f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$ могут быть заданы также и неявным образом с помощью уравнения $x^2+y^2-1=0$ в том смысле, что они входят в совокупность функций, задаваемых этим уравнением.

Сложные функции. Напомним, что если заданы функции $y=f(x)$ и $z=F(y)$, причем область задания функции F содержит область значений функции f, тогда каждому x из области определения функции f естественным образом соответствует z такое, что $z=F(y)$, где $y=f(x)$. Эта функция, определяемая соответствием $z=F[f(x)]$, называется, как известно, *сложной функцией* или *композицией* (*суперпозицией*) функций f и F и обозначается через $F \circ f$, т. е.

$$(F \circ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} F(f(x)).$$

Сложная функция отражает не характер функциональной зависимости, а лишь способ ее задания: может случиться, что одна и та же функция может быть задана как с помощью композиций каких-либо функций, так и без их помощи. Например, сложная функция $z=2^y$, $y=\log_2(1+\sin^2 x)$, заданная с помощью суперпозиций показательной и логарифмической функций, может быть задана и без этой суперпозиции $z=1+\sin^2 x$.

Подобным образом можно рассматривать сложные функции, являющиеся суперпозицией более чем двух функций, например функцию $w=\sin\lg\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ можно рассматривать как суперпозицию следующих функций: $w=\sin v$, $v=\lg u$, $u=1+z$, $z=1/y$, $y=\sqrt{x}$.

4.3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Функции: постоянная $y=c$, c — константа, степенная $y=x^\alpha$, показательная $y=a^x$ $(a>0)$, логарифмическая $y=\log_a x$ $(a>0,$ $a\neq 1)$, тригонометрические $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=$ $=\operatorname{arctg} x$ и $y=\operatorname{arcctg} x$ — называются *основными элементарными функциями.*

Всякая функция, которая может быть явным образом задана с помощью формулы, содержащей лишь конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций, называется просто элементарной функцией.

Под областью существования элементарной функции в соответствии с общим соглашением о функциях, заданных формулами (см. п. 4.2), обычно понимают множество всех действительных чисел x, для которых, во-первых, формула, задающая рассматриваемую элементарную функцию, имеет смысл, и, во-вторых, в процессе проведения всех необходимых вычислений по этой формуле получаются только действительные числа.

Выше рассмотренные функции, задаваемые формулами $y=$ $=ax+b$, $y=ax^2$, $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=1+\sqrt{\lg\cos 2\pi x}$, $y=$ $=\sin\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $y=\frac{x+|x|}{\sqrt{1-x^2}}$ (заметим, что $|x|=\sqrt{x^2}$ — элементарная функция), являются элементарными функциями.

Элементарные функции обычно делят на следующие классы.

1. Многочлены (полиномы). К многочленам относятся функции, которые могут быть заданы формулами вида

$$y=P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=\sum_{k=0}^{n} a_kx^k.$$

Если $a_n\neq 0$, то число n называется степенью данного многочлена. Многочлены первой степени называются также линейными функциями.

2. Рациональные функции (рациональные дроби). К этому классу функций относятся функции, которые могут быть

заданы в виде

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

3. Иррациональные функции. Иррациональной функцией называется функция, которая может быть задана с помощью суперпозиций конечного числа рациональных функций, степенных функций с рациональными показателями и четырех арифметических действий. Например, функция

$$y=\sqrt[5]{(x-1)/(x^2+\sqrt{x})}$$

является иррациональной функцией.

Заметим, что класс многочленов содержится в классе рациональных функций.

4. Трансцендентные функции. Элементарные функции, не являющиеся иррациональными, называются трансцендентными, элементарными функциями. Можно показать, что все прямые и обратные тригонометрические функции, а также показательная и логарифмическая функции являются трансцендентными функциями.

Поскольку в нашем курсе анализа изучаются в основном действительные функции от одного или нескольких действительных аргументов, то вместо «действительная функция» будем говорить и писать просто «функция». В тех случаях, когда будут рассматриваться функции другой природы, это или будет специально оговариваться, либо будет ясно из контекста.

4.4. ПЕРВОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИЙ

Для того чтобы сформулировать определение предела функции, введем сначала определение «проколотой окрестности». Напомним, что ε-окрестностью $U(x_0,\ \varepsilon)$ точки $x_0 \in R$ называется интервал вида $U(x_0,\ \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} (x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$.

Всякая ε-окрестность точки называется также просто ее *окрестностью*.

Определение 1. *Проколотой ε-окрестностью точки x_0 называется ε-окрестность точки x_0, из которой удалена точка x_0.*

Проколотая ε-окрестность точки x_0 обозначается через $\mathring{U}(x_0,\ \varepsilon)$:

$$\mathring{U}(x_0,\ \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} U(x_0,\ \varepsilon)\setminus\{x_0\}.$$

Всякая проколотая ε-окрестность точки x_0 называется и просто *проколотой окрестностью* этой точки и обозначается также и через $\mathring{U}(x_0)$.

Отметим, что выражение «функция f определена на множестве E» не означает, что указанное множество является множеством определения функции f, а лишь, что это множество принадлежит области X_f определения функции f и что в данном вопросе функция f рассматривается только на указанном множестве E, т. е. по существу рассматривается лишь сужение функции f на множестве E *).

Определение 2. (Гейне **)). *Пусть функция f определена на некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0.*

Число A называется пределом функции f в точке x_0 (или при x, стремящемся к x_0), если для любой последовательности $x_n \in \mathring{U}(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящейся к точке x_0: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A, т. е. верно равенство $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Если число A является пределом функции f в точке x_0, то пишется

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x), \quad \text{или} \quad A = \lim_{x - x_0 \to 0} f(x),$$

а также $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Из этого определения следует, что функция не может иметь двух разных пределов в одной точке. Далее, из определения следует, что значения функции f в точках x, лежащих вне любой фиксированной окрестности точки x_0, и значение функции f в точке x_0 не влияют ни на существование, ни на величину предела функции f в точке x_0.

Существует или нет предел функции в данной точке x_0, а если существует, то каково его значение, полностью определяется значениями функции в сколь угодной малой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0. Действительно, какова бы ни была проколотая окрестность $\mathring{U}(x_0)$ и какова бы ни была последовательность $x_n \in \mathring{U}(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, найдется такой номер $n_0 \in N$, что при $n \geqslant n_0$ будет иметь место $x_n \in \mathring{U}(x_0)$, а конечное число оставшихся членов последовательности $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\ldots$, $f(x_{n_0-1})$ не влияет ни на существование, ни на величину предела всей последовательности $\{f(x_n)\}$. В этом смысле говорят, что свойство функции иметь предел в данной точке является **локальным свойством** функции.

---

*) В случае окрестности точки (а также в случае ее проколотой окрестности) наряду с выражением «функция определена на окрестности» употребляется выражение «функция определена в окрестности». В подобных выражениях предлоги в и на имеют одинаковый смысл и для ряда других множеств.

**) Г. Гейне (1821—1881) — немецкий математик.

Подчеркнем, что если функция имеет предел в некоторой точке, то она определена в некоторой проколотой окрестности этой точки.

Примеры. 1. Пусть $f(x)=(2x^2+x-1)/(x-1)$. Выясним, существует или нет $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Возьмем какую-либо последовательность x_n такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ и $x_n \neq 0$, $n=1, 2, \ldots$, тогда на основании теорем п. 3.9 имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2x_n^2+x_n-1}{x_n-1}=\frac{2\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^2+\lim\limits_{n\to\infty} x_n-1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n-1}=1.$$

(при этом мы считали $x_n \neq 1$, так как при $x=1$ рассматриваемая функция не определена). Таким образом, существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=1$, и так как он не зависит от выбора последовательности $x_n \to 0$, $n=1, 2, \ldots$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=1$.

2. Рассмотрим функцию $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ (рис. 15). Снова выясним существует или нет $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Возьмем две последовательности: $x_n=\frac{1}{\pi n}$ и $x_n'=\frac{1}{\pi/2+2\pi n}$, $n=1, 2, \ldots$. Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} x_n'=0$, $x_n \neq 0$, $x_n' \neq 0$, $f(x_n)=\sin\pi n=0$, $f(x_n')=\sin\frac{\pi}{2}=1$, $n=1, 2, \ldots$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$ и $\lim f(x_n')=1$ и, значит, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует.

Замечание. Пусть функции f и g определены на интервале $(a\ b)$, кроме, быть может, точки x_0, и пусть $f(x)=g(x)$ при $x\neq x_0$, $x\in(a, b)$, тогда из того, что в определении предела функции в точке x_0 участвуют только значения функции в точках $x\neq x_0$ следует, что пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ одновременно существуют или нет, причем в первом случае $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. На этом простом замечании основано так называемое правило раскрытия неопределенностей с помощью сокращения дробей. Поясним его на примере.

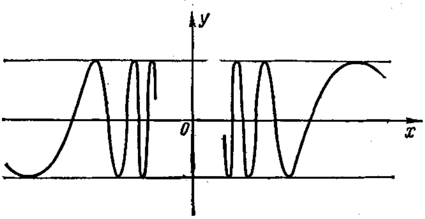

Рис. 15

3. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2x^2+x-1)x}{x^2-x}$. Повторение рассуждений, аналогичных проведенным выше при разборе примера 1, приводит

к выражению 0/0 (к неопределенности), т. е. не дает ответа на вопрос о существовании и значении искомого предела. Однако, беря функцию $f(x)=\frac{2x^2-x-1}{x-1}$, получающуюся сокращением на x выражения $g(x)=\frac{(2x^2+x-1)x}{x^2-x}$ и, следовательно, такую, что $f(x)=g(x)$ при $x\neq 0$, вспоминая, что мы уже доказали, что существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, имеем, согласно сделанному замечанию,

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(2x^2+x-1)x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+x-1}{x-1}=\lim_{x\to 0} f(x)=1.$$

Определение 3. *Пусть функция f определена на интервале (a, x_0). Число B называется пределом слева функции f в точке x_0, если какова бы ни была такая последовательность $\{x_n\}$, что*

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x_0, \qquad a<x_n<x_0, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots$$

(в частности, это означает, что последовательность $\{x_n\}$ сходится слева к точке x_0 см. п. 3.1), последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу B, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=B.$$

Если такое число B существует, то пишут

$$B=\lim_{x\to x_0-0} f(x) \qquad \text{или} \qquad B=f(x_0-0).$$

Аналогично определяется предел справа $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ в точке x_0 для функции, определенной на интервале (x_0, b). Именно, *число B называется пределом справа функции f в точке x_0, если для любой такой последовательности точек $\{x_n\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, $x_0<x_n<b$, $n=1,\ 2,\ \ldots$ (в частности, это означает, что последовательность $\{x_n\}$ сходится справа к точке x_0), последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу B, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=B.$$

В случае $x_0=0$ вместо $x\to 0+0$ (соответственно вместо $x\to 0-0$) пишут просто $x\to +0$ (соответственно $x\to -0$). Пределы слева и справа функции называются *односторонними* в отличие от предела функции, определенного в начале этого пункта, который называется и *двусторонним пределом*.

В качестве примера рассмотрим функцию $y=\operatorname{sign} x$ (см. п. 4.1 и рис. 16).

Пусть $x_n>0$, $x_n'<0$, $n=1,\ 2,\ \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} x_n'=0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sign} x_n=\lim_{n\to\infty} 1=1, \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{sign} x_n'=\lim_{n\to\infty}(-1)=-1,$$

значит,

$$\lim_{x\to+0}\operatorname{sign} x = 1, \quad \text{а} \quad \lim_{x\to-0}\operatorname{sign} x = -1.$$

Согласно определению предела функции функция f, определенная в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0, имеет в этой точке предел, если какова бы ни была последовательность $x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$, имеющая своим пределом x_0: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится, и ее предел не зависит от выбора указанной последовательности $\{x_n\}$, т. е. все последовательности $\{f(x_n)\}$ имеют и притом один и тот же предел: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Число A и является в этом случае *пределом функции f в точке x_0*.

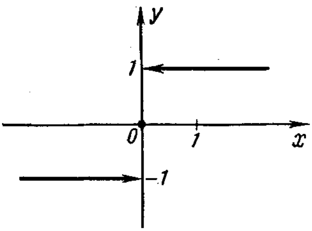

Рис. 16

Покажем, что если предположить несколько меньше, а именно предположить только существование предела у каждой рассматриваемой последовательности $\{f(x_n)\}$, то уже из одного этого будет следовать, что все эти пределы совпадают и тем самым функция f в этом случае будет иметь предел в точке x_0.

Сформулируем это утверждение в виде отдельной леммы.

Лемма. *Для того чтобы функция f, определенная в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0, имела в этой точке предел необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящейся к точке x_0, последовательность $f(x_n)$ имела предел.*

Доказательство. Необходимость сформулированного условия для существования предела функции содержится в самом определении этого понятия (см. определение 2).

Достаточность. Пусть функция f определена в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0, и пусть для любой последовательности $x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, последовательность $f(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится. Рассмотрим две последовательности $x_n' \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ и $x_n'' \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = \lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = x_0$. Тогда последовательность

$$x_n = \begin{cases} x_k', & \text{если} \quad n = 2k-1, \\ x_k'', & \text{если} \quad n = 2k, \end{cases}$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

также сходится к точке x_0, $x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$. Согласно предположению существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$ и

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, причем последовательности $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$ являются подпоследовательностями последовательности $\{f(x_n)\}$.

Заметим теперь, что если у некоторой последовательности имеется предел, то любая ее подпоследовательность имеет тот же предел, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n), \qquad \lim_{n\to\infty} f(x''_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n);$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} f(x''_n).$$

Таким образом, пределы последовательностей $\{f(x_n)\}$, где $x_n \in \mathring{U}(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, не зависят от выбора последовательности $\{x_n\}$. Обозначая их общее значение через A, согласно определению 2 будем иметь: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. $\square$

Доказанная лемма естественным образом переносится и на случай односторонних пределов.

4.5. ВТОРОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИЙ

Существует другое определение предела функции, не использующее понятия предела последовательности и называемое *определением предела по Коши*.

Определение 4. *Число A называется пределом функции f в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию*

$$|x - x_0| < \delta, \qquad x \neq x_0, \tag{4.3}$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \tag{4.4}$$

Предел функции в смысле определения Коши также обозначается

$$\lim_{x\to x_0} f(x).$$

Используя логические символы, определение 4 можно записать в виде

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta):\ |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{4.5}$$

Вспоминая, что множество точек x, удовлетворяющих условию (4.3), называется *проколотой окрестностью* $\mathring{U}(x_0, \delta)$ точки x_0, а множество точек y, удовлетворяющих неравенству $|y-A|<\varepsilon$, называется просто *окрестностью* $U(A, \varepsilon)$ точка A, определение 4 можно перефразировать следующим образом.

Число A называется пределом функции f в точке x_0, если для любой окрестности $U(A, \varepsilon)$ точки A существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(x_0, \delta)$ точки x_0, что (рис. 17)

$$f(\mathring{U}(x_0, \delta)) \subset U(A, \varepsilon). \tag{4.6}$$

Теорема 1. *Определения 2 и 4 предела функции в данной точке равносильны.*

Доказательство. 1. Пусть $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ в смысле определения 2. Тогда функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0, \delta)$ точки x_0 и для любой последовательности $x_n \in \mathring{U}(x_0, \delta)$, $n=1, 2, \ldots, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Покажем, что выполняется и условие, стоящее в правой части формулы (4.5).

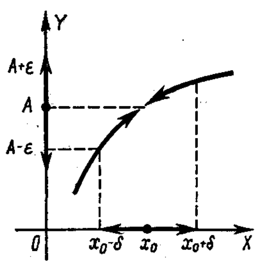

Рис. 17

Допустим, это не так, т. е. что

$$(\exists\varepsilon_0>0)(\forall\delta>0)(\exists x_\delta \neq x_0, \; |x_\delta - x_0|<\delta): |f(x_\delta)-A| \geqslant \varepsilon. \tag{4.7}$$

Иначе говоря, найдется такое $\varepsilon_0>0$, что для любого $\delta>0$, а значит, в частности, и для любого δ, $0<\delta<\delta_0$, существует такое x_δ (индекс δ у x подчеркивает зависимость x от выбора δ; ничего, конечно, не изменится, если индекс δ не писать), что для него $|x_\delta - x_0|<\delta$ и выполняется неравенство

$$|f(x_\delta)-A| \geqslant \varepsilon_0. \tag{4.8}$$

Будем последовательно выбирать $\delta = \frac{\delta_0}{n}$, $n=1, 2, \ldots$, а соответствующие x_δ обозначать просто через x_n:

$$|x_n - x_0| < \frac{\delta_0}{n}, \quad x_n \neq x_0, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{4.9}$$

следовательно, в силу (4.8)

$$|f(x_n)-A| \geqslant \varepsilon_0. \tag{4.10}$$

Очевидно, что из (4.9) вытекает, что $x_n \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, однако из условия (4.10) явствует, что число A не может быть пределом последовательности $\{f(x_n)\}$. Это противоречит определению 2 предела функции. Полученное противоречие доказывает сделанное утверждение. $\square$

2. Пусть теперь $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ в смысле определения 4 предела функции. Покажем, что тогда функция f прежде всего определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. В самом деле, возьмем, например, $\varepsilon=1$. Для него согласно определению 4 существует такое $\delta_0>0$, что для всех $x\neq x_0$, $|x-x_0|<\delta_0$ выполняется условие $|f(x)-A|<1$ и, следовательно, в частности для всех таких значений x определена функция f. Таким образом, функция f заведомо определена в проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0, \delta_0)$.

Возьмем

$$x_n\in\mathring{U}(x_0, \delta_0), \quad n=1, 2, \ldots, \tag{4.11}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0. \tag{4.12}$$

Покажем, что если функция f удовлетворяет условиям определения 4, то

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A. \tag{4.13}$$

Проверим это. Зададим произвольно $\varepsilon>0$ и выберем для него $\delta>0$, которое удовлетворяет условиям (4.3)—(4.4). Для этого δ в силу условия (4.12) найдется такое $n_0\in N$, что для всех $n\geqslant n_0$, $n\in N$, будет выполняться неравенство $|x_n-x_0|<\delta$. Из условия же (4.11) следует, что для всех $n\in N$: $x_n\neq x_0$. Поэтому в силу (4.4) для всех $n\geqslant n_0$ справедливо неравенство

$$|f_n(x)-A|<\varepsilon.$$

Это и означает выполнение условия (4.13). □

Предел функции, как было отмечено в п. 4.4, является локальным свойством функции в том смысле, что его существование для функции в данной точке, а если он существует, то и его значение не зависит от сужения функции на сколь угодно малой проколотой окрестности рассматриваемой точки. Это хорошо также видно и из определения 4: если задать произвольное $\delta_0>0$ и добавить в указанное определение дополнительное условие $\delta<\delta_0$, то получится равносильное исходному определение, так как если условия (4.3)—(4.4) выполняются для некоторого $\delta>0$, то они выполняются и для всех меньших положительных δ.

Для односторонних пределов функции в точке также можно дать новое определение.

Определение 5. *Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, x_0) (соответственно на интервале (x_0, b)). Число B называется пределом слева (справа) функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех точек x, удовлетворяющих условию $x_0-\delta<x<x_0$ (соответственно условию $x_0<x<x_0+\delta$), выполняется неравенство $|f(x)-B|<\varepsilon$.*

Совершенно аналогично теореме 1 доказывается, что это определение эквивалентно исходному (см. определение 3 в п. 4.4).

Связь между односторонними пределами и двусторонним пределом устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. *Функция f имеет предел в точке тогда и только тогда, когда в этой точке существуют пределы как справа, так и слева и они равны. В этом случае их общее значение и является двусторонним пределом функции f в точке x_0.*

Доказательство. В самом деле, пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Тогда, согласно определению предела функции в точке x_0, это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех точек x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Тем самым, как для точек x таких, что $x_0 - \delta < x < x_0$, так и таких, что $x_0 < x < x_0 + \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. А это, согласно определению 5, и означает, что число A является как пределом функции f слева, так и ее пределом справа в точке x_0:

$$A = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x + 0} f(x) \tag{4.14}$$

(обозначения см. в определении 3 в п. 4.4).

Обратно, пусть выполнены условия (4.14). Согласно определению предела функции слева и справа, отсюда следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ и $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0 - \delta_1 < x < x_0$, и для всех x, удовлетворяющих условию $x_0 < x < x_0 + \delta_2$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Если обозначить через δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2, то очевидно, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, будет справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Это и означает, что

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x). \ \square$$

4.6. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

Понятие предела функции можно обобщить для случая, когда аргумент функции или ее значения стремятся к бесконечности. Например, будем говорить, что $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x таких, что $x_0 < x < x_0 + \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$.

Можно показать, что это определение равносильно следующему: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, если функция f определена в некотором интервале $(x_0, x_0 + \delta)$, и для любой последовательности $x_n \in (x_0, x_0 + \delta)$ $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ имеет место $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$.

Приведем еще один пример. Будем говорить, что $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A + 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x < -\delta$ выполняется неравенство $A \leqslant f(x) < A + \varepsilon$.

Нетрудно сформулировать равносильное определение в терминах пределов последовательностей.

Встречаются и различные другие подобные сочетания предельных значений аргументов и функций. Формулировка определения предела функции для каждого отдельного случая, хотя часто и удобна в конкретных ситуациях (поэтому ее нужно уметь делать), мало приспособлена к рассмотрению общих вопросов, так как требует проведения специальных доказательств, соответствующих данным определениям. Поэтому целесообразно ввести одно единое определение предела функции, конечного и бесконечного, в данной «точке».

Напомним, что окрестностью точки a называется всякий интервал вида $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, $\delta>0$. Правосторонней окрестностью $U(x_0+0,\ \delta)$, точки x_0 называется полуинтервал вида $[x_0,\ x_0+\delta)$, а левосторонней $U(x_0-0,\ \delta)$ — полуинтервал $(x_0-\delta,\ x_0]$, $\delta>0$.

По аналогии с определением проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0,\ \delta)$ в п. 4.4 определим проколотые окрестности для x_0+0, x_0-0, ∞, $+\infty$, $-\infty$:

$$\begin{gathered}
\mathring{U}(x_0+0,\ \delta)\overset{\text{def}}{=}(x_0,\ x_0+\delta)=U(x_0+0,\ \delta)\setminus\{x_0\},\\
\mathring{U}(x_0-0,\ \delta)\overset{\text{def}}{=}(x_0-\delta,\ x_0)=U(x_0-0,\ \delta)\setminus\{x_0\},\\
\mathring{U}(\infty,\ \delta)\overset{\text{def}}{=}\{x\colon |x|>\delta\}=U(\infty,\ \delta)\setminus\{+\infty\}\setminus\{-\infty\},\\
\mathring{U}(+\infty,\ \delta)\overset{\text{def}}{=}\{x\colon x>\delta\}=U(+\infty,\ \delta)\setminus\{+\infty\},\\
\mathring{U}(-\infty,\ \delta)\overset{\text{def}}{=}\{x\colon x<-\delta\}=U(-\infty,\ \delta)\setminus\{-\infty\},\ \delta>0
\end{gathered}$$

Как видно из сформированного определения, проколотые окрестности любых элементов x_0, x_0+0, x_0-0, ∞, $+\infty$ или $-\infty$ получаются из их обычных окрестностей посредством удаления из них соответствующих элементов. При этом оказывается, что во всех перечисленных случаях элементами проколотых окрестностей являются только действительные числа.

Для простоты формулировок здесь под термином «точка» будем понимать либо действительное число x_0, либо один из символов x_0+0, x_0-0, ∞, $+\infty$, $-\infty$. Под записью $x\neq a$, в случаях $a=x_0\pm0$ будем понимать $x\neq x_0$ и считать, что $-\infty+0=-\infty$ и $+\infty-0=+\infty$. Для краткости иногда обычную и проколотую δ-окрестности точки a будем соответственно обозначать через $U(a)$ и $\mathring{U}(a)$.

Теперь можно сформулировать общее определение предела функции.

Определение 6. *Точка A называется пределом функции f в точке a и пишется $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, если для любой окрестности $U(A,\ \varepsilon)$ точки A существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a,\ \delta)$ точки a, что $f(\mathring{U}(a,\ \delta))\subset U(A,\ \varepsilon)$.*

Заметим, что функция f, имеющая предел в точке a, определена в силу определения 6 в некоторой проколотой окрестности этой точки. Чтобы доказать ее существование, достаточно взять какое-либо конкретное $\varepsilon > 0$, например, $\varepsilon = 1$; тогда, если $\mathring{U}(a, \delta_0)$ — проколотая δ_0-окрестность, соответствующая $\varepsilon = 1$ согласно определению 6, то функция f и будет определена во всех точках этой проколотой окрестности. Мы уже встречались с подобным рассуждением в п. 4.5 при доказательстве эквивалентности определений 2 и 4 предела функции.

Нетрудно сформулировать определение предела функции в точке, равносильное определению 6, в терминах предела последовательности.

Определение 7. *Точка A называется пределом функции f в точке a, если функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ точки a и если для любой последовательности $x_n \in \mathring{U}(a)$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.*

Аналогично случаю $a = x_0 \in \boldsymbol{R}$ и конечного предела A, рассмотренному в п. 4.5, доказывается эквивалентность определений 6 и 7.

Для общего определения предела функции в точке справедливо обобщение леммы из п. 4.4 в следующем виде.

Лемма. *Для того чтобы функция f, определенная в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ точки a имела в этой точке конечный или бесконечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $x_n \in \mathring{U}(a)$, $n = 1, 2, \ldots$, имеющей своим пределом величину a, последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ имела конечный или бесконечный предел.*

Необходимость сформулированного условия следует непосредственно из определения 7, а доказательство его достаточности получается буквальным повторением леммы п. 4.4, если только под встречающимися там пределами понимать конечные или бесконечные пределы.

В дальнейшем под пределом функции всегда понимается к о н е ч н ы й п р е д е л, если не оговорено что-либо другое. При этом, если предел функции равен $A+0$ или $A-0$, где A — число: $A \in \boldsymbol{R}$, то этот предел также называется конечным.

У п р а ж н е н и я. 22. Доказать равносильность определений 6 и 7.

23. Доказать, что если $P(x)$ — многочлен степени $n \geq 1$, то $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \infty$.

4.7. СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ

Все функции, рассматриваемые в этом пункте, определены в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a) = \mathring{U}(a, \delta_0)$ заданной точки a. Напомним, что под «точкой» понимается либо число x_0, либо один из символов x_0+0, x_0-0, ∞, $+\infty$, $-\infty$.

1°. *Если у функции в заданной точке существует конечный предел, то в некоторой проколотой окрестности этой точки функция ограничена.*

Доказательство. Пусть у функции f существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Тогда согласно определению 6 для любого $\varepsilon > 0$, в частности, для $\varepsilon = 1$, существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a, \delta)$ точки a, что для всех $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ имеет место $f(x) \in U(A, 1)$, т. е. выполняется неравенство $A - 1 < f(x) < A + 1$. Это и означает ограниченность функции f на проколотой окрестности $\mathring{U}(a, \delta)$. □

2°. *Если у функции в заданной точке существует конечный, не равный нулю предел, то в некоторой проколотой окрестности этой точки функция имеет тот же знак, что и указанный предел (в частности, она не равна нулю).*

Доказательство. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и для определенности $A > 0$. Тогда согласно определению 6 для любого $\varepsilon > 0$, в частности для $\varepsilon = A$ (в случае $A < 0$ надо взять $\varepsilon = -A$) существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a, \delta)$, что для всех $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ имеет место $f(x) \in U(A, A)$, т. е. выполняется неравенство $A - A < f(x) < A + A$. В частности, $f(x) > 0$. □

3°. *Если* $f(x) = c$ — *постоянная,* $x \in \mathring{U}(a)$, *то* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$.

4°. *Если* $f(x) \geqslant A$, $x \in \mathring{U}(a)$, *и существует конечный или определенного знака бесконечный предел* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, *то* $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geqslant A$.

5°. *Если* $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$, $x \in \mathring{U}(a)$ *и существуют конечные или бесконечные определенного знака пределы* $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to a} \psi(x) = A$, *то* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

6°. *Если существуют конечные пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то существуют и конечные пределы* $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)]$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) g(x)$, *а если* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то — и предел* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, *причем*

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x), \tag{4.15}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x), \tag{4.16}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{4.17}$$

Следствие. *Если существует* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, *то для любого числа* $c \in \boldsymbol{R}$

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x).$$

Заметим, что частное $f(x)/g(x)$ при условии, что $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, конечно, может быть не определено на всей исходной проколотой окрестности $\mathring{U}(a, \delta_0)$. Однако, согласно свойству 2° из условия $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ следует, что существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a, \delta)$, $0 < \delta \leqslant \delta_0$, на которой $g(x) \neq 0$, и потому на ней имеет смысл частное $f(x)/g(x)$. Предполагается, что в формуле предела частного рассматривается сужение функций f и g на указанной проколотой окрестности $\mathring{U}(a, \delta)$.

Свойства 3° — 6° могут быть доказаны одинаковым методом, основанным на соответствующих свойствах пределов последовательностей (см. п. 3.9).

Докажем, например, формулу (4.16). Пусть $A \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $B \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{x\to a} g(x)$. Тогда, согласно определению 7 предела функции (см. п. 4.6), для любой последовательности $x_n \in \mathring{U}(a)$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, справедливы равенства

$$A = \lim_{n\to\infty} f(x_n), \quad B = \lim_{n\to\infty} g(x_n).$$

Поэтому вспоминая, что предел произведения сходящихся последовательностей существует и равен произведению их пределов (см. п. 3.9), получаем, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) g(x_n) = AB$, причем этот предел не зависит от выбора указанной последовательности $\{x_n\}$. Это согласно тому же определению 7 и означает, что

$$\lim_{x\to a} f(x) g(x) = AB = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x). \quad \square$$

4.8*. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПРЕДЕЛОВ

Здесь будет доказана теорема, полезная при решении задач на нахождение пределов функций.

Теорема 3 (о замене переменной для пределов функций). *Пусть существуют конечные или бесконечные пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{y\to b} F(y)$. *Пусть, кроме того, в некоторой проколотой окрестности точки* a *имеет место* $f(x) \neq b$, *тогда в точке* a *существует предел сложной функции* $F(f(x))$ и

$$\lim_{x\to a} F(f(x)) = \lim_{y\to b} F(y). \tag{4.18}$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что существуют такие проколотые окрестности $\mathring{U}(a, \delta_0)$ и $\mathring{U}(b, \varepsilon)$, что функция f определена на $\mathring{U}(a, \delta_0)$ и при $x \in \mathring{U}(a, \delta_0)$

$$f(x) \neq b, \tag{4.19}$$

а функция F определена на $\mathring{U}(b, \varepsilon)$.

Из существования предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ согласно определению 6 (см. п. 6) следует существование такой проколотой окрестности $\mathring{U}(a, \delta)$, что

$$f(\mathring{U}(a, \delta)) \subset U(b, \varepsilon). \tag{4.20}$$

При этом можно выбрать $\delta \leqslant \delta_0$, ибо если условие (4.20) выполнено для некоторого $\delta > 0$, то оно выполнено и для всех меньших положительных δ. В силу условия (4.19) из (4.20) следует, что множество $f(\mathring{U}(a, \delta))$ принадлежит не только окрестности $U(b, \varepsilon)$, но и соответствующей проколотой:

$$f(\mathring{U}(a, \delta) \subset \mathring{U}(b, \varepsilon). \tag{4.21}$$

Поэтому для любого $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ значение $f(x)$ принадлежит области определения функции F и, следовательно, для любого $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ определена сложная функция $F(f(x))$ или, как говорят, композиция $F \circ f$.

Пусть, теперь, последовательность $x_n \in \mathring{U}(a, \delta)$, $n = 1, 2, \ldots$, такова, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ и пусть $y_n \stackrel{\text{def}}{=} f(x_n)$. Тогда в силу определения предела 7 (см. п. 4.6) $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$, а в силу (4.21) $y_n \in \mathring{U}(b, \varepsilon)$.

Поэтому согласно тому же определению 7 из существования предела $\lim\limits_{y \to b} F(y)$, который обозначим через A, следует, что

$$\lim_{n \to \infty} F(f(x_n)) = \lim_{n \to \infty} F(y_n) = A.$$

Поскольку это верно для любой указанной последовательности $\{x_n\}$, то это и означает, что $\lim\limits_{x \to a} F(f(x)) = A$. □

Замечание. Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a, \delta)$ и отображает ее взаимно однозначно на проколотую окрестность $\mathring{U}(b, \varepsilon)$. Следовательно, на $\mathring{U}(b, \varepsilon)$ определена однозначная обратная функция f^{-1}, причем при $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ имеет место неравенство $f(x) \neq b$, а при $y \in \mathring{U}(b, \varepsilon)$ соответственно, $f^{-1}(y) \neq a$. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{y \to b} f^{-1}(y) = a$.

Пусть, кроме того, на $\mathring{U}(b, \varepsilon)$ определена функция F, и потому на $\mathring{U}(a, \delta)$ определена композиция $F \circ f$. Тогда предел $\lim\limits_{y \to b} F(y)$

существует в том и только том случае, когда существует предел $\lim\limits_{x\to a} F[f(x)]$, причем если они существуют, то равны между собой.

То, что из существования предела $\lim\limits_{y\to b} F(y)$ следует существование предела $\lim\limits_{x\to a} F(f(x))$, и их равенство составляет утверждение теоремы 3. Поэтому надо доказать только обратное утверждение. Оно при сделанных предположениях также вытекает из теоремы 3, примененной к композиции $(F\circ f)\circ f^{-1}$ функций f^{-1} и $F\circ f$.

Действительно, согласно этой теореме существует предел $\lim\limits_{y\to b}(F\circ f)(f^{-1}(y))=\lim\limits_{x\to a}(F\circ f)(x)$, но $(F\circ f)\circ f^{-1}=F\circ(f\circ f^{-1})=F$, тем самым существует предел $\lim\limits_{y\to b} F(y)$. □

4.9. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

Все функции, рассматриваемые в этом пункте, определены на некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ точки a.

Определение 8. *Функция α называется бесконечно малой (бесконечно большой) при стремлении аргумента к точке a, если* $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ $(\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\infty)$.

Бесконечно малые функции играют существенную роль, связанную, в частности, с тем, что общее понятие предела может быть сведено к понятию бесконечно малой.

Лемма. *Предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует и равен A тогда и только тогда, когда $f(x)=A+\alpha(x)$, где α бесконечно малая при стремлении аргумента к точке a.*

Действительно, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, то, полагая $\alpha(x)\overset{\text{def}}{=}f(x)-A$, получаем $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)-A=A-A=0$.

Наоборот, если $f(x)=A+\alpha(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)= A+\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=A$. □

Теорема 4. *Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых при стремлении аргумента к точке a, а также произведение бесконечно малой при стремлении аргумента к точке a на ограниченную функцию являются бесконечно малыми при стремлении аргумента к той же точке a.*

То, что сумма и произведение конечного числа бесконечно малых является бесконечно малой, непосредственно следует из свойства пределов в п. 4.7.

Доказательство же того, что произведение бесконечно малой на ограниченную функцию является бесконечно малой, очевидным образом проводится на основе определения 7 предела функции с использованием соответствующего свойства бесконечно малых последовательностей (см. в п. 3.8 свойство II).

Упражнение 24. Доказать, что функция α, определенная и не равная нулю в некоторой проколотой окрестности точки a, тогда и только тогда является бесконечно малой при стремлении аргумента к точке a, когда функция $1/\alpha$ является бесконечно большой при стремлении аргумента к той же точке a.

То обстоятельство, что функция, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой и наоборот (см. упражнение 24), делает естественной следующую символическую запись, часто употребляющуюся для сокращения записи: для любого числа $a>0$ пишут

$$\frac{a}{+0}=+\infty,\quad \frac{a}{-0}=-\infty,\quad \frac{a}{0}=\infty,\quad \frac{a}{+\infty}=+0,\quad \frac{a}{-\infty}=-0,\quad \frac{a}{\infty}=0.$$

Отметим, что на бесконечно большие функции свойства конечных пределов, связанные с арифметическими действиями над пределами, непосредственно не переносятся. Однако некоторые аналогии имеют место.

Например, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$, то и $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=+\infty$. Однако о существовании какого-либо предела $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$ здесь уже ничего утверждать нельзя. Можно показать, что позитивные утверждения о бесконечных пределах можно сделать в случаях, для которых в п. 2.5 были определены некоторые «арифметические операции» $c+\infty$ и $-\infty$.

4.10. ПРЕДЕЛЫ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Определение 9. *Функция f, определенная на числовом множестве E, называется возрастающей (убывающей) на E, если для любых $x_1\in E$ и $x_2\in E$ таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ (соответственно, неравенство $f(x_1)\geqslant f(x_2)$* *).

Если функция является возрастающей (убывающей) на множестве E, то говорят также, что она возрастает (убывает) на этом множестве.

Если функция f возрастает на множестве E, то функция $-f$, получающаяся из f изменением знака у всех ее значений, т. е. $(-f)(x)=-f(x)$, $x\in E$, является убывающей на E функций.

Возрастающие и убывающие на множестве E функции называются *монотонными* на этом множестве.

Теорема 5. *Пусть функция f возрастает на конечном или бесконечном интервале (a, b). Тогда в точке $x=b$ существует предел*

*) Возрастающие (убывающие) функции называются также *неубывающими* (*невозрастающими*).

слева и

$$\lim_{x\to b-0} f(x) = \sup_{(a,\ b)} f(x),$$

а в точке $x=a$ — предел справа и

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \inf_{(a,\ b)} f(x).$$

Таким образом, если в условиях теоремы функция f ограничена сверху, то в точке $x=b$ существует конечный предел слева, а если f неограничена сверху, то $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = +\infty$.

Аналогично, если функция f ограничена снизу, то в точке $x=a$ существует конечный предел справа, а если f не ограничена снизу, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$.

Аналогичные утверждения справедливы и для убывающих функций, их можно получить, перейдя от функции f к функции $-f$.

Следствие. *Если функция f монотонна на интервале (a, b) и $x_0 \in (a, b)$, то в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы*

$$f(x_0-0) \text{ и } f(x_0+0). \tag{4.22}$$

Доказательство теоремы. Пусть $\beta \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{(a,\ b)} f(x)$ — верхняя грань конечная или бесконечная, равная $+\infty$. Возьмем какое-либо $\eta < \beta$. Тогда в силу определения верхней грани (см. свойство 2° в определении 6′ п. 2.8) существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что

$$f(\xi) > \eta. \tag{4.23}$$

Положим, что $\mathring{U}(b) \overset{\text{def}}{=} (\xi, b)$, т. е. $\mathring{U}(b)$ является односторонней проколотой окрестностью точки b *). Тогда для любого $x \in \mathring{U}(b)$, т. е. для любого такого x, что $\xi < x < b$ (рис. 18) в силу возрастания функции f, определения верхней грани и неравенства (4.23) получим:

$$\eta < f(\xi) \leqslant f(x) \leqslant \beta.$$

Итак, если $x \in \mathring{U}(b)$, то

$$\eta < f(x) \leqslant \beta. \tag{4.24}$$

Задание произвольного числа $\eta < \beta$ равносильно в данном случае заданию произвольной окрестности $U(\beta)$ точки β в следующем смысле. Именно, если β конечно, то, полагая $\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \beta - \eta$, получаем, что условие (4.24) равносильно условию $f(x) \in U(\beta, \varepsilon)$,

---

*) В случае $b = +\infty$ проколотая окрестность $(\eta, +\infty)$ причисляется к односторонним проколотым окрестностям.

ибо $f(x) \leqslant \beta$. Если же $\beta = +\infty$, то условие (4.24) равносильно условию $f(x) \in U(+\infty, \eta)$.

Таким образом, для любой окрестности $U(\beta)$ существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(b)$, что для любой точки $x \in \mathring{U}(b)$ имеет место $f(x) \in U(\beta)$. Это и означает, что

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = \beta = \sup_{(a,\, b)} f(x).$$

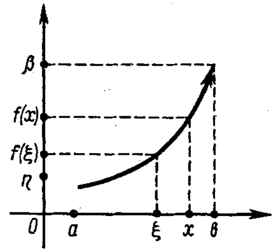

Рис. 18

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \inf\limits_{(a,\, b)} f(x)$. $\square$

Доказательство следствия. Пусть для определенности функция f возрастает на интервале (a, b). Тогда какова бы ни была точка $x_0 \in (a, b)$, для всех $x' \in (a, x_0)$ и всех $x'' \in (x_0, b)$ будет справедливо неравенство $f(x') \leqslant f(x_0) \leqslant f(x'')$, т. е. функция f ограничена сверху на интервале (a, x_0) и снизу на интервале (x_0, b) числом $f(x_0)$. Следовательно,

$$\sup_{(a,\, x_0)} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \inf_{(x_0,\, b)} f(x).$$

В частности, указанные верхняя и нижняя грани конечны. Этим следствие доказано, так как согласно теореме

$$f(x_0 - 0) = \sup_{(a,\, x_0)} f(x),\ f(x_0 + 0) = \inf_{(x_0,\, b)} f(x). \ \square$$

4.11. КРИТЕРИЙ КОШИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

Как и в случае предела последовательности, получим необходимое и достаточное условие того, что функция имеет предел в точке a, не используя самого значения предела, а в терминах лишь значений самой функции в проколотой окрестности точки a.

Теорема 6 (критерий Коши). *Для того чтобы функция f имела в точке a конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a, \delta)$ точки a, что для любых $x' \in \mathring{U}(a, \delta)$ и $x'' \in \mathring{U}(a, \delta)$ выполнялось бы неравенство*

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

Доказательство необходимости. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \in \boldsymbol{R}$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует проколотая окрестность $\mathring{U}(a, \delta)$ точки a такая, что для каждого $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ справедливо неравенство

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.25}$$

Пусть $x' \in \mathring{U}(a, \delta)$ и $x'' \in \mathring{U}(a, \delta)$, тогда в силу (4.25) получим:

$$|f(x'')-f(x')| = |[f(x'')-A]+[A-f(x'')]| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x'')-A|+|f(x')-A| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \square$$

Доказательство достаточности. Пусть функция f такова, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a, \delta)$, что для всех

$$x' \in \mathring{U}(a, \delta), \; x'' \in \mathring{U}(a, \delta) \tag{4.26}$$

выполняется неравенство

$$|f(x'')-f(x')| < \varepsilon. \tag{4.27}$$

Прежде всего из этого условия следует, что функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ точки a. Можно, например, взять $\varepsilon = 1$, тогда функция f и будет определена в соответствующей ему в силу сформулированного условия проколотой окрестности.

Проверим, что функция f имеет в точке a предел. Возьмем какую-либо последовательность $x_n \in \mathring{U}(a)$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \tag{4.28}$$

и произвольно зададим $\varepsilon > 0$. Для этого ε существует проколотая окрестность $\mathring{U}(a, \delta)$, удовлетворяющая условиям (4.26) — (4.27). В силу условия (4.28) для соответствующей обычной окрестности $U(a, \delta)$ существует такое $n_0 \in N$, что при всех $n \geqslant n_0$, $n \in N$, имеет место $x_n \in U(a, \delta)$. Но $x_n \in \mathring{U}(a)$, следовательно, $x_n \neq a$, $n \in N$. Поэтому x_n принадлежат не только обычной окрестности $U(a, \delta)$, но и соответствующей проколотой: $x_n \in \mathring{U}(a, \delta)$, $n \geqslant n_0$. Отсюда в силу условий (4.26) — (4.27) для всех $n \geqslant n_0$ и $m \geqslant n_0$ получим:

$$|f(x_n)-f(x_m)| < \varepsilon,$$

т. е. последовательность $\{f(x_n)\}$ удовлетворяет условиям критерия Коши для последовательностей и, следовательно, сходится (см. п. 3.7).

Таким образом, для каждой последовательности $x_n \in \mathring{U}(a)$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющей условию (4.28) последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится. Отсюда, как известно (см. лемму п. 4.6), следует существование конечного предела $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. $\square$

В случае, если $a = x_0$ является числом, то условие Коши можно перефразировать следующим образом.

Для любого $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что для любых* x' *и* x'', *удовлетворяющих условиям* $|x' - x_0| < \delta$, $|x'' - x_0| < \delta$, $x' \neq x_0$, $x'' \neq x_0$, *выполняется неравенство* $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

В случае же, когда $a = \infty$, условию Коши можно придать следующий вид.

Для любого $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что для любых* x' *и* x'', *удовлетворяющих неравенствам* $|x'| > \delta$, $|x''| > \delta$, *выполняется неравенство* $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Следует отметить, что эти два критерия существования предела функции, относящиеся к разным случаям и имеющие разную формулировку, благодаря удачно выбранной терминологии (понятию окрестности) получили единое доказательство.

Для случая односторонних пределов*) условие Коши можно перефразировать без терминов окрестности следующим образом: *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* η ($\eta < a$ *в случае предела слева и* $\eta > a$ *в случае предела справа*), *что для любых* x' *и* x'', *удовлетворяющих условию* $\eta < x' < a$, $\eta < x'' < a$, *или, соответственно, условию* $a < x' < \eta$, $a < x'' < \eta$, *выполняется неравенство* $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

§ 5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

5.1. ТОЧКИ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИЙ

Определение 1. *Функция* f, *определенная в некоторой окрестности* $U(x_0)$ *точки* x_0, *называется непрерывной в этой точке* (*или, что то же, при* $x = x_0$), *если*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{5.1}$$

Подчеркнем, что если функция f непрерывна в некоторой точке, то согласно данному определению она определена в некоторой окрестности этой точки (обычной, а не проколотой, как это было в случае определения предела функции). В дальнейшем (см. п. 19.3) будет дано обобщение понятия непрерывности функции в точке, в котором не будет предполагаться, что функция определена в некоторой окрестности этой точки.

Согласно определению предела функции в точке в терминах последовательностей (см. п. 4.4) определение непрерывности функции в точке x_0 равносильно тому, что для любой последовательности $x_n \in U(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0, \tag{5.2}$$

---

*) Мы, естественно, причисляем понятие предела функции при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ к понятию одностороннего предела.