Для любого $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что для любых* x' *и* x'', *удовлетворяющих условиям* $|x' - x_0| < \delta$, $|x'' - x_0| < \delta$, $x' \neq x_0$, $x'' \neq x_0$, *выполняется неравенство* $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

В случае же, когда $a = \infty$, условию Коши можно придать следующий вид.

Для любого $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что для любых* x' *и* x'', *удовлетворяющих неравенствам* $|x'| > \delta$, $|x''| > \delta$, *выполняется неравенство* $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Следует отметить, что эти два критерия существования предела функции, относящиеся к разным случаям и имеющие разную формулировку, благодаря удачно выбранной терминологии (понятию окрестности) получили единое доказательство.

Для случая односторонних пределов*) условие Коши можно перефразировать без терминов окрестности следующим образом: *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* η ($\eta < a$ *в случае предела слева и* $\eta > a$ *в случае предела справа*), *что для любых* x' *и* x'', *удовлетворяющих условию* $\eta < x' < a$, $\eta < x'' < a$, *или, соответственно, условию* $a < x' < \eta$, $a < x'' < \eta$, *выполняется неравенство* $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

§ 5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

5.1. ТОЧКИ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИЙ

Определение 1. *Функция* f, *определенная в некоторой окрестности* $U(x_0)$ *точки* x_0, *называется непрерывной в этой точке* (*или, что то же, при* $x = x_0$), *если*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{5.1}$$

Подчеркнем, что если функция f непрерывна в некоторой точке, то согласно данному определению она определена в некоторой окрестности этой точки (обычной, а не проколотой, как это было в случае определения предела функции). В дальнейшем (см. п. 19.3) будет дано обобщение понятия непрерывности функции в точке, в котором не будет предполагаться, что функция определена в некоторой окрестности этой точки.

Согласно определению предела функции в точке в терминах последовательностей (см. п. 4.4) определение непрерывности функции в точке x_0 равносильно тому, что для любой последовательности $x_n \in U(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0, \tag{5.2}$$

---

*) Мы, естественно, причисляем понятие предела функции при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ к понятию одностороннего предела.

последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0). \tag{5.3}$$

Понятие непрерывности функции, сформулированное в терминах последовательностей, отражает собой обстоятельство, обычно встречающееся на практике и состоящее в том, что при косвенном измерении некоторой величины y с помощью параметра x, от которого эта величина y непрерывно зависит: $y=f(x)$, мы имеем объективную уверенность, что чем точнее мы будем получать (вследствие каких-либо экспериментов, измерений или расчетов) последовательно значения x_n, $n=1, 2, \ldots$ аргумента x, тем точнее будут получаться и соответствующие значения $y_n = f(x_n)$ величины y.

Согласно же определению предела функции в точке на языке ε и δ (см. п. 4.5), условие (5.1) равносильно условию: для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$|x-x_0|<\delta, \tag{5.4}$$

выполняется неравенство (рис. 19)

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon. \tag{5.5}$$

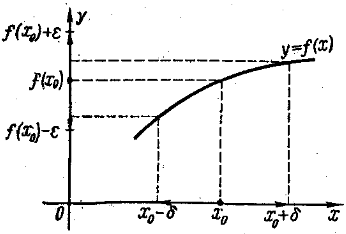

Рис. 19

Отметим, что в определении непрерывности (5.2) — (5.3) вместо проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$, как это было при определении предела в п. 4.4, была взята обычная окрестность $U(x_0)$, а в определении непрерывности (5.4) — (5.5) было сделано равносильное изменение: отброшено условие $x \neq x_0$. Дело в том, что в случае, когда предел функции в точке равен значению функции в этой точке, определение предела оказывается равносильным, брать ли обычные или проколотые окрестности или, что то же самое, требовать или нет выполнения условия $x \neq x_0$. Например, в случае (5.4) — (5.5) добавление значения $x=x_0$ ничего не меняет, так как и условие (5.4) и условие (5.5) выполняются при $x=x_0$ для любого $\delta>0$ и любого $\varepsilon>0$:

$$|x_0-x_0|=0<\delta, \quad |f(x_0)-f(x_0)|=0<\varepsilon.$$

Упражнение 1. Доказать, что если в определении предела функции f в точке x_0 в смысле п. 4.4 заменить проколотую окрестность на обычную или в соответствующем определении п. 4.5 отбросить условие $x \neq x_0$, то получится определение, эквивалентное определению непрерывности функции f в точке x_0.

Например, доказать, если функция f определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и если существует число A, обладающее свойством, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$, то функция f непрерывна в точке x_0 и $A=f(x_0)$. Обратно, если функция f непрерывна в точке x_0, т. е. имеет место (5.1), где предел понимается в смысле § 4 и, следовательно требуется, что $x \neq x_0$, то число $A = f(x_0)$ обладает вышеуказанным свойством.

Определение непрерывности функции f в точке x_0 можно еще перефразировать так: функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если, какова бы ни была заданная степень точности $\varepsilon > 0$ для значений функции, существует такая степень точности для аргумента $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что коль скоро мы выберем значение аргумента x, равное x_0 с точностью δ, т. е. удовлетворяющее неравенству (5.4), и возьмем в нем значение функции f, то мы получим значение $f(x_0)$ с заданной степенью точности, т. е. будет выполнено неравенство (5.5).

Как и в случае определения предела, определение непрерывности функции в точке можно дать на языке окрестностей (см. условия (4.6)).

Функция f непрерывна в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in U(x_0, \delta)$ имеем $f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$; иначе говоря, если для любой окрестности $U(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что выполняется включение

$$f(U(x_0)) \subset U(y_0). \tag{5.6}$$

Наконец, перенося $f(x_0)$ в равенстве (5.1) в левую часть, внося $f(x_0)$ под знак предела и замечая, что обозначение $x \to x_0$ при пределе функции равносильно обозначению $x - x_0 \to 0$, получаем

$$\lim_{x - x_0 \to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0. \tag{5.7}$$

Разность $x - x_0$ называется *приращением аргумента* и обозначается Δx, а разность $f(x) - f(x_0)$ — *приращением функции*, соответствующим данному приращению аргумента Δx, и обозначается Δy; таким образом,

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \tag{5.8}$$

В этих обозначениях равенство (5.7) перепишется в виде

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \tag{5.9}$$

т. е. говоря описательно, непрерывность функции в точке означает, что бесконечно малому приращению агрумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Примеры. 1. Функция $f(x) = c$, где c — постоянная, непрерывна на всей числовой прямой. В самом деле, для любого $x_0 \in \boldsymbol{R}$ имеет место

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c = f(x_0). \ \square$$

2. Покажем, что функция $f(x)=\frac{1}{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0\neq 0$. В самом деле,

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}=-\frac{\Delta x}{(x_0+\Delta x)\,x_0},$$

откуда при $x_0\neq 0$ имеем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{(x_0+\Delta x)\,x_0}=-\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(x_0+\Delta x)\,x_0}=\frac{0}{x_0}=0,$$

что и означает, согласно (5.9), непрерывность функции $f(x)=1/x$ в точке x_0.

3. Покажем, что функция $f(x)=|\operatorname{sign} x|$ (см. рис. 13) не является непрерывной в точке $x_0=0$. Действительно, $\lim\limits_{x\to 0}|\operatorname{sign} x|=1$, и этот предел не совпадает со значением $|\operatorname{sign} 0|=0$.

Упражнения. 2. Выяснить, с какой степенью точности достаточно взять значение аргумента функции x^3 в данной точке x_0, чтобы получить значение функции с заданной степенью точности $\varepsilon>0$.

3. Выяснить, будет ли функция

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$$

непрерывной в точке $x=0$.

Определение 2. *Пусть теперь функция f определена на интервале (a, b), кроме, быть может, точки $x_0\in(a, b)$.*

Точка x_0 называется точкой разрыва функции f, если функция f не определена в точке x_0, или если она определена в этой точке, но не является в ней непрерывной.

Упражнение 4. Сформулировать в позитивном смысле определение точки разрыва функции.

Определение 3. *Если x_0 — точка разрыва функции f и существуют конечные пределы*

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)\quad и\quad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x),$$

то точка x_0 называется точкой разрыва первого рода. Величина $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется скачком функции f в точке x_0. Если $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, то x_0 называется точкой устранимого разрыва.

Последнее оправдано тем, что если в этом случае видоизменить или доопределить (если функция f была не определена в точке x_0) функцию f, положив

$$f(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=\lim_{x\to x_0-0}f(x),$$

то получится непрерывная в точке x_0 функция.

Точка разрыва функции f, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется точкой разрыва второго рода.

Очевидно, что в точках разрыва второго рода по крайней мере один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ не существует. (Здесь под пределом, как обычно, понимается лишь конечный предел.)

Упражнение 5. Сформулировать в позитивном смысле определение точки разрыва второго рода.

Функция $f(x)=\operatorname{sign} x$ (см. рис. 16) имеет в точке $x_0=0$ разрыв первого рода, а функции $f(x)=\frac{1}{x}$ и $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ в точке $x_0=0$ имеют разрывы второго рода. Всякая функция, монотонная на некотором интервале, может иметь только точки разрыва первого рода (см. следствие теоремы 5 п. 4.10).

Определение 4. *Пусть функция f определена на левосторонней окрестности точки x_0, т. е. на полуинтервале вида $(a, x_0]$. Функция f называется непрерывной слева в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$.*

Пусть функция f определена на правосторонней окрестности точки x_0, т. е. на полуинтервале вида $[x_0, b)$. Функция f называется непрерывной справа в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

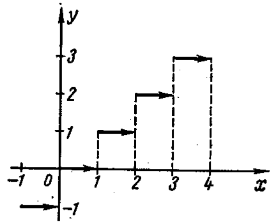

Рис. 20

Пример. Рассмотрим функцию, определенную на всей числовой оси и для каждого числа x равную наибольшему целому числу, меньшему или равному x. Эта функция имеет специальное обозначение $y=[x]$, читается «y является целой частью числа x» или «y равно entier x *)». Ее график изображен на рис. 20. Функция $[x]$ в точках $x=n$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ непрерывна справа и разрывна слева; во всех же других точках она непрерывна как справа, так и слева, таким образом, в частности, $[x]$ непрерывна справа во всех точках.

5.2. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ В ТОЧКЕ

Теорема 1. *Если функции f и g непрерывны в точке x_0, то функции cf (c — постоянное), $f+g$, fg, а если, кроме того, $g(x_0)\neq 0$, то и функция f/g также непрерывны в точке x_0.*

Эта теорема вытекает непосредственно из определения непрерывности и свойств пределов функций (см. п. 4.7). Докажем, например, непрерывность функции fg. Согласно свойству (4.16),

*) Entier — целый (франц.).

имеем

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) g(x_0) \tag{5.10}$$

ибо пределы $\lim_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim_{x \to x_0} g(x)$ существуют и в силу непрерывности f и g в точке x_0 равны соответственно $f(x_0)$ и $g(x_0)$. Выполнение равенства (5.10) и означает наличие непрерывности функции fg в точке x_0. □

Теорема 2. *Пусть функция $y = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0 = \varphi(x_0)$, тогда сложная функция $f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.*

Короче, но менее точно: непрерывная функция от непрерывной функции является непрерывной функцией.

Следует обратить внимание на то, что в теореме утверждается непрерывность сложной функции $f[\varphi(x)]$ в точке x_0, а поскольку непрерывность функции в некоторой точке предполагает согласно определению 1 из п. 5.1, что функция определена в какой-то окрестности этой точки, то в теореме тем самым утверждается также, что функция $f[\varphi(x)]$ при сделанных предположениях определена в некоторой окрестности точки x_0.

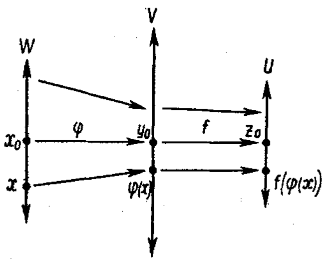

Рис. 21

Доказательство. Пусть $z_0 = f(y_0)$ и фиксирована произвольным образом окрестность $U(z_0)$ точки z_0. Тогда в силу непрерывности функции f в точке y_0 существует такая окрестность $V(y_0)$ точки y_0, что, если

$$y \in V(y_0), \tag{5.11}$$

то функция f определена в этой точке y и

$$f(y) \in U(z_0). \tag{5.12}$$

Далее, для полученной окрестности $V(y_0)$ в силу непрерывности функции φ в точке x_0 существует такая окрестность $W(x_0)$, что, если $x \in W(x_0)$, то функция φ определена в этой точке x и $\varphi(x) \in V(y_0)$.

Следовательно, для этой точки определена и функция $f[\varphi(x)]$, причем выполняется включение (5.11), где $y = \varphi(x)$, а значит и (5.12), которое для рассматриваемого случая имеет вид $f[\varphi(x)] \in U(z_0)$ (рис. 21). Это и означает непрерывность сложной функции $f \circ \varphi$ в точке x_0. □

Утверждение теоремы можно записать в виде формулы

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f\left[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)\right], \tag{5.13}$$

из которой видно, что *операция предельного перехода перестановочна с операцией взятия непрерывной функции.*

В самом деле, левая часть равенства (5.13) равна $f[\varphi(x_0)]$ согласно утверждению теоремы, правая часть также равна $f[\varphi(x_0)]$ в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке x_0.

При отыскании пределов непрерывных функций теорему 2 удобно использовать еще в одном виде, в виде следующего правила.

Правило замены переменной для пределов непрерывных функций: пусть функция $y=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0=\varphi(x_0)$, тогда

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{y\to y_0} f(y),\quad y=\varphi(x).$$

Теорема 2 естественным образом переносится и на случай односторонней непрерывности (сформулируйте ее в этом случае).

Упражнения. 6. Доказать, что если для функции $x=\varphi(t)$ существует предел $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=x_0$, а функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, то в некоторой проколотой окрестности точки t_0 имеет смысл композиция $f[\varphi(t)]$ и существует

$$\lim_{t\to t_0} f[\varphi(t)] = f(x_0).$$

7. Сформулировать и доказать правила замены переменных для односторонних пределов функций.

§ 6. СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

6.1. ОГРАНИЧЕННОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ. ДОСТИЖЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Определение 1. *Функция, определенная на отрезке $[a, b]$ и непрерывная в каждой его точке, называется непрерывной на этом отрезке.*

При этом под непрерывностью в точке a понимается непрерывность справа, а под непрерывностью в точке b — непрерывность слева.

Аналогично определяется и непрерывность функции на промежутке любого другого вида.

Будем говорить, что функция f, определенная на множестве E, достигает на нем своей верхней (нижней) грани $\beta=\sup\limits_E f$ $(\alpha=\inf\limits_E f)$, если существует такая точка $x_0\in E$, что $f(x_0)=\beta$ $(f(x_0)=\alpha)$.

Теорема 1 (Вейерштрасс). *Всякая непрерывная на отрезке функция ограничена и достигает на нем своей верхней грани и своей нижней грани.*