из которой видно, что *операция предельного перехода перестановочна с операцией взятия непрерывной функции.*

В самом деле, левая часть равенства (5.13) равна $f[\varphi(x_0)]$ согласно утверждению теоремы, правая часть также равна $f[\varphi(x_0)]$ в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке x_0.

При отыскании пределов непрерывных функций теорему 2 удобно использовать еще в одном виде, в виде следующего правила.

Правило замены переменной для пределов непрерывных функций: пусть функция $y=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0=\varphi(x_0)$, тогда

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{y\to y_0} f(y), \quad y=\varphi(x).$$

Теорема 2 естественным образом переносится и на случай односторонней непрерывности (сформулируйте ее в этом случае).

Упражнения. 6. Доказать, что если для функции $x=\varphi(t)$ существует предел $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=x_0$, а функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, то в некоторой проколотой окрестности точки t_0 имеет смысл композиция $f[\varphi(t)]$ и существует

$$\lim_{t\to t_0} f[\varphi(t)] = f(x_0).$$

7. Сформулировать и доказать правила замены переменных для односторонних пределов функций.

§ 6. СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

6.1. ОГРАНИЧЕННОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ. ДОСТИЖЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Определение 1. *Функция, определенная на отрезке $[a, b]$ и непрерывная в каждой его точке, называется непрерывной на этом отрезке.*

При этом под непрерывностью в точке a понимается непрерывность справа, а под непрерывностью в точке b — непрерывность слева.

Аналогично определяется и непрерывность функции на промежутке любого другого вида.

Будем говорить, что функция f, определенная на множестве E, достигает на нем своей верхней (нижней) грани $\beta=\sup\limits_E f$ $(\alpha=\inf\limits_E f)$, если существует такая точка $x_0\in E$, что $f(x_0)=\beta$ $(f(x_0)=\alpha)$.

Теорема 1 (Вейерштрасс). *Всякая непрерывная на отрезке функция ограничена и достигает на нем своей верхней грани и своей нижней грани.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и пусть

$$M = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x);$$

M, как и всякая верхняя грань непустого множества чисел, может быть либо конечной, либо бесконечной, равной $+\infty$. Покажем, что $M < +\infty$ и что существует такая точка $x_0 \in [a, b]$, что $f(x_0) = M$.

Выберем какую-либо последовательность таких чисел a_n, $n = 1, 2, \ldots$, что

$$\lim_{n \to \infty} a_n = M, \quad a_n < M, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{6.1}$$

Согласно определению верхней грани функции, для каждого a_n, $n = 1, 2, \ldots$, существует такая точка $x_n \in [a, b]$, что

$$f(x_n) > a_n, \; n = 1, 2, \ldots. \tag{6.2}$$

С другой стороны, поскольку M — верхняя грань функции f, то для всех точек $x \in [a, b]$ справедливо неравенство

$$f(x) \leqslant M. \tag{6.3}$$

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена: $a \leqslant x_n \leqslant b$, $n = 1, 2, \ldots$, поэтому по теореме Больцано — Вейерштрасса (см. п.3.6) из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0. \tag{6.4}$$

Поскольку $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$, $k = 1, 2, \ldots$, то (почему?) и $a \leqslant x_0 \leqslant b$.

Из неравенств (6.2) и (6.3) следует, что для всех $k = 1, 2, \ldots$ справедливы неравенства

$$a_{n_k} < f(x_{n_k}) \leqslant M. \tag{6.5}$$

Предел всякой подпоследовательности последовательности, имеющей конечный или бесконечный предел, равен пределу всей последовательности; поэтому из (6.1) имеем $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = M$. Переходя в (6.5) к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = M. \tag{6.6}$$

С другой стороны, в силу непрерывности функции f на отрезке $[a, b]$ она непрерывна в точке x_0 этого отрезка и, следовательно, из (6.4) следует, что

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0). \tag{6.7}$$

Из (6.6) и (6.7) получаем $M = f(x_0)$.

Таким образом, доказано, что верхняя грань M функции f совпадает со значением функции в точке x_0 и, следовательно, конечна. Тем самым функция f ограничена сверху и ее верхняя грань достигается в точке $x_0 \in [a, b]$.

Аналогично доказывается, что непрерывная на отрезке функция ограничена снизу и достигает на нем своей нижней грани. □

Теорема, аналогичная теореме 1, несправедлива для промежутков, не являющихся отрезками; в этом легко убедиться, построив соответствующие примеры. Например, функция $y = 1/x$ непрерывна в каждой точке интервала $(0; 1)$ и вместе с тем неограничена на нем; функция $y = x$ непрерывна на всей вещественной оси и неограничена на ней.

Отметим еще, что если функция f непрерывна не на отрезке, а на промежутке другого типа и даже, кроме того, ограничена на нем, она, вообще говоря, не имеет наибольшего и наименьшего значения. Например, функции $y = x$ на интервале $(0; 1)$ и $y = \operatorname{arctg} x$ на всей вещественной прямой, хотя они непрерывны (непрерывность функции $y = \operatorname{arctg} x$ будет доказана в п. 7.3) и ограничены в указанных промежутках, не достигают своих верхних и нижних граней.

Упражнение 1. Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(x) > 0$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда существует такое $c > 0$, что $f(x) > c$ для всех $x \in [a, b]$.

6.2. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема 2 (Больцано — Коши). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$, то для любого C, заключенного между A и B, существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что $f(\xi) = C$.*

Иначе говоря, *непрерывная на отрезке функция, принимая какие-либо два значения, принимает и любое лежащее между ними значение.*

Доказательство. Пусть для определенности $f(a) = A < B = f(b)$ и $A < C < B$. Разделим отрезок $[a, b]$ точкой x_0 на два равных по длине отрезка, тогда либо $f(x_0) = C$ и, значит, искомая точка $\xi = x_0$ найдена, либо $f(x_0) \neq C$, и тогда на концах одного из полученных отрезков функция f принимает значения, лежащие по разные стороны от числа C, точнее — на левом конце значение, меньшее C, на правом — большее.

Обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$ и разделим его снова на два равных по длине отрезка и т. д. В результате либо через конечное число шагов придем к искомой точке ξ, в которой $f(\xi) = C$, либо получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, по длине стремящихся к нулю и таких, что

$$f(a_n) < C < f(b_n). \tag{6.8}$$

Пусть ξ — общая точка всех отрезков $[a_n, b_n]$, $n=1, 2, \ldots$ (см. п. 2.10). Как мы знаем (см. (3.9)), $\xi=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Поэтому в силу непрерывности функции f

$$f(\xi)=\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty} f(b_n). \tag{6.9}$$

Из (6.8) же получим (см. п. 3.3)

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)\leqslant C\leqslant \lim_{n\to\infty} f(b_n). \tag{6.10}$$

Из (6.9) и (6.10) следует, что $f(\xi)=C$. □

Следствие 1. *Если функция непрерывна на отрезке и на его концах принимает значения разного знака, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка, в которой функция обращается в ноль.*

Это следствие — частный случай теоремы (рис. 22).

Следствие 2. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $M=\sup f$, $m=\inf f$. Тогда функция f принимает все значения из отрезка $[m, M]$ и только эти значения.*

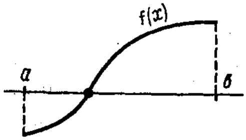

Рис. 22

Для доказательства заметим, что если

$$M=\sup_{[a,\, b]} f,\quad m=\inf_{[a,\, b]} f, \text{ то } m\leqslant f(x)\leqslant M$$

и, согласно теореме 1, существуют такие точки $\alpha\in[a, b]$ и $\beta\in[a, b]$, что $f(\alpha)=m$, $f(\beta)=M$. Теперь рассматриваемое следствие непосредственно вытекает из теоремы 2, примененной к отрезку $[\alpha, \beta]$, если $\alpha\leqslant\beta$, или соответственно к отрезку $[\beta, \alpha]$, если $\beta<\alpha$.

Таким образом, *множество всех значений функции, заданной и непрерывной на некотором отрезке, представляет собой также отрезок.*

Отметим, что свойство непрерывных функций принимать все промежуточные значения справедливо для любого промежутка (конечного или бесконечного). Именно: если непрерывная на некотором промежутке функция принимает в двух его точках a и b, причем $a<b$, два каких-то значения, то она принимает и любое промежуточное. В самом деле, согласно теореме 2, рассматриваемая функция заведомо принимает указанное значение в некоторой точке отрезка $[a, b]$, который является частью исходного промежутка.

З а м е ч а н и е. Как в теореме 1, так и в теореме 2 было доказано существование точки на данном отрезке, в которой значение рассматриваемой непрерывной функции обладает определенным свойством (в первой теореме в этой точке достигается экстремальное значение, во второй — принимается заданное промежуточное значение). Однако между методами, примененными для доказательства этих утверждений, имеется принципиальное различие. Метод доказательства теоремы 2 дает возможность не только доказать в общем случае существование указанной точки, но и фактически найти ее с любой заданной степенью точности для каждой конкретной функции: нужно разделить отрезок, на котором ищется точка, достаточное число раз пополам, выбирая каждый раз половину согласно правилу, указанному при доказательстве; концы получившегося отрезка и будут приближенными значениями указанной точки.

Метод же доказательства теоремы 1 не позволяет указать способ, с помощью которого для каждой непрерывной на отрезке функции можно было бы найти точки, в которых она принимает экстремальные значения. Это обусловлено тем, что доказательство этой теоремы основано на теореме Больцано — Вейерштрасса, утверждающей лишь возможность выделения из каждой ограниченной последовательности сходящейся подпоследовательности. Конкретного метода, или, как это принято говорить, *алгоритма*, для выделения из любой ограниченной последовательности сходящейся подпоследовательности не существует.

Заметим еще, что при использовании какого-либо алгоритма на практике важно, как быстро он приводит к цели. С этой точки зрения при приближенном решении уравнения $f(x)=0$ обычно применяется не метод последовательного деления отрезка пополам, а другие алгоритмы, быстрее приводящие к цели (см. Добавление в конце второго тома, § 60).

Задача 6. Доказать, что периодическая непрерывная на всей числовой оси функция, отличная от постоянной, имеет наименьший период. Привести пример периодической функции, определенной на всей числовой оси и отличной от постоянной, которая не имеет наименьшего периода.

6.3. ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ

Определение 2. *Функция f, определенная на числовом множестве E, называется строго возрастающей (строго убывающей), если для любых двух чисел $x_1 \in E$ и $x_2 \in E$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$).*

Функция, строго возрастающая или строго убывающая, называется строго монотонной.

Если функция является строго возрастающей (убывающей) на множестве E, то будем также говорить, что она строго возрастает (убывает) на этом множестве.

Очевидно, что строго монотонная (возрастающая, убывающая) функция является и просто монотонной (соответственно возрастающей, убывающей) функцией в смысле определения 9 из п. 4.10.

Лемма 1. *Пусть функция f строго возрастает (убывает) на некотором множестве $X \subset \boldsymbol{R}$ и пусть Y — множество ее значений.*

Тогда обратная функция f^{-1} (*см.* п. 1.2*) *является однозначной строго возрастающей (убывающей) функцией на множестве* Y.

Доказательство. Пусть для определенности функции f строго возрастает на множестве X. Докажем, что обратная функция однозначна.

Допустим противное. Пусть существует такая точка $y \in Y$, что множество $f^{-1}(y)$ содержит по крайней мере две различных точки x_1 и x_2:

$$x_1 \in f^{-1}(y) \text{ и } x_2 \in f^{-1}(y), \ x_1 \neq x_2,$$

и, следовательно,

$$f(x_1) = f(x_2). \tag{6.11}$$

Для двух чисел x_1 и x_2, $x_1 \neq x_2$ справедливо одно из двух неравенств: $x_1 < x_2$ или $x_1 > x_2$; в первом случае в силу строгого монотонного возрастания функции f имеем $f(x_1) < f(x_2)$, а во втором $f(x_1) > f(x_2)$, т. е. в обоих случаях равенство (6.11) не выполняется. Таким образом, для каждого $y \in Y$ множество $f^{-1}(y)$ состоит в точности из одной точки, т. е. функция f^{-1} однозначна.

Докажем теперь, что функция f^{-1} строго возрастает на множестве Y. Пусть

$$y_1 < y_2, \ y_1 \in Y, \ y_2 \in Y \tag{6.12}$$

и пусть $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Следовательно, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Для любых двух чисел x_1 и x_2 справедливо одно из трех соотношений: либо $x_1 > x_2$, либо $x_1 = x_2$, либо $x_1 < x_2$. Если $x_1 > x_2$ или $x_1 = x_2$, то соответственно было бы $y_1 > y_2$ (в силу строго монотонного возрастания функции f) или $y_1 = y_2$ (в силу однозначности), что противоречило бы неравенству (6.12). Таким образом, из неравенства (6.12) следует, что $x_1 < x_2$, а это и означает строгое возрастание функции f^{-1} на множестве Y.

В случае строго убывающей на множестве функции f доказательство можно либо провести аналогичным образом, либо свести к уже рассмотренному случаю рассмотрением функции $-f$, ибо когда функция f строго убывает на множестве X, функция $-f$ строго возрастает на этом множестве. $\square$

Теорема 3. *Пусть функция f определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда обратная функция f^{-1} определена, однозначна, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$ (рис.23).*

Доказательство. Проведем доказательство теоремы для строго возрастающих функций. Пусть $c = f(a)$, $d = f(b)$.

Покажем, что областью определения обратной функции f^{-1} является сегмент $[c, d]$, или, что то же, $[c, d]$ является множеством значений функции f. В самом деле, из монотонного возрастания функции f следует, что $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$, т. е. что $f(x) \in [c, d]$ для любого $x \in [a, b]$. С другой стороны, каково бы ни было $y \in [c, d]$, т. е. $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, согласно теореме 2 существует такая точка $x \in [a, b]$, что $f(x) = y$. Таким образом, все значения заданной функции f лежат на отрезке $[c, d]$, и каждая точка этого отрезка является значением функции f в некоторой точке. Это и означает, что отрезок $[c, d]$ является множеством значений функции f.

Отметим, что это утверждение следует также и из следствия 2 теоремы 2, если заметить, что в данном случае

$$c = \min_{[a, b]} f(x), \quad d = \max_{[a, b]} f(x).$$

В силу леммы функция f^{-1} однозначна и строго возрастает на отрезке $[c, d]$.

Покажем, наконец, что функция f^{-1} непрерывна на $[c, d]$. Пусть $y_0 \in [c, d]$ и $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Пусть $c < y_0 < d$, т. е. y_0 — внутренняя точка отрезка $[c, d]$, тогда в силу строгого возрастания функции f^{-1} и $a < x_0 < b$. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Не ограничивая общности дальнейших рассуждений, можно считать (почему?), что ε таково, что

$$a \leqslant x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon \leqslant b. \qquad (6.13)$$

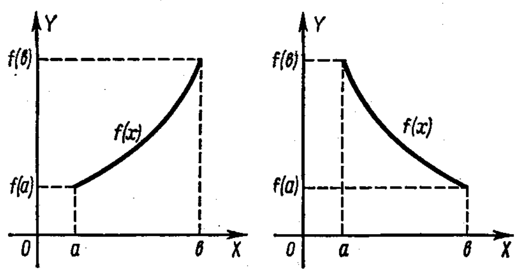

Рис. 23

Пусть $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Тогда из условия (6.13) в силу строгого возрастания функции f следует, что

$$c \leqslant y_1 < y_0 < y_2 \leqslant d.$$

Возьмем $\delta > 0$ так, чтобы $y_1 \leqslant y_0 - \delta < y_0 + \delta \leqslant y_2$ (рис. 24). Если теперь выбрать y так, что $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$, то тем более

$$y_1 < y < y_2,$$

и, следовательно, в силу строгого возрастания функции f^{-1} справедливо неравенство

$$x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_0 + \varepsilon.$$

Таким образом, для $\varepsilon > 0$ указано такое $\delta > 0$, что для всех $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ выполняется неравенство

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon,$$

т. е. функция f^{-1} непрерывна в точке y_0. Если теперь $y_0 = c$ или $y_0 = d$, то аналогичными рассуждениями доказывается, что функция f^{-1} непрерывна справа в точке c и непрерывна слева в точке d.

Теорема для строго возрастающих функций доказана полностью.

Напомним, что функция f строго убывает тогда и только тогда, когда функция $-f$ строго возрастает, поэтому справедливость теоремы для строго убывающих функций следует из рассмотренного случая. $\square$

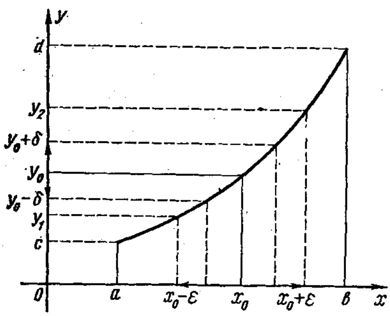

Рис. 24

Рассмотрим теперь случай функции, определенной на интервале.

Теорема 4. *Пусть функция f определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на интервале (a, b) (конечном или бесконечном) и пусть*

$$c=\lim_{x\to a+0} f(x), \quad d=\lim_{x\to b-0} f(x).$$

Тогда обратная функция f^{-1} определена, однозначна, строго возрастает (убывает) и непрерывна на интервале (конечном или бесконечном) с концами c и d (рис. 25).

При этом в случае, когда $a=-\infty$ под $\lim\limits_{x\to-\infty+0} f(x)$ понимается предел $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, а в случае $b=+\infty$ под пределом $\lim\limits_{x\to+\infty-0} f(x)$ — предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Доказательство. Пусть для определенности функция f строго возрастает в интервале (a, b). Покажем, что в этом случае множеством ее значений является интервал (c, d). Действительно, согласно теореме о пределах монотонных функций (см. п. 4.10) имеем: $c=\inf\limits_{(a,b)} f$, $d=\sup\limits_{(a,b)} f$ и, следовательно, для любого $x\in(a, b)$ справедливо неравенство $c\leqslant f(x)\leqslant d$. Более того, для всех $x\in(a, b)$ выполняются еще неравенства $f(x)\neq c$, $f(x)\neq d$. В самом деле, если бы, например, существовало такое x_0, что $a<x_0<b$ и $f(x_0)=c$ (это, очевидно, возможно только тогда, когда нижняя грань c конечна), то при $a<x<x_0$ выполнялось бы неравенство $f(x)<f(x_0)=c$, что противоречило бы тому, что $c=\inf f$. Итак, для всех $x\in(a, b)$ выполняются неравенства $c<f(x)<d$. С другой стороны, поскольку $c=\inf\limits_{(a,b)} f$, $d=\sup\limits_{(a,b)} f$, то для любого y, $c<y<d$, существуют такие $x_1\in(a, b)$ и $x_2\in(a, b)$, что $y_1=f(x_1)$ и $y_2=f(x_2)$ удовлетворяют неравенствам

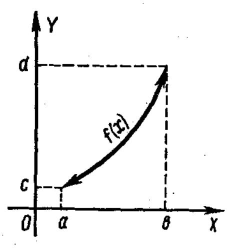

Рис. 25

$$c<y_1<y<y_2<d.$$

Отсюда следует, что $x_1 < x_2$ *), и поскольку $f(x_1)=y_1$ и $f(x_2)=y_2$, то по теореме Больцано — Коши о промежуточных значениях непрерывных функций существует такая точка $x \in [x_1, x_2]$, что $f(x)=y$. Таким образом, для любой точки $y \in (c, d)$ существует такая точка $x \in (a, b)$, что $f(x)=y$.

Тем самым доказано, что действительно множеством значений функции f, или, что то же, множеством определения обратной функции f^{-1}, является интервал (c, d). То, что функция f^{-1} однозначна и строго монотонно возрастает в интервале (c, d), следует из леммы. Ее непрерывность доказывается дословным повторением доказательства непрерывности обратной функции в предыдущей теореме. Наконец, как и выше, теорема для строго монотонно убывающей функции следует из уже доказанной теоремы о строго монотонно возрастающей функции с помощью рассмотрения функции $-f$. □

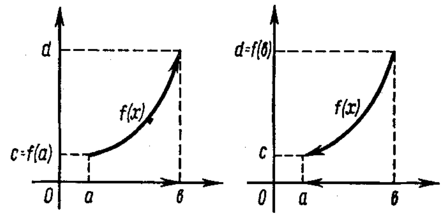

Рис. 26

Замечание. Аналогичным образом доказывается, что если функция строго возрастает и непрерывна на полуинтервале $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, или на $(a, b]$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, то обратная функция определена, строго возрастает и непрерывна на полуинтервале $[c, d)$, где $c=f(a)$, $d=\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$, соответственно на $(c, d]$, где $c=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $d=f(b)$ (рис. 26).

Случай строго убывающей на полуинтервале функции $f(x)$ можно свести к случаю строго возрастающей, рассмотрев функцию $-f(x)$.

Пример. При любом целом положительном n степенная функция $y=x^n$ строго возрастает и непрерывна на положительной полуоси $x \geqslant 0$.

Действительно, если $0 \leqslant x_1 < x_2$, то, перемножая n раз эти неравенства, получим $x_1^n < x_2^n$, т. е. функция $y=x^n$, $n=1, 2, \ldots$, строго монотонно возрастает. Для доказательства непрерывности функции $y=x^n$ заметим, что функция $y=f(x)=x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$. Действительно в этом случае $y_0=f(x_0)=x_0$, поэтому $\Delta y = y - y_0 = x - x_0 = \Delta x$. Следовательно, если задано $\varepsilon > 0$, то, беря $\delta=\varepsilon$, получим, что из условия $|\Delta x| < \delta$ следует $|\Delta y| = |\Delta x| < \delta = \varepsilon$. Это и означает непрерывность функции $y=x$ в точке $x=x_0$. Функция же $y=x^n$ является произведением n

*) Случай $x_1 \geqslant x_2$ невозможен, так как тогда бы в силу возрастания функции f выполнялось бы неравенство $y_1 \geqslant y_2$.

одинаковых функций $f(x)=x$ и потому (см. п. 5.2) также непрерывна во всех точках $x \in R$.

Из того, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, очевидно, следует, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$, $n=1, 2, \ldots$. Кроме того, в нуле функция $y=x^n$ обращается в ноль. Поэтому, согласно замечанию к теореме 4, множеством значений степенной функции $y=x^n$ при $x\geqslant 0$ является неотрицательная полуось $y\geqslant 0$.

Обратной функцией для функции $y^n=x$ является корень n-й степени $\sqrt[n]{y}$, $n=1, 2, \ldots$. Согласно теореме 4 и в силу доказанных свойств степенной функции $y=x^n$, корень n-й степени $\sqrt[n]{y}$, $n=1, 2, \ldots$, определен для любого неотрицательного y.

Таким образом, из доказанных теорем следует, в частности, *существование и единственность положительного корня n-й степени из любого положительного числа.*

Замечание. Из рассмотренного примера следует еще раз, что любой промежуток содержит иррациональные числа (см. следствие 2 из теоремы 8 в п. 3.11). Покажем сначала, что число $\sqrt{2}$ (существование которого вытекает из рассмотренного выше примера) является иррациональным. Допустим противное: пусть существует рациональное число, равное квадратному корню из двух. Запишем это число в виде несократимой дроби p/q (p и q — взаимно простые натуральные числа):

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q}.$$

Тогда $p^2=2q^2$ и, следовательно, число p делится на 2. Действительно, если бы p было нечетным, т. е. $p=2k+1$, $k\in N$, то $p^2=(2k+1)^2=4k^2+2k+1$ также было бы нечетным, и равенство $p^2=2q^2$ не имело бы места. Итак, $p=2k$; но тогда $4k^2=2q^2$, или $q^2=2k^2$. Отсюда, как и выше, следует, что q — четное число. Четность чисел $p=q$ противоречит предположению о несократимости дроби p/q.

Из доказанного, очевидно, следует, что всякое число вида $m\sqrt{2}/n$, m и n — натуральные, также иррационально. В самом деле, если бы оно было рациональным $\frac{m\sqrt{2}}{n}=\frac{p}{q}$, то и $\sqrt{2}$ оказалось бы рациональным числом: $\sqrt{2}=\frac{np}{mq}$. Отсюда, в свою очередь, следует, что всякий интервал содержит иррациональное число (сравните с п. 3.11) и притом вида $m\sqrt{2}/n$, m и n — целые.

Действительно, пусть $0\leqslant a<b$. Выберем так натуральное n, чтобы

$$\sqrt{2}/n<b-a,$$

а затем натуральное m так, чтобы

$$\frac{(m-1)\sqrt{2}}{n} \leqslant a < \frac{m\sqrt{2}}{n}.$$

Тогда $a < \frac{m\sqrt{2}}{n} < b$. Если же $a < b \leqslant 0$, то в силу доказанного существуют такие целые m и n, что

$$0 \leqslant -b < \frac{m\sqrt{2}}{n} < -a;$$

а поэтому

$$a < -\frac{m\sqrt{2}}{n} < b.$$

В случае $a < 0 < b$ согласно доказанному существуют такие целые m и n, что $a < 0 < \frac{m\sqrt{2}}{n} < b$. □

§ 7. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

7.1. МНОГОЧЛЕНЫ И ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Теорема 1. *Любой многочлен непрерывен в каждой точке.*

В самом деле, функция $y = c$, где c — постоянная, непрерывна, что показано в примере 1 п. 5.1.

Функции вида $y = x^n$ также непрерывны для каждого фиксированного $n \in N$ в любой точке x. Это показано в п. 6.3 (см. приведенный там пример).

Всякий же многочлен получается из функций вида $y = c$ и $y = x^n$ с помощью сложения и умножения и поэтому является непрерывной функцией в каждой точке (см. п. 5.2).

Теорема 2. *Всякая рациональная функция $P(x)/Q(x)$, ($P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены) непрерывна во всех точках, в которых ее знаменатель не обращается в ноль.*

Это непосредственно следует из того, что многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывны в каждой точке и частное непрерывных функций также непрерывно во всех точках, где делитель не обращается в нуль (см. п. 5.2).

Эту теорему весьма удобно использовать при нахождении пределов рациональных функций. Пусть требуется найти $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$. Для этого нужно сначала произвести, если, конечно, это возможно, сокращение дроби $P(x)/Q(x)$ на множитель $(x - x_0)^n$ с наибольшим возможным показателем $n \geqslant 1$. Если получившуюся рациональную дробь обозначить $P_1(x)/Q_1(x)$, то (см. п. 4.4)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$