а затем натуральное m так, чтобы

$$\frac{(m-1)\sqrt{2}}{n} \leqslant a < \frac{m\sqrt{2}}{n}.$$

Тогда $a < \frac{m\sqrt{2}}{n} < b$. Если же $a < b \leqslant 0$, то в силу доказанного существуют такие целые m и n, что

$$0 \leqslant -b < \frac{m\sqrt{2}}{n} < -a;$$

а поэтому

$$a < -\frac{m\sqrt{2}}{n} < b.$$

В случае $a < 0 < b$ согласно доказанному существуют такие целые m и n, что $a < 0 < \frac{m\sqrt{2}}{n} < b$. □

§ 7. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

7.1. МНОГОЧЛЕНЫ И ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Теорема 1. *Любой многочлен непрерывен в каждой точке.*

В самом деле, функция $y=c$, где c — постоянная, непрерывна, что показано в примере 1 п. 5.1.

Функции вида $y=x^n$ также непрерывны для каждого фиксированного $n \in N$ в любой точке x. Это показано в п. 6.3 (см. приведенный там пример).

Всякий же многочлен получается из функций вида $y=c$ и $y=x^n$ с помощью сложения и умножения и поэтому является непрерывной функцией в каждой точке (см. п. 5.2).

Теорема 2. *Всякая рациональная функция $P(x)/Q(x)$, ($P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены) непрерывна во всех точках, в которых ее знаменатель не обращается в ноль.*

Это непосредственно следует из того, что многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывны в каждой точке и частное непрерывных функций также непрерывно во всех точках, где делитель не обращается в нуль (см. п. 5.2).

Эту теорему весьма удобно использовать при нахождении пределов рациональных функций. Пусть требуется найти $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$. Для этого нужно сначала произвести, если, конечно, это возможно, сокращение дроби $P(x)/Q(x)$ на множитель $(x-x_0)^n$ с наибольшим возможным показателем $n \geqslant 1$. Если получившуюся рациональную дробь обозначить $P_1(x)/Q_1(x)$, то (см. п. 4.4)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Если $Q_1(x_0) \neq 0$, то, в силу теоремы 2, этот предел равен просто $P_1(x_0)/Q_1(x_0)$, если же $Q_1(x_0) = 0$ (и, значит, $P_1(x_0) \neq 0$, ибо в противном случае дробь $P_1(x)/Q_1(x)$ можно было бы сократить на $(x - x_0)$), то этот предел равен ∞.

Примеры. 1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x-2}{x-1} = \infty$.

7.2. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ, ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ И СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИИ

Напомним свойства степени a^r, где $a > 0$, r — рациональное число: $r = p/q$, p и q — целые, $q \neq 0$.

1°. Пусть $r_1 < r_2$. Если $a > 1$, то $a^{r_1} < a^{r_2}$, а если $a < 1$, то $a^{r_1} > a^{r_2}$.

2°. $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$.

3°. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$.

4°. $(ab)^r = a^r b^r$.

Здесь везде r, r_1 и r_2 — рациональные числа. Вспомним еще, что $a^0 = 1$. Из свойства 2° следует, что $a^r \cdot a^{-r} = a^0 = 1$; откуда

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}. \tag{7.1}$$

Далее, из свойства 1° и из (7.1) вытекает, что $a^r > 0$ для любого рационального r. Действительно, если $r > 0$ и $a \geqslant 1$, то в силу 1° $a^r \geqslant a^0 = 1 > 0$. Отсюда, согласно (7.1), имеем

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} > 0.$$

Аналогично доказывается неравенство $a^r > 0$ при $a < 1$.

Определим теперь степень a^x для любого действительного x и $a > 0$. Предварительно напомним, что (см. в п. 3.9 пример 3, формулы (3.20) и (3.21))

$$\lim_{n \to \infty} a^{1/n} = \lim_{n \to \infty} a^{-1/n} = 1. \tag{7.2}$$

Лемма. *Пусть $a > 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех рациональных чисел h, удовлетворяющих условию $|h| < \delta$, выполняется неравенство $|a^h - 1| < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть сначала $a > 1$. Из (7.2) следует, что для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число n_ε, что

$$|a^{1/n_\varepsilon} - 1| < \varepsilon \text{ и } |a^{-1/n_\varepsilon} - 1| < \varepsilon, \tag{7.3}$$

следовательно (см. свойство 1° степени),

$$1-\varepsilon < a^{-1/n_\varepsilon} < a^{1/n_\varepsilon} < 1+\varepsilon. \qquad (7.4)$$

Если h — рациональное число и $|h| < \frac{1}{n_\varepsilon}$, т. е. $-\frac{1}{n_\varepsilon} < h < \frac{1}{n_\varepsilon}$, то $a^{-1/n_\varepsilon} < a^h < a^{1/n_\varepsilon}$ и, значит, $1-\varepsilon < a^h < 1+\varepsilon$. Таким образом, если h рационально и $|h| < \delta$, где $\delta = \frac{1}{n_\varepsilon}$, то $|a^h - 1| < \varepsilon$. Для $a > 1$ лемма доказана.

Для $a < 1$ она доказывается аналогично, только соответствующие неравенства, согласно свойству 1° степени a^r при $a < 1$, надо заменить обратными. При $a = 1$ лемма очевидна. □

Определим теперь степень a^x для любого действительного x.

Определение 1. *Пусть $a > 0$, а x — произвольное действительное число. Пусть, далее, $\{r_n\}$ — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x (для любого $x \in \boldsymbol{R}$ такая последовательность всегда существует, см.* следствие леммы 1 в п. 3.10). Положим по определению

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}. \qquad (7.5)$$

Это определение корректно в том смысле, что указанный предел всегда существует и не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$, сходящейся к числу $x \in \boldsymbol{R}$.

Докажем это. Пусть последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ сходится к числу x. Покажем, что последовательность $\{a^{r_n}\}$ удовлетворяет условиям критерия Коши (см. п. 3.7) и, значит, является сходящейся последовательностью. Для этого необходимо оценить разность

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1|. \qquad (7.6)$$

Последовательность $\{r_n\}$ сходится и, следовательно, ограничена (см. п. 3.4), поэтому существует такое число A, которое без ограничения общности можно считать рациональным (почему?), что $-A < r_n < A$. Отсюда в случае $a \geqslant 1$ имеем $a^{-A} \leqslant a^{r_n} \leqslant a^A$, а в случае $a < 1$ — соответственно $a^{-A} > a^{r_n} > a^A$, $n = 1, 2, \ldots$, поэтому при любом $a > 0$ существует такое число B, что

$$a^{r_n} \leqslant B, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (7.7)$$

($B = a^A$ при $a \geqslant 1$ и $B = a^{-A}$ при $a < 1$), т. е. последовательность $\{a^{r_n}\}$ ограничена сверху числом B.

Далее, по лемме для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех рациональных r, удовлетворяющих условию $|r| < \delta$, выполнено неравенство

$$|a^r - 1| < \frac{\varepsilon}{B}. \qquad (7.8)$$

Из сходимости же последовательности $\{r_n\}$ в силу критерия Коши (см. п. 3.7) следует, что для найденного $\delta>0$ существует такой номер n_δ, что для всех $n \geqslant n_\delta$ и $m \geqslant n_\delta$ выполняется неравенство $|r_n - r_m| < \delta$ и, значит, в силу (7.8) неравенство

$$|a^{r_n - r_m} - 1| < \frac{\varepsilon}{B}. \tag{7.9}$$

Из (7.6), (7.7) и (7.9) вытекает, что для всех $n \geqslant n_\delta$ и $m \geqslant n_\delta$ справедливо неравенство $|a^{r_n} - a^{r_m}| < \varepsilon$, откуда в силу критерия Коши следует, что последовательность $\{a^{r_n}\}$ сходится.

Пусть теперь $\{r'_n\}$ — другая последовательность, сходящаяся к x. Покажем, что последовательности $\{a^{r_n}\}$ и $\{a^{r'_n}\}$ сходятся к одному и тому же пределу.

Составим новую последовательность:

$$r''_n = \begin{cases} r_k, & \text{если } n = 2k-1, \\ r'_k, & \text{если } n = 2k, \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{7.10}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} r''_n = x$, поэтому в силу доказанного существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r''_n}$. Предел же любой сходящейся последовательности совпадает с пределом любой ее подпоследовательности, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} a^{r'_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r''_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}. \tag{7.11}$$

Корректность определения a^x доказана.

Определение 1 естественно в том смысле, что в случае, когда x является рациональным числом r, то степень a^x совпадает со значением a^r в ранее известном смысле. В самом деле, если $x = r$ — рациональное число, то в качестве последовательности рациональных чисел r_n, $n = 1, 2, \ldots$, сходящейся к $x = r$, можно взять $r_n = r$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда согласно определению 1

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^r = a^r.$$

Определение 2. *Пусть задано некоторое число $a>0$. Функция a^x, определенная для всех $x \in \boldsymbol{R}$, называется показательной функцией с основанием a.*

Согласно определению $1^x = 1$ для всех действительных x. Поэтому случай $a = 1$ не представляет интереса для изучения, и в дальнейшем мы не будем его рассматривать.

Теорема 3. *Показательная функция a^x $(a>0)$ обладает следующими свойствами.*

1°. *При $a>1$ она строго возрастает, а при $a<1$ — строго убывает на всей числовой оси.*

2°. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ *для любых действительных* x *и* y.

3°. $(a^x)^y = a^{xy}$ *для любых действительных* x *и* y.

4°. *Она непрерывна в каждой точке числовой оси.*

Доказательство свойства 1°. Пусть для определенности $a>1$ и $x<y$. Существуют (почему?) такие рациональные числа r' и r'', что $x<r'<r''<y$. Выберем какие-либо последовательности рациональных чисел $\{r'_n\}$ и $\{r''_n\}$ так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} r'_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} r''_n = y$ и чтобы $r'_n < r' < r'' < r''_n$ для всех $n=1, 2, \ldots$. Тогда

$$a^{r'_n} < a^{r'} < a^{r''} < a^{r''_n};$$

перейдя к пределу при $n\to\infty$, получим

$$a^x \leqslant a^{r'} < a^{r''} \leqslant a^y. \tag{7.12}$$

Таким образом, если $x<y$, то $a^x<a^y$, что и означает строгое возрастание функции a^x при $a>1$.

Случай $a<1$ рассматривается аналогичным образом.

Доказательство свойства 2°. Пусть $\{r'_n\}$ и $\{r''_n\}$ — такие последовательности рациональных чисел, что $\lim\limits_{n\to\infty} r'_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} r''_n = y$ и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty}(r'_n + r''_n) = x+y$ (см. п. 3.9). Тогда в силу определения показательной функции

$$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n + r''_n} = \lim_{n\to\infty}\left(a^{r'_n}a^{r''_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} \lim_{n\to\infty} a^{r''_n} = a^x a^y.$$

Прежде чем переходить к доказательству следующих свойств, заметим, что из свойства 2° следует, что для любого действительного x справедливо равенство $a^x a^{-x} = a^0 = 1$; поэтому $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Доказательство свойства 4°*). В силу уже доказанной строгой монотонности функции a^x утверждение леммы настоящего пункта справедливо (вместе с доказательством) не только для рациональных, но и для всех действительных h. А именно: для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех вещественных чисел h, удовлетворяющих условию $|h|<\delta$, выполняется неравенство $|a^h-1|<\varepsilon$.

Пусть x фиксировано, $y=a^x$, $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x}-1)$. Согласно сказанному, для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех Δx, удовлетворяющих условию $|\Delta x|<\delta$, выполняется неравенство

$$|a^{\Delta x}-1| < \frac{\varepsilon}{a^x},^{**)}$$

*) Свойство 3° будет доказано после доказательства свойства 4°.

**) Отметим, что $a^x>0$ при любом действительном x. Это вытекает из свойств 1° и 2°, сформулированных в теореме 3, и из того, что $a^0=1$ (ср. со свойствами a^r при рациональных показателях r).

следовательно, для всех Δx, удовлетворяющих условию $|\Delta x| < \delta$, справедливо неравенство $|\Delta y| = a^x |a^{\Delta x} - 1| < \varepsilon$, что и означает непрерывность функции a^x в точке x.

Доказательство свойства 3°. Пусть сначала $y = p$ — целое положительное число; тогда применив p раз свойство 2°, получим

$$(a^x)^p = \underbrace{a^x \cdot a^x \dots a^x}_{p \text{ раз}} = a^{\overbrace{x+x+\dots x}^{p \text{ раз}}} = a^{xp}. \tag{7.13}$$

Пусть, далее, $y = \frac{1}{q}$, где q — целое положительное число. Покажем, что $(a^x)^{1/q} = a^{x/q}$, т. е. что $a^{x/q}$ является корнем q-й степени из числа a^x. Для этого, согласно определению корня, надо доказать, что $\left(a^{\frac{x}{q}}\right)^q = a^x$; это следует из равенства (7.13).

Пусть теперь $y = \frac{p}{q}$, p и q натуральные, тогда, согласно уже доказанному,

$$(a^x)^{p/q} = [(a^x)^p]^{1/q} = (a^{xp})^{1/q} = a^{xp/q}.$$

Если же $y = -\frac{p}{q}$, то

$$(a^x)^{-p/q} = \frac{1}{(a^x)^{p/q}} = \frac{1}{a^{xp/q}} = a^{-xp/q}.$$

Наконец, очевидно, что $(a^x)^0 = 1 = a^0$. Таким образом доказано, что для любого действительного x и любого рационального r

$$(a^x)^r = a^{xr}. \tag{7.14}$$

Пусть теперь задано еще одно действительное число y. Рассмотрим произвольную последовательность $\{r_n\}$ рациональных чисел, сходящуюся к y. Тогда в силу (7.14) для всех $n = 1, 2, \dots$ будем иметь

$$(a^x)^{r_n} = a^{xr_n}. \tag{7.15}$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} xr_n = xy$, то согласно доказанной выше непрерывности функции a^x

$$\lim_{n\to\infty} a^{xr_n} = a^{xy}. \tag{7.16}$$

С другой стороны, в силу определения показательной функции

$$\lim_{n\to\infty} (a^x)^{r_n} = (a^x)^y. \tag{7.17}$$

Переходя к пределу в равенстве (7.15) при $n \to \infty$, из (7.16) и (7.17) получим рассматриваемое свойство для любых $x, y \in \boldsymbol{R}$. $\boxed{\cdot}$

Упражнение 1. Доказать, что $(ab)^x = a^x b^x$ и $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ для любых $a > 0$, $b > 0$ и каждого $x \in \boldsymbol{R}$.

Пусть a — положительное число, неравное единице. Из элементарной математики известно, что операция, обратная возведению в степень и ставящая в соответствие данному числу $x>0$ такое число y, что $a^y=x$ (если, конечно, указанное y существует), называется логарифмированием по основанию a. Число y называется логарифмом числа x по основанию a и обозначается через $\log_a x$. Таким образом по определению

$$a^{\log_a x}=x \qquad (a>0,\ a\neq 1).$$

При $a=e$ логарифм числа x обозначается $\ln x$ и называется натуральным логарифмом числа x.

Определение 3. *Функция, ставящая в соответствие каждому числу x его логарифм $\log_a x$ по основанию a $(a>0,\ a\neq 1)$, если этот логарифм существует, называется логарифмической функцией $y=\log_a x$.*

Теорема 4. *Функция $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, определена для всех $x>0$ и является на этом множестве строго монотонной (возрастающей при $a>1$ и убывающей при $a<1$) непрерывной функцией. Она имеет следующие свойства:*

1°) $\log_a x_1x_2=\log_a x_1+\log_a x_2$, $x_1>0$, $x_2>0$;

2°) $\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x$, $x>0$, $\alpha\in \boldsymbol{R}$.

Доказательство. Надо прежде всего доказать, что множеством значений функции $y=a^x$ является множество всех положительных чисел. При $a>1$ в силу непрерывности и строго монотонного возрастания функции $y=a^x$ это означает (см. п. 4.8), что

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x=0. \tag{7.18}$$

При этом, поскольку пределы (7.18) (конечные или бесконечные) существуют (см. п. 4.10), достаточно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}=+\infty$ $\left(\text{соответственно } \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}=0\right)$ хотя бы для одной последовательности $\{x_n\}$, которая стремится к $+\infty$ (соответственно к $-\infty$).

Покажем, что при $a>1$

$$\lim_{n\to+\infty} a^n=+\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} a^{-n}=0. \tag{7.19}$$

Так как $\alpha=a-1>0$, то, раскладывая $(1+\alpha)^n$ по биномиальной формуле Ньютона и отбрасывая все члены (которые положительны), кроме первых двух, получаем

$$a^n=(1+\alpha)^n=1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2+\ldots>n\alpha,$$

(ср. с леммой п. 3.9) и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=+\infty$; отсюда

$$\lim_{n\to\infty} a^{-n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} a^n}=0.$$

Таким образом, равенства (7.19) доказаны.

Если теперь $a<1$, то $b=\frac{1}{a}>1$ и

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{b^x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} b^x}=0,\quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \frac{1}{\lim\limits_{x\to-\infty} b^x}=+\infty.$$

Из доказанного следует (см. п. 6.3 и теорему 4 этого параграфа), что как в случае $a>1$, так и в случае $a<1$ множеством значений функции a^x, а значит, и областью определения обратной функции $y=\log_a x$ является полупрямая $(0, +\infty)$. Этим, в частности, доказано существование логарифма любого положительного числа. Остальные утверждения теоремы 4 непосредственно следуют из теоремы 4 п. 6.3 и теоремы 3 настоящего параграфа.

Например, покажем, как свойство 1° вытекает из свойств показательной функции, указанных в теореме 3. Положим

$$y_1=\log_a x_1,\quad y_2=\log_a x_2,$$

согласно определению логарифма это означает, что

$$x_1=a^{y_1},\quad x_2=a^{y_2}.$$

Отсюда (см. свойство 1° показательной функции в теореме 3) имеем

$$x_1x_2=a^{y_1}a^{y_2}=a^{y_1+y_2},$$

и, следовательно, снова по определению логарифма,

$$\log_a x_1x_2=y_1+y_2=\log_a x_1+\log_a x_2. \square$$

Определение 4. *Пусть задано действительное число α. Функция x^α, определенная для всех $x>0$, называется степенной функцией с показателем α.*

Теорема 5. *Степенная функция x^α непрерывна при всех $x>0$.*

Действительно, из определения логарифма имеем $x=e^{\ln x}$, а поэтому $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$, т. е. x^α есть композиция показательной функции e^u и логарифмической функции, умноженной на постоянную: $u=\alpha\ln x$. Показательная и логарифмическая функции непрерывны (см. теоремы 3 и 4), поэтому в силу теоремы о непрерывности композиции непрерывных функций (см. п. 5.2) функция x^α также непрерывна. $\square$

При рассмотрении функции $y=x^\alpha$ предполагалось, что $x>0$, так как при $x\leqslant 0$ выражение x^α имеет смысл не для всех α в области действительных чисел. Однако если α рационально и x^α имеет смысл при $x<0$ $\left(\text{например, } x^2,\ \frac{1}{x^3},\ \sqrt[5]{x}\right)$, то функция $y=x^\alpha$ будет при $\alpha>0$ непрерывной на всей действительной оси, а при $\alpha<0$ — на всей действительной оси, кроме точки $x=0$.

При $x\neq 0$ это непосредственно следует из теоремы 5, так как функция $y=x^\alpha$, если она определена и для всех $x<0$, будет всегда четной или нечетной, а если четная или нечетная функция непрерывна при $x > 0$, то она непрерывна и при $x < 0$ (почему?). Если же в точке $x = 0$ четная или нечетная функция непрерывна справа и равна нулю, то она просто непрерывна в этой точке (почему?). Этот случай имеет место при $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to +0} x^\alpha = 0 = 0^\alpha,$$

ибо $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ и (см. теорему 4) $\lim\limits_{x \to +0} \ln x = -\infty$, поэтому в этом случае функция x^α непрерывна и при $x = 0$.

7.3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Перейдем к вопросу о непрерывности тригонометрических функций. При этом не будем приводить строгих аналитических определений этих функций (как это было сделано выше с показательной функцией), а используем их геометрическое определение, известное из элементарной математики. Всюду в дальнейшем x — действительное число, а под $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ будем подразумевать значение соответствующей тригонометрической функции от угла, радианная мера которого равна x.

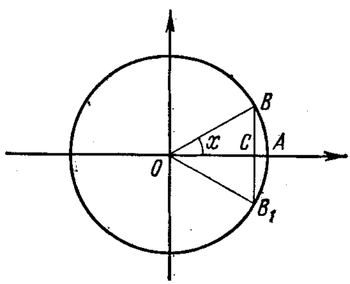

Рис. 27

Лемма 3. *При любом действительном x справедливо неравенство*

$$|\sin x| \leqslant |x|.$$

Доказательство. Рассмотрим окружность радиуса R с центром в точке O. Пусть радиус OB образует угол x, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, с радиусом OA, а радиус OB_1 симметричен радиусу OB относительно OA (рис. 27).

Опустим из точки B перпендикуляр BC на радиус OA. Тогда $BC = R \sin x$, и так как $BC = CB_1$, будем иметь $BB_1 = 2R \sin x$. Как известно, длина дуги BAB_1 равна $2Rx$. Длина отрезка, соединяющего две точки, не превышает длины дуги окружности, соединяющей те же точки, значит, $2R \sin x \leqslant 2Rx$, т. е. $\sin x \leqslant x$.

Если теперь $-\frac{\pi}{2} \leqslant x < 0$, то $0 < -x \leqslant \frac{\pi}{2}$, и поэтому, в силу доказанного, $\sin(-x) \leqslant -x$, но в этом случае $\sin(-x) = |\sin x|$ и $-x = |x|$, следовательно, $|\sin x| \leqslant |x|$. Таким образом, если $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $|\sin x| \leqslant |x|$. Если же $|x| > \frac{\pi}{2}$, то $|\sin x| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} < |x|$. □

Теорема 6. *Функции* $y=\sin x$, $y=\cos x$ *непрерывны на всей действительной оси.*

Следствие. *Функции* $y=\operatorname{tg} x$ *и* $y=\operatorname{ctg} x$ *непрерывны при всех* x, *при которых* $\cos x$, *соответственно* $\sin x$, *не обращаются в ноль.*

Доказательство. Так как $|\sin\alpha|\leqslant 1$, $|\cos\alpha|\leqslant 1$ при любом α и в силу леммы $\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}|\Delta x|$, то

$$|\sin(x+\Delta x)-\sin x|\leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant|\Delta x|,$$

$$|\cos(x+\Delta x)-\cos x|\leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant|\Delta x|.$$

Отсюда следует, что при $\Delta x\to 0$ левые части неравенства также стремятся к нулю. Это и означает непрерывность функций $\sin x$ и $\cos x$.

Непрерывность $\operatorname{tg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ и $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ в точках, в которых знаменатели не обращаются в ноль, следует из непрерывности $\sin x$ и $\cos x$ и теоремы о частном непрерывных функций (см. п. 5.2).

Теорема 7. *Обратные тригонометрические функции* $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ *и* $\operatorname{arcctg} x$ *непрерывны в области их определения.*

Это сразу следует из теорем 3 и 4 в § 6 и из непрерывности и строгой монотонности функций $\sin x$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$, $\cos x$ на отрезке $[0, \pi]$, $\operatorname{tg} x$ на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ и $\operatorname{ctg} x$ на интервале $(0, \pi)$.

§ 8. СРАВНЕНИЕ ФУНКЦИЙ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

8.1. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

В этом пункте вычисляются пределы, которые неоднократно будут встречаться в дальнейшем.

Лемма 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{8.1}$$

Доказательство. Рассмотрим круг радиуса R с центром в точке O. Пусть радиус OB образует угол x, $0<x<\frac{\pi}{2}$, с радиусом OA. Соединим точки A и B отрезком и восставим из точки A перпендикуляр к радиусу OA до пересечения в точке C с продолжением радиуса OB (рис. 28). Тогда площадь треугольника AOB равна $\frac{1}{2}R^2\sin x$, площадь сектора AOB равна $\frac{1}{2}R^2x$, а площадь треугольника AOC равна $\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg} x$. Треугольник AOB является частью сектора AOB, который в свою очередь является частью