**Теорема 6.** *Функции* $y=\sin x$, $y=\cos x$ *непрерывны на всей действительной оси.*

**Следствие.** *Функции* $y=\operatorname{tg} x$ *и* $y=\operatorname{ctg} x$ *непрерывны при всех* $x$, *при которых* $\cos x$, *соответственно* $\sin x$, *не обращаются в ноль.*

Доказательство. Так как $|\sin\alpha|\leqslant 1$, $|\cos\alpha|\leqslant 1$ при любом $\alpha$ и в силу леммы $\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}|\Delta x|$, то

$$|\sin(x+\Delta x)-\sin x|\leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant|\Delta x|,$$

$$|\cos(x+\Delta x)-\cos x|\leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant|\Delta x|.$$

Отсюда следует, что при $\Delta x\to 0$ левые части неравенства также стремятся к нулю. Это и означает непрерывность функций $\sin x$ и $\cos x$.

Непрерывность $\operatorname{tg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ и $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ в точках, в которых знаменатели не обращаются в ноль, следует из непрерывности $\sin x$ и $\cos x$ и теоремы о частном непрерывных функций (см. п. 5.2).

**Теорема 7.** *Обратные тригонометрические функции* $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ *и* $\operatorname{arcctg} x$ *непрерывны в области их определения.*

Это сразу следует из теорем 3 и 4 в § 6 и из непрерывности и строгой монотонности функций $\sin x$ на отрезке $[-\pi/2,\ \pi/2]$, $\cos x$ на отрезке $[0,\ \pi]$, $\operatorname{tg} x$ на интервале $(-\pi/2,\ \pi/2)$ и $\operatorname{ctg} x$ на интервале $(0,\ \pi)$.

## § 8. СРАВНЕНИЕ ФУНКЦИЙ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

### 8.1. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

В этом пункте вычисляются пределы, которые неоднократно будут встречаться в дальнейшем.

**Лемма 1.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{8.1}$$

Доказательство. Рассмотрим круг радиуса $R$ с центром в точке $O$. Пусть радиус $OB$ образует угол $x$, $0<x<\frac{\pi}{2}$, с радиусом $OA$. Соединим точки $A$ и $B$ отрезком и восставим из точки $A$ перпендикуляр к радиусу $OA$ до пересечения в точке $C$ с продолжением радиуса $OB$ (рис. 28). Тогда площадь треугольника $AOB$ равна $\frac{1}{2}R^2\sin x$, площадь сектора $AOB$ равна $\frac{1}{2}R^2x$, а площадь треугольника $AOC$ равна $\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg} x$. Треугольник $AOB$ является частью сектора $AOB$, который в свою очередь является частью треугольника $AOC$; поэтому

$$\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 x < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x, \text{ откуда } \sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

следовательно,

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

или, заменяя величины им обратными

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{8.2}$$

Заметим, что в силу четности функций $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ неравенство (8.2) справедливо и при $-\pi/2 < x < 0$.

Так как функция $\cos x$ непрерывна и $\cos 0 = 1$, то из (8.2) при $x \to 0$ следует (см. п. 4.7) равенство (8.1). □

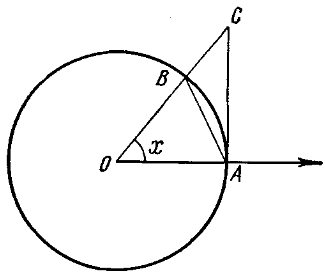

Рис. 28

**Следствие 1.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1. \tag{8.3}$$

В самом деле,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

**Следствие 2.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1. \tag{8.4}$$

Функция $y = \sin x$ строго монотонна и непрерывна на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$, поэтому обратная функция $x = \arcsin y$ также строго монотонна и непрерывна на отрезке $[-1; 1]$. Поскольку $\sin 0 = 0$, то записи $x \to 0$ и $y \to 0$ эквивалентны (см. замечание в конце п. 8*). Чтобы вычислить предел (8.4), применим правило замены переменного для пределов непрерывных функций (см. теорему 2 в п. 5.2). Положив $x = \sin y$, имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{\arcsin(\sin y)}{\sin y} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

**Следствие 3.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1. \tag{8.5}$$

Это равенство получается аналогично предыдущему из (8.3).

**Лемма 2.**

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e. \tag{8.6}$$

Ранее (см. п. 3.5) было доказано, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e, \tag{8.7}$$

где $n=1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что для любой последовательности $\{n_k\}$ натуральных чисел, такой, что

$$\lim_{k\to\infty} n_k=+\infty, \tag{8.8}$$

имеем

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=e. \tag{8.9}$$

В самом деле, пусть задано $\varepsilon>0$; из (8.7) вытекает, что существует такое $n_\varepsilon$, что при $n\geqslant n_\varepsilon$

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right|<\varepsilon, \tag{8.10}$$

а из условия (8.8) следует, что существует такое $k_\varepsilon$, что $n_k\geqslant n_\varepsilon$ при $k\geqslant k_\varepsilon$; поэтому в силу (8.10) $\left|\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}-e\right|<\varepsilon$ при $k\geqslant k_\varepsilon$, что и означает выполнение равенства (8.9).

Пусть теперь последовательность $\{x_k\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=+0$, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} x_k=0 \text{ и } x_k>0. \tag{8.11}$$

Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty}(1+x_k)^{1/x_k}=e$. При этом без ограничения общности можно считать, что $x_k<1$, $k=1, 2, \ldots$ (почему?). Для всякого $x_k$ найдется такое натуральное $n_k$, что $n_k+1>\frac{1}{x^k}\geqslant n_k$ и, следовательно, $\frac{1}{n_k+1}<x_k\leqslant\frac{1}{n_k}$, причем в силу (18.11) $\lim\limits_{k\to\infty} n_k= =+\infty$. Поэтому имеем:

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<(1+x_k)^{1/x_k}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}. \tag{8.12}$$

Замечая, что в силу (8.9)

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)}=\frac{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)}=e$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)=e$$

и переходя к пределу в неравенстве (8.12) при $k \to \infty$, получим

$$\lim_{k \to \infty} (1+x_k)^{1/x_k} = e.$$

Поскольку $\{x_k\}$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям (8.11), то тем самым доказано, что

$$\lim_{x \to +0} (1+x)^{1/x} = e. \tag{8.13}$$

Пусть теперь последовательность $\{x_k\}$ такая, что $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = -0$, т. е.

$$\lim_{k \to \infty} x_k = 0, \quad x_k < 0. \tag{8.14}$$

Положим $y_k = -x_k$, тогда $y_k > 0$ и $\lim\limits_{k \to \infty} y_k = 0$, причем без ограничения общности можно считать, что $y_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$\lim_{k \to \infty} (1+x_k)^{1/x_k} = \lim_{k \to \infty} (1-y_k)^{-1/y_k} = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{1-y_k}\right)^{1/y_k} =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{y_k}{1-y_k}\right)^{1/y_k} = \lim_{k \to \infty} (1+z_k)^{\frac{1}{z_k}+1},$$

где

$$z_k = \frac{y_k}{1-y_k} > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{k \to \infty} z_k = 0,$$

и в силу уже доказанного равенства (8.13)

$$\lim_{k \to \infty} (1+x_k)^{1/x_k} = \lim_{k \to \infty} (1+z_k)^{1/z_k} \lim_{k \to \infty} (1+z_k) = e.$$

Но $\{x_k\}$ была произвольной последовательностью, удовлетворяющей условиям (8.14), поэтому

$$\lim_{x \to -0} (1+x)^{1/x} = e. \tag{8.15}$$

Таким образом, функция $(1+x)^{1/x}$, $x \neq 0$ имеет в точке 0 пределы слева и справа, равные одному и тому же числу $e$. Поэтому существует и ее двусторонний предел при $x \to 0$, также равный $e$ (см. п. 4.5). $\square$

**Следствие 1.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \tag{8.16}$$

*и, в частности, при* $a = e$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

В самом деле, используя непрерывность логарифмической функции (см. теорему 4 из § 7), непрерывность суперпозиции функций (см. п. 5.2) и равенство (8.6), получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x}=\log_a\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}.$$

**Следствие 2.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \tag{8.17}$$

*В частности, если* $a=e$, *то*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \tag{8.18}$$

Функция $y=a^x-1$ строго монотонна и непрерывна на всей вещественной оси, поэтому обратная функция $x=\frac{\ln(1+y)}{\ln a}$ также строго монотонна и непрерывна при $y>-1$. Поскольку при $x=0$ имеем также и $y=0$, то обозначения $x\to 0$ и $y\to 0$ эквивалентны (см. замечание в конце п. 4.8*). Применим для вычисления предела (8.17) правило замены переменного (см. теорему 2 п. 5.2). Положив $x=\frac{\ln(1+y)}{\ln a}$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y\ln a}{\ln(1+y)}=\ln a\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}=\ln a.$$

## 8.2. СРАВНЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Все рассматриваемые в этом параграфе функции определены на некоторой фиксированной проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки $x_0$ расширенной числовой прямой: $x_0\in\overline{\boldsymbol{R}}$, причем эта окрестность может быть и односторонней. Поэтому каждый раз не будет оговариваться, что $x\in\mathring{U}(x_0)$.

Как мы уже знаем, сумма, разность и произведение бесконечно малых функций являются также бесконечно малыми функциями; этого нельзя, вообще говоря, сказать об их частном: деление одной бесконечно малой на другую может привести к разнообразным случаям, как это показывают нижеприведенные примеры бесконечно малых при $x\to 0$ функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

Пусть, например, $\alpha(x)=x$ и $\beta(x)=x^2$, тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}x=0,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{n\to 0}\frac{1}{x}=\infty.$$

Если же $\alpha(x)=x$, $\beta(x)=2x$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=2$, а если $\alpha(x)=x$, $\beta(x)=x\sin\frac{1}{x}$, то предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ не существует.

**Определение 1.** *Если для двух функций $f$ и $g$ существуют такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{V}(x_0)$ и постоянная $c>0$, что для всех $x\in\overset{\circ}{V}(x_0)$ выполняется неравенство $|f(x)|\leqslant c|g(x)|$, то функция $f$ называется ограниченной по сравнению с функцией $g$ на $\overset{\circ}{V}(x_0)$ и пишется*

$$f(x)=O(g(x)),\quad x\to x_0$$

(читается: $f(x)$ есть $O$ большое от $g(x)$ при $x$, стремящемся к $x_0$).

Подчеркнем, что запись $x\to x_0$ имеет здесь другой, чем обычно, смысл: она только указывает на то, что рассматриваемое свойство имеет место лишь в некоторой окрестности точки $x_0$; ни о каком пределе здесь речи нет.

**Лемма 3.** *Если $f(x)=\varphi(x)g(x)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=k$,* то $f(x)=O(g(x))$, $x\to x_0$.

Доказательство. Из существования конечного предела $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=k$, согласно свойству 1° из п. 4.7, следует существование такой проколотой окрестности $\overset{\circ}{V}(x_0)$ точки $x_0$, что функция $\varphi$ на ней ограничена, т. е. имеется такая постоянная $c>0$, что для всех $x\in\overset{\circ}{V}(x_0)$ выполняется неравенство $|\varphi(x)|\leqslant c$, а следовательно, и неравенство $|f(x)|=|\varphi(x)||g(x)|\leqslant c|g(x)|$. Это и означает, что $f(x)=O(g(x))$, $x\to x_0$. □

Примеры. $\frac{1}{x}=O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $x\to 0$, ибо $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant\frac{1}{x^2}$ при $|x|\leqslant 1$; $\frac{1}{x^2}=O\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x\to\infty$, ибо $\frac{1}{x^2}<\left|\frac{1}{x}\right|$ при $|x|\geqslant 1$. Запись $f(x)=O(1)$ при $x\to x_0$ означает, что функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки $x_0$, например $\frac{\operatorname{tg}2x}{x}=O(1)$ при $x\to 0$, ибо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{x}=2$, и, значит, функция $\frac{\operatorname{tg}2x}{x}$ ограничена в окрестности точки $x=0$.

**Определение 2.** *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что $f=O(g)$ и $g=O(f)$ при $x\to x_0$, то они называются функциями одного порядка при $x\to x_0$; это записывается в виде*

$$f(x)\asymp g(x),\quad x\to x_0.$$

Это понятие наиболее содержательно в том случае, когда функции $f$ и $g$ являются либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при $x\to x_0$. Например, функции $\alpha=x$ и $\alpha=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$ являются при $x\to 0$ бесконечно малыми одного порядка, ибо

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{1}{\left|2+\sin\frac{1}{x}\right|}\leqslant\frac{1}{2-\left|\sin\frac{1}{x}\right|}\leqslant 1,$$

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=\left|2+\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 2+\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 3.$$

**Лемма 4.** *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=k\neq 0$, *то* $f(x)\asymp g(x)$, $x\to x_0$.

Доказательство. Положим $\varphi(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{f(x)}{g(x)}$. Тогда $f(x)=\varphi(x)g(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=k$. Следовательно, по лемме 3, $f(x)=O(g(x))$, $x\to x_0$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\neq 0$, существует такая проколотая окрестность $\mathring{V}(x_0)$ точки $x_0$, что для всех $x\in\mathring{V}(x_0)$ имеем $f(x)/g(x)\neq 0$ (см. свойство 2 в п. 4.7), а следовательно, и $f(x)\neq 0$. Для $x\in\mathring{V}(x_0)$ положим $\psi(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{g(x)}{f(x)}$ тогда $g(x)=\psi(x)f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=\frac{1}{k}$. Поэтому, согласно лемме 3, $g(x)=O(f(x))$, $x\to x_0$. $\square$

В качестве примера возьмем функции $f(x)=3x^2$ и $g(x)=\sin x^2$. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{3}\lim\frac{\sin x^2}{x^2}=\frac{1}{3}$ (см. (8.1)), поэтому, согласно доказанному, функции $3x^2$ и $\sin x^2$ одного порядка при $x\to 0$.

**Определение 3.** *Функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *называются эквивалентными при* $x\to x_0$, *если в некоторой проколотой окрестности* $\mathring{U}(x_0)$ *точки* $x_0$ *определена такая функция* $\varphi(x)$, *что*

$$f(x)=\varphi(x)g(x) \tag{8.20}$$

и

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=1. \tag{8.21}$$

Отметим, что в силу свойства (8.21) найдется проколотая окрестность $\mathring{V}(x_0)$ точки $x_0$, на которой $\varphi(x)\neq 0$. Полагая $\psi(x)=\frac{1}{\varphi(x)}$, $x\in\mathring{V}(x_0)$, видим, что условия (8.20) и (8.21) для указанной проколотой окрестности равносильны условиям

$$g(x)=\psi(x)f(x),\quad \lim_{x\to x_0}\psi(x)=1,$$

т. е. как говорят, эквивалентность двух функций обладает свойством симметричности.

Функции $f(x)$ и $g(x)$, эквивалентные при $x\to x_0$, называются также *асимптотически равными* при $x\to x_0$. *Асимптотическое равенство* (эквивалентность) функций обозначается символом $\sim$:

$$f(x)\sim g(x)\quad\text{при}\quad x\to x_0. \tag{8.22}$$

Из сказанного выше следует, что если $f\sim g$ при $x\to x_0$, то и $g\sim f$ при $x\to x_0$.

Примеры. 1. $\frac{x^2}{1+x^4} \sim x^2$ при $x \to 0$. Действительно, полагая $\varphi(x)=\frac{1}{1+x^4}$, получим

$$\frac{x^2}{1+x^4}=\varphi(x)\,x^2 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x^4}=1.$$

2. $\frac{x^6}{1+x^4} \sim x^2$ при $x \to \infty$. В самом деле, если $\varphi(x)=\frac{x^4}{1+x^4}$, то

$$\frac{x^6}{1+x^4}=\varphi(x)\,x^2 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^4}{1+x^4}=1.$$

Если в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки $x_0$ справедливы неравенства $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, то условия (8.20) и (8.21) эквивалентны соотношению

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=1$$

и, следовательно, условию

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}=1.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно положить $\varphi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$; тогда, очевидно, для функции $\varphi(x)$ выполняются условия (8.20) и (8.21). Если

$$f \sim g \text{ и } g \sim h \text{ при } x \to x_0, \tag{8.23}$$

то

$$f \sim h \quad \text{при} \quad x \to x_0. \tag{8.24}$$

В самом деле, из условий (8.23) следует, что в некоторой проколотой окрестности точки $x_0$

$$f(x)=\varphi(x)\,g(x) \quad \text{и} \quad g(x)=\psi(x)\,h(x),$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)=\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x)=1$ и, следовательно,

$$f(x)=\varphi(x)\,\psi(x)\,h(x),$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)\,\psi(x)=1$, т. е. выполняется асимптотическое равенство (8.24).

Из результатов п. 8.1 следует, что при $x \to 0$ справедлива следующая эквивалентность бесконечно малых:

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x-1.$$

Из этой эквивалентности следуют и более общие соотношения, которые сформулируем в виде отдельной леммы.

**Лемма 4.** *Если функция $u(x)$ такова, что*

$$\lim_{x \to x_0} u(x)=0, \tag{8.25}$$

*то при* $x \to x_0$

$$u(x) \sim \sin u(x) \sim \operatorname{tg} u(x) \sim \arcsin u(x) \sim \operatorname{arctg} u(x) \sim \\ \sim \ln[1+u(x)] \sim e^{u(x)} - 1. \qquad (8.26)$$

Доказательство. Покажем, например, что

$$\sin u(x) \sim u(x) \quad \text{при} \quad x \to x_0. \qquad (8.27)$$

Пусть функция $u(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $x_0$. Положим (считая $x \neq x_0$ принадлежащими этой окрестности)

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin u(x)}{u(x)}, & \text{если } u(x) \neq 0, \\ 1, & \text{если } u(x) = 0. \end{cases} \qquad (8.28)$$

Покажем, что

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1. \qquad (8.29)$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Поскольку

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

(здесь $u$ — независимое переменное), существует такое число $\eta = \eta(\varepsilon)$, что при $|u| < \eta$, $u \neq 0$, выполняется неравенство

$$\left| \frac{\sin u}{u} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Для указанного $\eta > 0$ в силу (8.25) существует такое число $\delta = \delta(\eta)$, что для всех $x$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|u(x)| < \eta$. Следовательно, если $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ и $u(x) \neq 0$, то

$$\left| \frac{\sin u(x)}{u(x)} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Иначе говоря, если $0 < |x - x_0| < \delta$, и $u(x) \neq 0$, то

$$|\varphi(x) - 1| < \varepsilon. \qquad (8.30)$$

Если же $0 < |x - x_0| < \delta$ и $u(x) = 0$, то согласно (8.28) имеем $\varphi(x) = 1$ и, следовательно, неравенство (8.30) очевидно также выполняется.

Равенство (8.29) доказано, а так как из (8.28) следует, что $\sin u(x) = \varphi(x) u(x)$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, то доказана справедливость асимптотического равенства (8.27). Аналогично доказываются и остальные асимптотические формулы (8.26). □

**Определение 4.** *Если в некоторой проколотой окрестности точки* $x_0$ $\alpha(x) = \varepsilon(x) f(x)$, *где* $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$, *то функция* $\alpha$ *назы-*

*вается бесконечно малой по сравнению с функцией $f$ при $x \to x_0$ и пишется $\alpha = o(f)$, $x \to x_0$ (читается «$\alpha$ есть $o$ малое от $f$ при $x$, стремящемся к $x_0$»).*

В силу этого определения запись «$\alpha(x) = o(1)$, $x \to x_0$» означает просто, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

Если $f(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$, то условие

$$\alpha = \varepsilon f, \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon = 0,$$

можно переписать в виде

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{f} = 0.$$

Таким образом, под $o(f)$ при $x \to x_0$ ($f(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$) подразумевается любая функция такая, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(f)}{f} = 0.$$

В случае, когда $f(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$, то говорят, что $\alpha = o(f)$ при $x \to x_0$ является *бесконечно малой более высокого порядка, чем $f$*.

Например, $x^3 = o(\sin x^2)$ при $x \to 0$, ибо

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sin x^2} = \lim_{x \to 0} x \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin x^2} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Подобным образом $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ и $x = o(x^2)$ при $x \to \infty$.

Отметим, что если $f = o(g)$ при $x \to x_0$, то и подавно $f = O(g)$ при $x \to x_0$. В самом деле, пусть $f = \varepsilon g$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon = 0$. Тогда функция $\varepsilon = \varepsilon(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки $x_0$ (см. п. 4.7): $|\varepsilon(x)| \leqslant c$, $x \neq x_0$ и, значит, $|f(x)| \leqslant c\,|g(x)|$ в указанной проколотой окрестности, а это означает, что $f = O(g)$, $x \to x_0$.

Собирая вместе введенные в этом пункте основные понятия, получим: пусть в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U} = \mathring{U}(x_0)$ точки $x_0$

$$f(x) = \varphi(x)\, g(x),$$

тогда

если функция $\varphi(x)$ ограничена на $U$, то $f(x) = O(g(x))$;
если $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$, то $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$;
если $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$, то $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$.

Упражнение 1. Пусть $\beta = O(\alpha^2)$ при $x \to x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$. Доказать, что тогда $\beta = o(\alpha)$ при $x \to x_0$.

При использовании равенств с символами $O$ и $o$ следует иметь в виду, что они не являются равенствами в обычном смысле этого слова. Так, если

$$\alpha_1 = o(\beta) \text{ при } x \to x_0, \quad \alpha_2 = o(\beta) \text{ при } x \to x_0,$$

то было бы ошибкой сделать отсюда заключение, что $\alpha_1 = \alpha_2$, как это было бы в случае обычных равенств. Например, $x^3 = o(x)$ и $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$, но $x^2 \neq x^3$.

Аналогично, если

$$f + O(f) = g + O(f) \quad \text{при} \quad x \to x_0,$$

то было бы ошибкой сделать заключение, что $f = g$.

Дело в том, что один и тот же символ $O(f)$ или $o(f)$ может обозначать разные конкретные функции. Это обстоятельство связано с тем, что при определении символов $O(f)$ и $o(f)$ мы по существу ввели целые классы функций, обладающих определенными свойствами (класс функций, ограниченных в некоторой окрестности точки $x_0$ по сравнению с функцией $f$ и класс функций, бесконечно малых по сравнению с $f(x)$ при $x \to x_0$) и было бы правильнее писать не $\alpha = O(f)$ и $\alpha = o(f)$, а соответственно $\alpha \in O(f)$ и $\alpha \in o(f)$. Однако это привело бы к существенному усложнению вычислений с формулами, в которых встречаются символы $O$ и $o$. Поэтому мы сохраним прежнюю запись $\alpha = O(f)$ и $\alpha = o(f)$, но будем всегда читать эти равенства, в соответствии с приведенными выше определениями, только в одну сторону: слева направо (если, конечно, не оговорено что-либо другое). Например, запись

$$\alpha = o(f), \quad x \to x_0$$

означает, что функция $\alpha$ является бесконечно малой по сравнению с функцией $f$ при $x \to x_0$, но отнюдь не то, что всякая бесконечно малая по сравнению с $f$ функция равна $\alpha$.

В качестве примера на обращение с этими символами докажем равенство

$$o(cf) = o(f), \tag{8.31}$$

где $c$ — постоянная.

Согласно сказанному, надо показать, что если $g = o(cf)$, то $g = o(f)$. Действительно, если $g = o(cf)$, то $g = \varepsilon c f$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Положим $\varepsilon_1 = c\varepsilon$, тогда $g = \varepsilon_1 f$, где, очевидно, $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$ и, значит, $g = o(f)$. □

В заключение отметим, что сказанное об использовании символов $o$ и $O$ не исключает, конечно, того, что отдельные формулы с этими символами могут оказаться справедливыми не только при чтении слева направо, но и справа налево; так, формула (8.31) при $c \neq 0$ верна и при чтении справа налево.

Упражнения. Доказать, что если $\alpha$ — бесконечно малая при $x \to x_0$, то при $x \to x_0$:

2. $o(\alpha^2) = o(\alpha)$,
3. $o(\alpha) \cdot O(\alpha) = o(\alpha^2)$,
4. $o(\alpha) + o(\alpha) = o(\alpha)$,
5. $\alpha \cdot o(\alpha) = o(\alpha^2)$,
6. $o(\alpha + \alpha^2) = o(\alpha)$,
7. $o^2(\alpha) = o(\alpha^2)$,
8. $cO(\alpha) + o(\alpha) = O(\alpha)$ ($c$ — постоянная)
9. $o(o(\alpha)) = o(\alpha)$,
10. $O(O(\alpha)) = O(\alpha)$,
11. Если $|\beta| \leqslant o(\alpha)$, то $\beta = o(\alpha)$.

12. Пусть $\lim\limits_{t \to b} f(t) = a$, причем $f(t) \neq a$ при $t \neq b$ в некоторой окрестности точки $t = b$. Доказать, что тогда, если $\varphi(x) = o[\psi(x)]$ при $x \to a$, то $\varphi[f(t)] = o\{\psi[f(t)]\}$ при $t \to b$; а если $\varphi(x) = O[\psi(x)]$ при $x \to a$, то $\varphi[f(t)] = O\{\psi[f(t)]\}$ при $t \to b$.

## 8.3. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

Если функция $f(x)$ заменяется для каких-либо целей через $g(x)$, то разность $f(x) - g(x)$ называется *абсолютной погрешностью*, а отношение $\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}$ — *относительной погрешностью* сделанной замены. Если изучается поведение функции $f(x)$ при $x \to x_0$, то часто целесообразно заменить ее функцией $g(x)$ такой, что 1) функция $g(x)$ в определенном смысле более простая, чем функция $f(x)$; 2) абсолютная погрешность стремится к нулю при $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = 0.$$

В этом случае говорят, что $g(x)$ приближает или аппроксимирует функцию $f(x)$ вблизи точки $x_0$. Таким свойством обладают например, все бесконечно малые при $x \to x_0$ функции $f$ и $g$.

Ниже будет показано, что среди них лишь те, которые эквивалентны между собой:

$$g(x) \sim f(x), \quad x \to x_0,$$

обладают тем свойством, что не только абсолютная погрешность $f(x) - g(x)$, но и относительная $\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}$ стремится к нулю при $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{f(x)} = 0.$$

В этом смысле функции, эквивалентные заданной, приближают ее лучше, чем другие функции даже того же порядка, что и данная при $x \to x_0$.

Например, функции $x$, $\frac{1}{2}x$, $2x$, $10x$ являются бесконечно малыми при $x \to 0$, так же как и $\sin x$, а поэтому абсолютные погрешности при замене $\sin x$ каждой из них стремятся к нулю при $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} (\sin x - x) = \lim_{x \to 0} \left(\sin x - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \to 0} (\sin x - 2x) = \lim_{x \to 0} (\sin x - 10x) = 0.$$

Но лишь одна из всех перечисленных функций, а именно $g(x) = x$ обладает тем свойством, что относительная погрешность при замене $\sin x$ этой функцией будет стремиться к нулю при $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x}{\sin x}\right) = 0.$$

Стремление относительной погрешности $\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}$ к нулю при $x \to x_0$ можно записать, используя символ «$o$ малое»:

$$f(x) - g(x) = o(f(x)), \quad x \to x_0.$$

Сформулируем высказанное характеристическое свойство эквивалентных функций в виде теоремы.

**Теорема 1.** *Для того чтобы функции $f = f(x)$ и $g = g(x)$ были эквивалентными при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы при $x \to x_0$ выполнялось условие*

$$f(x) = g(x) + o(g(x)). \tag{8.32}$$

Доказательство необходимости. Пусть $f \sim g$ при $x \to x_0$, т. е.

$$f(x) = \varphi(x) g(x),$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$. Тогда

$$f(x) - g(x) = \varphi(x) g(x) - g(x) = [\varphi(x) - 1] g(x) = \varepsilon(x) g(x),$$

где $\varepsilon(x) = \varphi(x) - 1 \to 0$ при $x \to x_0$, т. е. имеем (8.32).

Доказательство достаточности. Пусть выполняется условие (8.32), т. е.

$$f(x) = g(x) + \varepsilon(x) g(x),$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Тогда

$$f(x) = [1 + \varepsilon(x)] g(x) = \varphi(x) g(x),$$

где $\varphi(x) = 1 + \varepsilon(x) \to 1$ при $x \to x_0$, т. е. $f \sim g$ при $x \to x_0$. □

Итак, мы показали, что функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда относительная погрешность $\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}$ $\left(\text{или } \frac{f(x)-g(x)}{g(x)}\right)$ стремится к нулю при $x \to x_0$.

**Следствие.** *Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g}{f} = c \neq 0$, где $c$ — постоянная. Тогда $g \sim cf$ и $g = cf + o(f)$ при $x \to x_0$.*

Доказательство. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g}{f} = c \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{cf}{g} = 1$, и, значит, $g \sim cf$ при $x \to x_0$. Отсюда по теореме 1 имеем $g = cf + o(cf)$, а значит (см. конец п. 8.2), $g = cf + o(f)$. □

**Теорема 2.** *Пусть* $f(x) \sim f_1(x)$ *и* $g(x) \sim g_1(x)$ *при* $x \to x_0$. *Тогда если существует*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \tag{8.33}$$

*то существует и* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, *причем*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \tag{8.34}$$

Доказательство. Условие $f \sim f_1$ при $x \to x_0$ означает, что

$$f(x) = \varphi(x) f_1(x),$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$, а условие $g \sim g_1$ при $x \to x_0$ — что $g(x) = \psi(x) g_1(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = 1$. Кроме того, поскольку существует предел (8.33), функция $f_1(x)/g_1(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $x_0$ и, следовательно, всюду в этой окрестности выполняется неравенство $g_1(x) \neq 0$. Поскольку $g(x) = \psi(x) g_1(x)$ и, очевидно (почему?), $\psi(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки $x_0$, то и функция $g(x)$ обладает тем же свойством. Поэтому функция $f(x)/g(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $x_0$.

Теперь имеем:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) f_1(x)}{\psi(x) g_1(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x)} \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \quad \square$$

Поскольку обе части равенства (8.34) равноправны, то из доказанной теоремы следует, что предел, стоящий в левой части, существует тогда и только тогда, когда существует предел в правой части, причем в случае их существования они совпадают. Это делает очень удобным применение теоремы 2 на практике: ее можно использовать для вычисления пределов, не зная заранее, существует или нет рассматриваемый предел.

Упражнение 13. Доказать равенство (8.34) в случае, когда предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ равен $\infty$, $+\infty$ или $-\infty$.

## 8.4. МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ГЛАВНОЙ ЧАСТИ ФУНКЦИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ПРЕДЕЛОВ

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — функции, определенные в некоторой проколотой окрестности точки $x_0$. Если функция $\beta(x)$ представима в виде

$$\beta(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x)), \quad x \to x_0,$$

то функция $\alpha(x)$ называется *главной частью функции* $\beta(x)$ при $x$ стремящемся к $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

Примеры. 1. Главная часть функции $\sin x$, при $x \to 0$ равна $x$, ибо $\sin x = x + o(x)$ при $x \to 0$.

2. Если $P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, то функция $a_n x^n$ является главной частью многочлена $P_n(x)$ при $x \to \infty$, ибо $P_n(x) = a_n x^n + o(x^n)$ при $x \to \infty$.

Если задана функция $\beta(x)$, то ее главная часть не определяется однозначно: любая функция $\alpha(x)$, эквивалентная $\beta(x)$, является ее главной частью. Например, пусть $\beta = x + x^2 + x^3$. Поскольку, с одной стороны $x^2 + x^3 = o(x)$ при $x \to 0$, то $\beta = x + o(x)$ при $x \to 0$, а с другой стороны, $x^3 = o(x + x^2)$, при $x \to 0$, то $\beta = x + x^2 + o(x + x^2)$ при $x \to 0$. В первом случае главной частью можно считать $\alpha = x$, во втором $\alpha = x + x^2$. Однако, если задаваться определенным видом главной части, то при его разумном выборе можно добиться того, что главная часть указанного вида будет определена однозначно.

В частности, справедлива следующая лемма.

**Лемма 5.** *Если функция $\beta(x)$ обладает при $x \to x_0$, главной частью вида $A(x - x_0)^k$, $A \neq 0$, где $A$ и $k$ — постоянные, то среди всех главных частей такого вида она определяется единственным образом.*

Действительно, пусть, при $x \to x_0$,

$$\beta(x) = A(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k), \quad A \neq 0,$$

и

$$\beta(x) = A_1(x - x_0)^{k_1} + o((x - x_0)^{k_1}), \quad A_1 \neq 0.$$

Тогда $\beta(x) \sim A(x - x_0)^k$; $\beta(x) \sim A_1(x - x_0)^{k_1}$ при $x \to x_0$; поэтому $A(x - x_0)^k \sim A_1(x - x_0)^{k_1}$, т. е.

$$\lim_{x \to y_0} \frac{A(x - x_0)^k}{A_1(x - x_0)^{k_1}} = 1,$$

что справедливо лишь в случае $A = A_1$ и $k = k_1$. □

Понятие главной части функции полезно при изучении бесконечно малых и бесконечно больших и с успехом используется при решении разнообразных задач математического анализа. Довольно часто удается бесконечно малую сложного аналитического вида заменить, в окрестности данной точки, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, более простой (в каком-то смысле) функцией. Например, если $\beta(x)$ удается представить в виде $\beta(x) = A(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$, то это означает, что с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $(x - x_0)^k$ при $x \to x_0$, бесконечно малая $\beta(x)$ ведет себя в окрестности точки $x$ как степенная функция $A(x - x_0)^k$.

Покажем на примерах, как метод выделения главной части бесконечно малых применяется к вычислению пределов функций. При этом будем широко использовать полученные нами соотношения эквивалентности (8.26).

Пусть требуется найти предел (а значит, и доказать, что он существует):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+x^2)+\arcsin 3x-5x^3}{\sin 2x+\operatorname{tg}^2 x+(e^x-1)^5}.$$

Используя доказанную выше (см. (8.26)) эквивалентность $\ln(1+u)\sim u$ при $u\to 0$, имеем $\ln(1+x+x^2)\sim x+x^2$ при $x\to 0$, поэтому (см. теорему 1) $\ln(1+x+x^2)=x+x^2+o(x+x^2)$. Однако $o(x+x^2)=o(x)$ (почему?) и $x^2=o(x)$ при $x\to 0$, а следовательно,

$$\ln(1+x+x^2)=x+o(x) \text{ при } x\to 0.$$

Далее, $\arcsin 3x\sim 3x$, вследствие чего

$$\arcsin 3x=3x+o(3x)=3x+o(x).$$

Очевидно также, что

$$5x^3=o(x).$$

Из асимптотического равенства $\sin 2x\sim 2x$, получим

$$\sin 2x=2x+o(2x)=2x+o(x),$$

из $\operatorname{tg}^2 x\sim x^2$ —

$$\operatorname{tg}^2 x=x^2+o(x^2)=o(x),$$

а из $(e^x-1)^5\sim x^5$ —

$$(e^x-1)^5=x^5+o(x^5)=o(x).$$

Все эти соотношения выполняются при $x\to 0$. Теперь имеем

$$\ln(1+x+x^2)+\arcsin 3x-5x^3=$$
$$=x+o(x)+3x+o(x)-o(x)=4x+o(x),$$
$$\sin 2x+\operatorname{tg}^2 x+(e^x-1)^5=2x+o(x)+o(x)=2x+o(x),$$

поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+x^2)+\arcsin 3x-5x^3}{\sin 2x+\operatorname{tg}^2 x+(e^x-1)^5}=\lim_{x\to 0}\frac{4x+o(x)}{2x+o(x)}.$$

Но $4x+o(x)\sim 4x$, а $2x+o(x)\sim 2x$ при $x\to 0$, и, значит, по теореме 2,

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x+o(x)}{2x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x}=2.$$

Таким образом, искомый предел существует и равен 2.

При вычислении пределов функций с помощью метода выделения главной части следует иметь в виду, что в случаях, не рассмотренных в п. 8.3, вообще говоря, нельзя бесконечно малые заменять эквивалентными им. Так, например, при отыскании предела выражения $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$ было бы ошибкой заменить функцию $\sin x$ эквивалентной ей при $x\to 0$ функцией $x$. Естественный метод решения подобных задач будет дан в 13.4.

Для отыскания пределов выражений вида $u(x)^{v(x)}$ целесообразно находить предел их логарифмов. Рассмотрим подобный пример. Найдем предел $\lim\limits_{x\to 0}\cos^{1/x^2}2x$. Замечая, что

$$\cos^{1/x^2}2x = e^{\ln\cos^{1/x^2}2x}, \tag{8.35}$$

видим, что следует вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\ln\cos^{1/x^2}2x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin^2 2x)}{x^2}.$$

Так как $\ln(1-\sin^2 2x) \sim -\sin^2 2x$, то отсюда, согласно теореме 2 этого параграфа, имеем

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin^2 2x)}{x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2};$$

но $\sin^2 2x \sim (2x)^2$, а поэтому

$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2} = -2;$$

таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\ln\cos^{1/x^2}2x = -2.$$

В силу непрерывности показательной функции из (8.35) имеем

$$\lim_{x\to 0}\cos^{1/x^2}2x = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln\cos^{1/x^2}2x} = \frac{1}{e^2}.$$

Способ вычисления пределов с помощью выделения главной части функции является очень удобным, простым и вместе с тем весьма общим методом. Некоторое затруднение в его применении связано пока с тем, что еще нет достаточно общего способа выделения главной части функции. Это затруднение будет устранено в дальнейшем (см. § 13).

Упражнения. Вычислить пределы:

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-\sin^2 x}{x^2+\ln(1+3x)}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$ $(a,\ b>0;\ a,\ b\neq 1)$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+e^{\alpha x})}{\ln(1+e^{\beta x})}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$.

19. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$. Указание. Полезно сделать замену $x=\dfrac{\pi}{4}-y$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

23. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}$.