§ 9. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

9.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Определение 1. *Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и пусть x — произвольная точка этой окрестности. Если отношение*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

имеет предел при $x \to x_0$, то этот предел называется производной функции f в точке x_0 или, что то же, при $x=x_0$ и обозначается $f'(x_0)$:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \qquad (9.1)$$

Если ввести обозначение $x-x_0=\Delta x$, то определение (9.1) запишется в виде

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Полагая $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta y$, опуская обозначения аргумента и обозначая производную просто через y', получим еще одну запись определения производной:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если для некоторого значения x_0 существуют пределы

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty, \text{ или } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty,$$

то говорят, что при $x=x_0$ существует *бесконечная производная*, равная соответственно $+\infty$ или $-\infty$. Подчеркнем, что под бесконечной производной понимается только бесконечность определенного знака.

В дальнейшем под выражением «функция имеет производную» мы будем понимать всегда наличие конечной производной, если не оговорено противное.

Определение 2. *Если функция f определена в некоторой правосторонней (левосторонней) окрестности точки x_0 и существует конечный или бесконечный (определенного знака) предел $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $\left(\lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)$, то он называется соответственно конечной или бесконечной правой (левой) производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'_+(x_0)$ (или $f'_-(x_0)$).*

Правая и левая производные называются односторонними производными.

Из теоремы об односторонних пределах (см. п. 4.5) следует, что функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, имеет производную $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ существуют и $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$. В этом случае $f'(x_0)= = f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

Если функция $f(x)$ определена на некотором промежутке и в каждой его точке существует производная (причем под производной в его конце, который принадлежит промежутку, естественно, понимается соответствующая односторонняя производная), то она, очевидно, также является функцией, определенной на данном промежутке; ее обозначают через $f'(x)$. Если $y=f(x)$, то вместо $f'(x_0)$ пишут также $y'|_{x=x_0}$

Вычисление производной от функции называется *дифференцированием*.

Примеры. 1. $y=c$ (c — постоянная).

Так как $\Delta y=c-c=0$, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$ и, таким образом

$$c'=0.$$

2. $y=\sin x$. Имеем

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

и поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x.$$

Таким образом

$$(\sin x)'=\cos x.$$

3. $y=\cos x$. Так как

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos(x)=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

то будем иметь

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x.$$

Таким образом,

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

$y=a^x$. Имеем $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^x-1)$, а поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x},$$

откуда, в силу формулы (8.17), получаем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a.$$

Таким образом $(a^x)' = a^x \ln a$, в частности,

$$(e^x)' = e^x.$$

Последнее равенство показывает, что число e обладает замечательным свойством: *показательная функция с основанием e имеет производную, совпадающую с самой функцией*. Этим и объясняется то обстоятельство, что в математическом анализе в качестве основания степени и основания логарифмов используется преимущественно число e. Это очень удобно, так как упрощает вычисления.

5. $y = x^n$, n — натуральное число. Используя правило возведения бинома в степень, находим

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-1}\Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1}.$$

Так как при $\Delta x \to 0$ все слагаемые правой части, содержащие множитель Δx в степени с натуральным показателем, стремятся к нулю, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$; таким образом,

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

В дальнейшем мы увидим, что эта формула справедлива и тогда, когда n — произвольное действительное число.

9.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Определение 3. *Функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, называется дифференцируемой при $x = x_0$, если ее приращение в этой точке*

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad \Delta x = x - x_0,$$

представимо в виде

$$\Delta y = A\,\Delta x + \alpha(\Delta x), \tag{9.2}$$

где A — постоянная) и $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$* при $\Delta x \to 0$.

Линейная функция $A\,\Delta x$ (от Δx) называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$ или, короче, dy.

Таким образом,

$$\Delta y = dy + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0, \tag{9.3}$$

$$dy = A\,\Delta x. \tag{9.4}$$

---

*) При фиксированном x_0 A есть некоторое число, не зависящее от Δx; конечно, при изменении точки x_0 число A, вообще говоря, меняется.

Заметим, что дифференциал $dy = A\,\Delta x$, как и всякая линейная функция, определен для любого значения Δx: $-\infty < \Delta x < +\infty$, в то время как приращение $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, естественно, можно рассматривать только для таких Δx, для которых $x_0 + \Delta x$ принадлежит области определения функции f.

Если $A \neq 0$, т. е. если $dy \not\equiv 0$, то дифференцируемость функции в точке x_0 означает, что с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем приращение аргумента Δx, приращение функции Δy является линейной функцией от Δx. Используя терминологию п. 8.4, можно сказать, что главная часть приращения функции Δy в точке x_0 является линейной функцией относительно Δx; при этом приращение Δy и дифференциал dy — эквивалентные бесконечно малые при $\Delta x \to 0$ (см. п. 8.3).

Если же $A = 0$, т. е. $dy \equiv 0$, то $\Delta y = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Таким образом, при $A = 0$ приращение Δy является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx, когда $\Delta x \to 0$.

Для большей симметрии записи дифференциала приращение Δx обозначают dx и называют его дифференциалом независимого переменного. Таким образом, дифференциал можно записать в виде

$$dy = A\,dx.$$

Пример. Найдем дифференциал функции $y = x^3$.

В этом случае

$$\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\,\Delta x + 3x\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

При $\Delta x \to 0$ главная линейная часть выражения, стоящего справа, равна $3x^2\,\Delta x$; поэтому $dy = 3x^2\,dx$.

Пусть $f(x_0) = y_0$. Подставив в (9.3) значения $\Delta y = f(x) - y_0$, $\Delta x = x - x_0$, $dy = A\,(x - x_0)$, получим

$$f(x) = y_0 + A\,(x - x_0) + o\,(x - x_0), \qquad x \to x_0. \tag{9.5}$$

Итак, если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $x - x_0$, вблизи x_0, она равна линейной функции; иначе говоря, в этом случае функция f в окрестности точки x_0 ведет себя «почти как линейная функция»

$$y_0 + A\,(x - x_0),$$

причем погрешность при замене функции f этой линейной функцией будет тем меньше, чем меньше разность $x - x_0$, и, более того, отношение этой погрешности к разности $x - x_0$ стремится к нулю при $x \to x_0$.

Если функция f дифференцируема в каждой точке некоторого интервала, то ее дифференциал является функцией двух переменных — точки x и переменной dx:

$$dy = A\,(x)\,dx.$$

Выясним теперь связь между дифференцируемостью в точке и существованием производной в той же точке.

Теорема 1. *Для того чтобы функция f была дифференцируемой в некоторой точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную; при этом*

$$dy = f'(x_0)\,dx. \tag{9.6}$$

Доказательство необходимости. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, т. е. $\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

Поэтому производная $f'(x_0)$ существует и равна A. Отсюда $dy = f'(x_0)\,dx$.

Доказательство достаточности. Пусть существует производная $f'(x_0)$, т. е. существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x),$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$, и для $\Delta x \neq 0$

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\,\Delta x. \tag{9.7}$$

Так как $\varepsilon(\Delta x)\,\Delta x = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$ выполнение равенства (9.7) и означает дифференцируемость функции f в точке x_0. □

Подчеркнем, что в теореме 1 речь идет о конечной производной.

Таким образом, дифференцируемость функции $f(x)$ в точке x_0 равносильна существованию в этой точке конечной производной $f'(x_0)$.

Из доказанного следует, что коэффициент A, участвующий в определении дифференциала (см. (9.4)), определен однозначно, а именно $A = f'(x_0)$; тем самым и дифференциал функции в данной точке определен однозначно. Это, впрочем, вытекает также из леммы п. 8.4 о единственности главной части вида $A(x - x_0)^k$ бесконечно малой функции.

Из формулы (9.6) находим $y' = \frac{dy}{dx}$. Правая часть представляет собой дробь, числитель которой — дифференциал функции, а знаменатель — дифференциал аргумента.

Формула (9.6) позволяет находить дифференциалы функций, если известны их производные. Так, например, используя производные, найденные в п. 9.1. получаем:

$$dc = 0 \ (c \text{ — постоянная}), \quad d\cos x = -\sin x\,dx,$$
$$d\sin x = \cos x\,dx, \qquad da^x = a^x \ln a\,dx,$$

в частности, $de^x = e^x\,dx$,

$$dx^n = nx^{n-1}\,dx \ (n \text{ — натуральное число}).$$

В заключение выясним связь между дифференцируемостью и непрерывностью в данной точке.

Теорема 2. *Если функция f дифференцируема в некоторой точке, то она и непрерывна в этой точке.*

Следствие. *Если функция в некоторой точке имеет производную, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, т. е. в этой точке $\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = A \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} o(\Delta x) = 0,$$

что и означает непрерывность функции f при $x = x_0$. $\square$

Следствие непосредственно вытекает из теорем 1 и 2.

Обратим внимание на то, что если функция имеет в точке бесконечную производную, то она может быть разрывной в этой точке.

Упражнение 1. Построить пример функции, имеющей в некоторой точке бесконечную производную и разрывную в этой точке.

Заметим, что утверждение, обратное теореме 2, неверно, т. е. из непрерывности функции f в данной точке не следует ее дифференцируемость или, что равносильно (см. теорему 1), существование производной в этой точке.

Приведем примеры, подтверждающие это.

1. Функция $f(x) = |x|$, очевидно, непрерывна в точке $x = 0$ (как и во всех других), но не имеет в этой точке производной.

В самом деле, при $x \geqslant 0$ имеем $y = |x| = x$, поэтому для точки $x_0 = 0$ получим $\Delta y = \Delta x$. Следовательно,

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Аналогично, при $x \leqslant 0$ имеем $y = |x| = -x$, поэтому для точки $x_0 = 0$ в этом случае получим $\Delta y = -\Delta x$. Следовательно,

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

Тем самым доказано, что функция $f(x) = |x|$ не имеет при $x = 0$ производной, однако в этой точке существуют как левая, так и правая производные.

Отметим еще, что при $x > 0$ имеет место равенство $(|x|)' = x' = 1$, а при $x < 0$ соответственно $(|x|)' = (-x)' = -1$; поэтому для любого $x \neq 0$ справедлива формула

$$|x|' = \operatorname{sign} x.$$

Следующий пример показывает, что у функции может не быть в точке непрерывности никакой односторонней производной.

2. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{при} \quad x\neq 0,\\ 0 & \text{при} \quad x=0\end{cases}$$

(рис. 29). Тогда в точке $x=0$ имеем $\Delta y=\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}$, откуда $|\Delta y|\leqslant|\Delta x|$, и поэтому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, т. е. рассматриваемая функция непрерывна при $x=0$. Вместе с тем $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}$, и поскольку $\sin\frac{1}{x}$ не имеет в точке $x=0$ предела ни слева, ни справа (см. пример 2 в п. 4.4), то у функции $f(x)$ не существует односторонних производных при $x=0$.

Упражнение 2. Ввести понятие дифференцируемости функции справа (слева) в данной точке и доказать, что дифференцируемость справа (слева) в данной точке эквивалентна существованию в этой точке производной справа (слева).

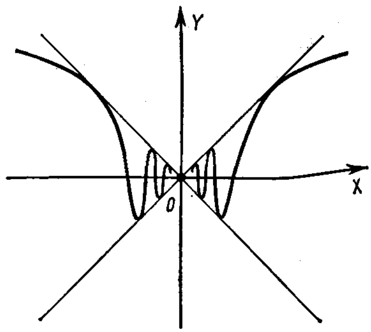

Рис. 29

Если функция f имеет производную в каждой точке некоторого промежутка (дифференцируема в каждой точке этого промежутка), то говорят, что функция f *имеет производную*, или что она *дифференцируема, на* указанном *промежутке*.

9.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Понятия производной и дифференциала функции в данной точке связаны с понятием касательной к графику функции в этой точке. Чтобы выяснить эту связь, определим прежде всего касательную.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на интервале (a, b) и непрерывна в точке $x_0\in(a, b)$. Пусть $y_0=f(x_0)$, $M_0=(x_0, y_0)$, $x_0+\Delta x\in(a, b)$, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, $M=(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. Проведем секущую M_0M (рис. 30). Она имеет уравнение

$$y=k(\Delta x)(x-x_0)+y_0, \tag{9.8}$$

где

$$k(\Delta x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{9.9}$$

Покажем, что при $\Delta x\to 0$ расстояние $|M_0M|$ от точки M_0 до точки M стремится к нулю (в этом случае говорят, что точка M

стремится к точке M_0 и пишут $M \to M_0$). Действительно, в силу непрерывности функции f при $x = x_0$ имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Следовательно, при $\Delta x \to 0$

$$|M_0M| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0.$$

Определение 4. *Если существует предел* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = k_0$, *то прямая, уравнение которой*

$$y = k_0(x - x_0) + y_0, \tag{9.10}$$

получается из уравнения $y = k(\Delta x)(x - x_0) + y_0$ *при* $\Delta x \to 0$, (*рис.* 30) *называется* (*наклонной*) *касательной к графику функции* f *в точке* (x_0, y_0).

Если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \infty$, *то прямая* (*рис.* 31), *уравнение которой*

$$x = x_0 \tag{9.11}$$

получается при $\Delta x \to 0$ *из уравнения секущей, записанного в виде* $\frac{y}{k(\Delta x)} = x - x_0 + \frac{y_0}{k(\Delta x)}$, *называется* (*вертикальной*) *касательной к графику функции* f *в точке* (x_0, y_0).

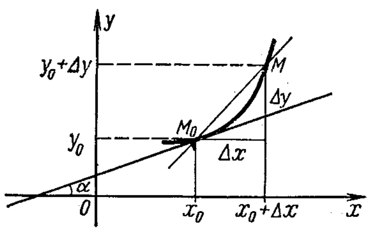

Рис. 30

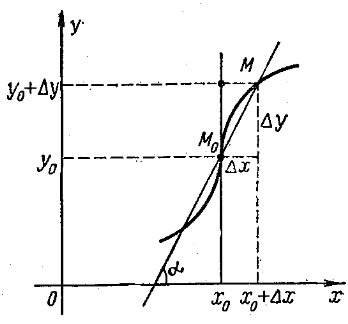

Рис. 31

Прямые (9.10) в случае конечного предела $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x)$ и (9.11) в случае, когда этот предел бесконечен, называются *предельными положениями прямой* (9.8). В силу этого данное выше определение касательной к графику функции можно перефразировать следующим образом.

Предельное положение секущей M_0M *при* $\Delta x \to 0$, *или, что то же, при* $M \to M_0$, *называется касательной к графику функции* f *в точке* M_0.

Заметим, теперь, что в силу равенства (9.9) существование конечного предела $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ означает существование конечной производной $f'(x_0)=k$. Следовательно, если у функции f в точке x_0 существует производная, то уравнение касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0, \tag{9.12}$$

где $y_0=f(x_0)$. Если же $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$, то, в силу (9.9), $\lim\limits_{\Delta x\to 0}k(\Delta x)=\infty$ и, следовательно, (см. (9.11)), уравнением касательной будет

$$x=x_0.$$

Как известно, из аналитической геометрии, коэффициент $f'(x_0)$ в уравнении (9.12) равен тангенсу угла (см. рис. 30), который рассматриваемая прямая образует с положительным направлением оси Ox:

$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha,$$

т. е. производная функции в некоторой точке равна тангенсу угла между касательной в соответствующей точке графика функции и осью абсцисс.

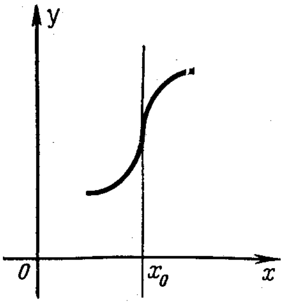

Рис. 32

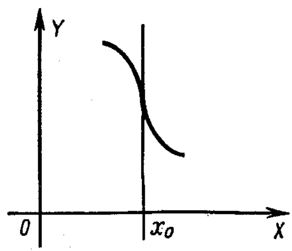

Рис. 33

Первое слагаемое правой части уравнения (9.12), т. е. выражение $f'(x_0)(x-x_0)=f'(x_0)\Delta x$, $\Delta x=x-x_0$, является дифференциалом dy функции f в точке x_0. Следовательно, в силу равенства (9.12),

$$y-y_0=dy,$$

где y — текущая ордината касательной. Таким образом, дифференциал функции в данной точке равен приращению ординаты касательной в соответствующей точке графика функции.

Замечание. Если в точке x_0 существует бесконечный предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$, то он может быть равным $+\infty$ или $-\infty$. В этом случае при $x=x_0$ существует бесконечная производная $y'=+\infty$ или $y'=-\infty$, и график функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 имеет вид, схематически изображенный на рис. 32 и 33.

Возможен также и случай, когда предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ не является бесконечностью определенного знака и, следовательно, в этой точке не существует ни конечной, ни бесконечной производной (это может, например, случиться, если в точке x_0 существуют односторонние бесконечные производные разного знака). Тогда в окрестности точки x_0 график функции имеет вид, схематически показанный на рис. 34 и 35.

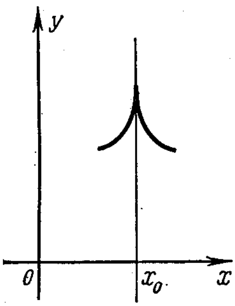

Рис. 34

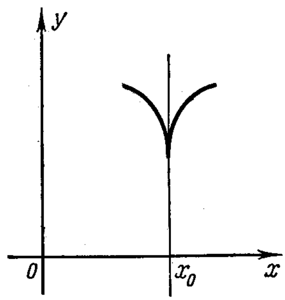

Рис. 35

Согласно сказанному выше, при условии $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ в точке $(x_0, f(x_0))$ всегда существует вертикальная касательная к графику, независимо от того, имеет функция при $x = x_0$ бесконечную производную или нет.

Возникает вопрос, не естественно ли считать, что функция имеет в данной точке бесконечную производную, если в этой точке существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, не являющийся обязательно бесконечностью определенного знака. Такое определение бесконечной производной имело бы некоторые преимущества при формулировке связи между существованием производной и наличием касательной к графику. Однако, как мы увидим в дальнейшем (см. § 11), ряд теорем перестает быть справедливым при таком понимании бесконечной производной.

Пример. Найдем касательную к параболе $y = x^2$ в точке $(1; 1)$.

Согласно п. 9.1 (см. пример 5), $y' = 2x$, поэтому $y'|_{x=1} = 2$. В силу формулы (9.12), искомая касательная имеет уравнение $y = 2(x-1)+1$, т. е. $y = 2x - 1$.

Если функция f дифференцируема в точке x_0, то, подставляя в формулу (9.5) $A = f'(x_0)$ (см. теорему 1 настоящего параграфа), имеем

$$f(x) = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \qquad x \to x_0,$$

и, значит, согласно (9.12) ($y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$) получим

$$f(x) - y_{\text{кас}} = o(x - x_0), \qquad x \to x_0.$$

Таким образом, наклонная касательная к графику функции обладает тем свойством, что разность ординат графика и этой касательной есть величина бесконечно малая более высокого порядка, при $x \to x_0$, по сравнению с приращением аргумента.

Обратно, если существует невертикальная прямая

$$y_{\text{пр}} = A(x - x_0) + y_0, \tag{9.13}$$

проходящая через точку (x_0, y_0), и такая, что

$$f(x) - y_{\text{пр}} = o(x - x_0), \qquad x \to x_0, \tag{9.14}$$

то эта прямая является касательной к графику функции в точке (x_0, y_0). Действительно, в этом случае

$$f(x) - [A(x - x_0) + y_0] = o(x - x_0),$$

т. е.

$$\Delta y = f(x) - y_0 = A(x - x_0) + o(x - x_0), \qquad x \to x_0,$$

следовательно, функция f дифференцируема в точке x_0 (см. (9.2)) и $A = f'(x_0)$ (см. теорему 1), т. е. указанная прямая совпадает с касательной (9.12).

Таким образом, *условие* (9.14) *необходимо и достаточно для того, чтобы прямая* (9.13) *являлась наклонной касательной к графику функции* $f(x)$ *в точке* (x_0, y_0). Отсюда, в частности, следует, что если существует прямая (9.13), обладающая свойством (9.14), то она единственна (последнее вытекает, например, из того, что дифференциал функции единственен, или из того, что касательная к графику функции в данной точке единственна.

9.4. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Воспользуемся, как и выше, обозначениями $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)$. Пусть для определенности $\Delta x > 0$. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, равное изменению переменной y на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$, отнесенному к единице измерения переменной x, естественно назвать *величиной средней скорости* изменения y на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$ относительно x. При стремлении Δx к нулю, т. е. при стягивании отрезка $[x_0, x_0 + \Delta x]$ к точке x_0, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ дает величину средней скорости изменения y относительно x во все меньшем и меньшем отрезке, содержащем точку x_0. Все сказанное, конечно, справедливо и при $\Delta x < 0$ для отрезка $[x_0 + \Delta x, x_0]$.

Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, если он существует, т. е. производную $f'(x_0)$, естественно поэтому назвать *величиной скорости* изменения переменной y относительно переменной x в точке x_0.

Заметим, что если в точке x_0 существует производная $f'(x_0)$, то, рассматривая предел средних скоростей изменения y относительно x на отрезках $[x_0-\Delta x,\ x_0+\Delta x]$ $(\Delta x > 0)$, содержащих точку x_0 внутри себя в качестве центра, при стягивании их к точке x_0 (при $\Delta x \to 0$) мы придем в пределе к тому же значению величины скорости изменения y относительно x в точке x_0, т. е. к $f'(x_0)$. Действительно, величина средней скорости изменения переменной y относительно x на отрезке $[x_0-\Delta x,\ x_0+\Delta x]$ равна $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$ (частному от деления изменения функции на длину отрезка, на котором произошло это изменение); отсюда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}\right]=f'(x_0).$$

Интересно заметить, что разностное отношение $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ в известном смысле лучше приближает значение производной f' в точке x, чем $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (см. об этом в п. 60.3).

На интерпретации производной как величины скорости изменения одной величины относительно другой и основано применение производной к изучению физических явлений.

Применение же дифференциала основано на том, что замена приращения функции ее дифференциалом позволяет заменить любую дифференцируемую в точке x_0 функцию линейной функцией в достаточно малой окрестности точки x_0, т. е. считать, что процесс изменения зависимой переменной «в малом» происходит линейно относительно аргумента. Иначе говоря, можно считать, что изменение функции прямо пропорционально изменению аргумента или, как говорят, что упомянутый процесс «в малом» происходит равномерно. При такой замене получающаяся погрешность оказывается бесконечно малой более высокого порядка, чем приращение аргумента.

Примеры. 1. Пусть $s=s(t)$ — закон движения материальной точки*) (рис. 36); s — длина пути, отсчитываемая вдоль траектории от некоторой начальной точки M_0; t — время. Пусть M — положение точки в момент времени t, а M' — в момент $t+\Delta t$ и Δs — длина пути от M до M', т. е. $\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)$.

*) Не следует путать закон движения точки с уравнением ее траектории, которое имеет вид $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор движущейся точки.

Отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ называется в механике *величиной средней скорости* движения на участке от M до M', а $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=v$ — величиной скорости в точке M или *величиной мгновенной скорости* в момент времени t; таким образом, $v=\frac{ds}{dt}$.

По определению дифференциала, $ds=v\,dt$; следовательно, дифференциал пути равен расстоянию, которое прошла бы точка за промежуток времени от момента t до $t+\Delta t$, если бы она двигалась равномерно со скоростью, равной мгновенной скорости точки в момент t. Величина же Δs действительного перемещения точки равна $\Delta s=ds+o(\Delta t)$.

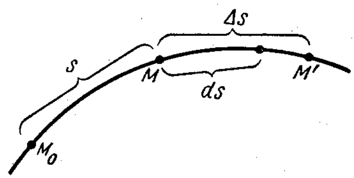

Рис. 36

Мы видим, что с точки зрения механики замена Δs через ds означает, что мы считаем движение на рассматриваемом участке равномерным (в смысле величины скорости *)).

2. Пусть $q=q(t)$ — количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника; t — время; Δt — некоторый промежуток времени; $\Delta q=q(t+\Delta t)-q(t)$ — количество электричества, протекающее через указанное сечение за промежуток времени от момента t до момента $t+\Delta t$. Тогда $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ называется *средней силой тока* за промежуток времени Δt и обозначается через $I_{\text{ср}}$, а предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0} I_{\text{ср}}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}$ называется *силой тока в данный момент времени* t или *мгновенным током* и обозначается I. Таким образом, $I=\frac{dq}{dt}$. Дифференциал $dq=I\,\Delta t$ равен количеству электричества, протекшего через поперечное сечение проводника за момент времени Δt, если сила тока была бы постоянной и равной силе тока в момент t. Как всегда, $\Delta q-dq=o(\Delta t)$.

3. Пусть дан неоднородный стержень **) длины l и пусть $m=m(x)$ — масса части стержня длины x, $0\leqslant x\leqslant l$, отмеряемой от одного фиксированного конца (рис. 37). Тогда $\Delta m=m(x+\Delta x)-m(x)$ — масса части стержня, ограниченной точками, расположенными соответственно на расстоянии x и $x+\Delta x$ от указанного конца. Величина $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ называется *средней линейной плотностью*

---

*) Следует иметь в виду, что скорость — вектор и потому характеризуется не только величиной, но и направлением.

**) Стержень называется однородным, если два любых его участка одинаковой длины имеют одинаковую массу, и неоднородным — в противном случае.

стержня на указанном участке и обозначается $\rho_{\text{ср}}$. Предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\rho_{\text{ср}}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}$ называется *линейной плотностью* стержня в данной точке и обозначается ρ. Таким образом,

$$\rho=\frac{dm}{dx}.$$

Если плотность ρ постоянна, то стержень будет однородным. Для произвольного, вообще говоря, неоднородного стержня дифференциал $dm=\rho\,\Delta x$ равен массе однородного стержня длины Δx с постоянной плотностью ρ, равной плотности рассматриваемого стержня в данной точке.

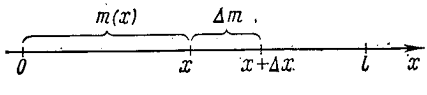

Рис. 37

Мы видим на этом примере, что, интерпретируя производную как величину скорости, мы должны понимать это в широком смысле слова. Например, плотность стержня тоже «скорость», а именно — скорость изменения массы с изменением длины.

9.5. ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ, СВЯЗАННЫЕ С АРИФМЕТИЧЕСКИМИ ДЕЙСТВИЯМИ НАД ФУНКЦИЯМИ

Все функции, рассматриваемые в этом пункте, предполагаются определенными в некоторой окрестности точки x_0.

1°. *Пусть функции $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ имеют производные в точке x_0. Тогда их сумма $y_1+y_2=f_1(x)+f_2(x)$ также имеет в точке x_0 производную и*

$$(y_1+y_2)'=y_1'+y_2'. \tag{9.15}$$

Таким образом, производная суммы функций равна сумме их производных.

Действительно, пусть $y=f_1(x)+f_2(x)$, $\Delta y_1=f_1(x_0+\Delta x)-f_1(x_0)$, $\Delta y_2=f_2(x_0+\Delta x)-f_2(x_0)$. Тогда

$$\Delta y=[f_1(x_0+\Delta x)+f_2(x_0+\Delta x)]-[f_1(x_0)-f_2(x_0)]=\Delta y_1+\Delta y_2;$$

поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y_1}{\Delta x}+\frac{\Delta y_2}{\Delta x},\qquad \Delta x\neq 0. \tag{9.16}$$

Пределы $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_1}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_2}{\Delta x}$, согласно предположению, существуют и равны соответственно производным y_1' и y_2' в точке x_0, поэтому предел левой части равенства (9.16) при $\Delta x\to 0$ существует и равен $y_1'+y_2'$. Но $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$, поэтому y' в точке x_0 существует и $y'=y_1'+y_2'$. □

2°. *Пусть функции $y_1=f(x)$ и $y_2=f_2(x)$ имеют производные в точке x_0. Тогда и их произведение $y_1y_2=f_1(x)f_2(x)$ имеет в точке x_0 производную, причем*

$$(y_1y_2)'=y_1'y_2+y_1y_2', \tag{9.17}$$

а если $y_2\neq 0$, в x_0, то частное $\frac{y_1}{y_2}=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ также имеет в точке x_0 производную, причем

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)'=\frac{y_1'y_2-y_1y_2'}{y_2^2}. \tag{9.18}$$

Действительно, пусть $y=f_1(x)f_2(x)$, $\Delta y_1=f_1(x_0+\Delta x)-f_1(x_0)$, $\Delta y_2=f_2(x_0+\Delta x)-f_2(x_0)$; тогда

$$\Delta y=f_1(x_0+\Delta x)f_2(x_0+\Delta x)-f_1(x_0)f_2(x_0)=$$
$$=[f_1(x_0)+\Delta y_1][f_2(x_0)+\Delta y_2]-f_1(x_0)f_2(x_0)=$$
$$=\Delta y_1f_2(x_0)+f_1(x_0)\Delta y_2+\Delta y_1\Delta y_2.$$

отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y_1}{\Delta x}f_2(x_0)+f_1(x_0)\frac{\Delta y_2}{\Delta x}+\frac{\Delta y_1}{\Delta x}\Delta y_2,$$

и так как в точке x_0

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_1}{\Delta x}=y_1', \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_2}{\Delta x}=y_2', \quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y_2=0$$

(функция $y_2=f_2(x)$ имеет производную, а потому и непрерывна в точке x_0), то при $x=x_0$ существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$, и $y'=y_1'y_2+$ $+y_1y_2'$. □

Пусть теперь $f_2(x_0)\neq 0$; тогда существует такое $h>0$, что $f(x_0+\Delta x)\neq 0$ для всех Δx, удовлетворяющих условию $|\Delta x|<h$. Если положить $z=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ и выбрать Δx так, что $|\Delta x|<h$, то

$$\Delta z=\frac{f_1(x_0+\Delta x)}{f_2(x_0+\Delta x)}-\frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)}=\frac{f_1(x_0)+\Delta y_1}{f_2(x_0)+\Delta y_2}-\frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)}=\frac{\Delta y_1f_2(x_0)-f_1(x_0)\Delta y_2}{[f_2(x_0)+\Delta y_2]f_2(x_0)},$$

поэтому

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x}f_2(x_0)-f_1(x_0)\frac{\Delta y_2}{\Delta x}}{[f_2(x_0)+\Delta y_2]f_2(x_0)}.$$

Отсюда, как и при доказательстве формулы (9.17), заключаем, что в точке $x=x_0$ существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=z'$, и $z'=\frac{y_1'y_2-y_1y_2'}{y_2^2}$. □

Следствие 1. *Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x_0. Тогда функция $cf(x)$ (c — постоянная) также имеет в этой точке производную, причем*

$$(cy)'=cy',$$

т. е. производная произведения функции на постоянную равна произведению этой постоянной на производную функции.

Действительно, вспоминая, что $c'=0$, из формулы (9.17) получим

$$(cy)'=c'y+cy'=cy'. \ \square \tag{9.19}$$

Следствие 2. *Пусть функции $y_1=f_1(x), \ldots, y_n=f_n(x)$ имеют производные в точке x_0; тогда функция $c_1f(x)+\ldots+c_nf_n(x)$ также имеет в точке x_0 производную, причем*

$$(c_1y_1+\ldots+c_ny_n)'=c_1y_1'+\ldots+c_ny_n',$$

т. е. производная линейной комбинации функций равна линейной комбинации с этими же коэффициентами соответствующих производных.

Это утверждение непосредственно выводится из формул (9.15) и (9.19) с помощью метода математической индукции.

Замечание. Используя свойства бесконечных пределов, относящиеся к арифметическим действиям над функциями (см. п. 4.7), можно установить и соответствующие свойства бесконечных производных. Например, если существует конечная производная $y_1'(x_0)$ и бесконечная (определенного знака) производная $y_2'(x_0)$, то у функции $y(x)\overset{\text{def}}{=}y_1(x)+y_2(x)$ в точке x_0 существует бесконечная производная того же знака. Например, если $y_2'(x_0)=+\infty$, то $y'(x_0)=+\infty$. Действительно, $\Delta y=\Delta y_1+\Delta y_2$. Поэтому если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_1}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_2}{\Delta x}=+\infty$, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x}+\frac{\Delta y_2}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_1}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_2}{\Delta x}=+\infty,$$

т. е. $y'(x_0)=+\infty$.

Примеры. 1. Пусть $y=e^x\sin x-2x^2\cos x$; в силу формул (9.15), (9.17) и (9.19) имеем

$$y'=(e^x\sin x)'-2(x^2\cos x)'=$$
$$=e^x\sin x+e^x\cos x-2(2x\cos x-x^2\sin x).$$

2. Пусть $y=\operatorname{tg}x$; так как $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$, то по формуле (9.18) получаем

$$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким образом

$$(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

3. Аналогично для $y=\operatorname{ctg}x$

$$y'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(-\sin x)\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x},$$

т. е.

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Свойства 1° и 2° переносятся и на дифференциалы функций. При тех же предположениях относительно дифференцируемости в точке x_0 имеем:

$$d(y_1 + y_2) = dy_1 + dy_2; \qquad d(y_1 y_2) = y_2\, dy_1 + y_1\, dy_2,$$

$$d(cy) = c\, dy; \qquad d\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{y_2\, dy_1 - y_1\, dy_2}{y_2^2}.$$

Вычислим, например, дифференциал произведения $y = y_1 y_2$:

$$dy = y'\, dx = (y_1 y_2)'\, dx = y_1' y_2\, dx + y_1 y_2'\, dx = y_2\, dy_1 + y_1\, dy_2,$$

ибо $y_1'\, dx = dy_1$, $y_2'\, dx = dy_2$.

Аналогично доказываются и остальные формулы.

9.6. ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема 3. *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 и пусть при $x = x_0$ существует производная $\frac{df(x_0)}{dx} \neq 0$; тогда и обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем*

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}, \tag{9.20}$$

т. е. производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.

Доказательство. Зафиксируем какую-то окрестность точки x_0, на которой функция f определена, непрерывна и строго монотонна и, будем рассматривать f только в этой окрестности. Тогда, как доказано ранее (см. п. 6.3), обратная функция определена и непрерывна на некотором интервале, содержащем точку y_0; он является образом указанной выше окрестности точки x_0. Поэтому, если $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $y = f(x)$, то $\Delta x \to 0$ равносильно $\Delta y \to 0$.

Для любых $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$ имеем

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

При $\Delta x \to 0$ (или, что то же в силу сказанного выше, при $\Delta y \to 0$) предел правой части существует, значит, существует и предел левой части, причем

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}.$$

Но $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{df^{-1}(y_0)}{dy}$, поэтому $\frac{df^{-1}(y_0)}{dy}=\frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}$. □

Эта теорема допускает наглядную геометрическую интерпретацию (рис. 38). Как известно, $\frac{df(x_0)}{dx}=\operatorname{tg}\alpha$, где α — величина угла, образуемого касательной графика функции f в точке (x_0, y_0) с положительным направлением оси Ox, а $\frac{df^{-1}(y_0)}{dx}=\operatorname{tg}\beta$, где β — величина угла, образованного той же касательной с осью Oy.

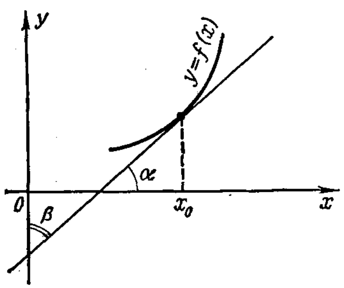

Рис. 38

Очевидно, $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, а поэтому

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy}=\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}=\frac{1}{\operatorname{ctg}(\pi/2-\alpha)}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}.$$

Упражнения. 1. Доказать, что если функция $f=f(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0, если в этой точке существует производная и $\frac{df(x_0)}{dx}=0$, то обратная функция $f^{-1}(y)$ имеет в точке $y_0=f(x_0)$ бесконечную производную; следовательно, если считать условно, что $\frac{1}{0}=\infty$, то формула (9.20) справедлива и в этом случае.

4. Сформулируйте и докажите аналог теоремы 3 для односторонних производных (конечных и бесконечных).

Примеры. 1. $y=\arcsin x$, $x=\sin y$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$. Применяя формулу (9.20), получаем

$$\frac{dy}{dx}=(\arcsin x)'=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}.$$

Так как $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$, то $\cos y>0$, поэтому $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$. Таким образом,

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. $y=\arccos x$, $x=\cos y$, $0\leqslant y\leqslant\pi$, $-1\leqslant x\leqslant 1$.
Аналогично предыдущему примеру имеем:

$$\frac{dy}{dx}=(\arccos x)'=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

т. е.

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. $y=\operatorname{arctg} x$, $x=\operatorname{tg} y$, $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$, $-\infty<x<+\infty$. Имеем:

$$\frac{dy}{dx}=(\operatorname{arctg} x)'=1\Big/\frac{dx}{dy}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2};$$

итак,

$$(\operatorname{arctg} x)'=1/(1+x^2).$$

4. $y=\operatorname{arcctg} x$, $x=\operatorname{ctg} y$, $0<y<\pi$, $-\infty<x<\infty$.
В этом случае

$$\frac{dy}{dx}=(\operatorname{arcctg})'=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\sin^2 y=-\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}=-\frac{1}{1+x^2},$$

т. е.

$$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

5. Если $y=\log_a x$, $x=a^y$, $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$, $-\infty<y<+\infty$, то

$$\frac{dy}{dx}=(\log_a x)'=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a},$$

т. е.

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a};$$

в частности, при $a=e$ имеем

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

9.7. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема 4. *Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z=F(y)$ имеет производную в точке $y_0=f(x_0)$. Тогда сложная функция $\Phi(x)=F[f(x)]$ также имеет производную при $x=x_0$, причем*

$$\Phi'(x_0)=F'(y_0)f'(x_0). \tag{9.21}$$

Если сложную функцию Φ обозначить символом $\Phi = F \circ f$ (см. п. 4.2), то формулу (9.21) можно записать в виде

$$(F \circ f)'(x_0) = F'(f(x_0)) f'(x_0).$$

Следует обратить внимание на то, что утверждение о существовании в точке x_0 производной у сложной функции $F[f(x)]$ содержит в себе предположение о том, что рассматриваемая сложная функция имеет смысл, т. е. определена в некоторой окрестности точки x_0. Опуская значение аргумента и используя запись производной с помощью дифференциалов, равенство (9.21) можно переписать в виде

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

Доказательство. Согласно теореме 2 настоящего параграфа, функции $y = f(x)$ и $z = F(y)$ непрерывны соответственно в точках x_0 и $y_0 = f(x_0)$, и, следовательно, в силу теоремы 2 из п. 5.2, в некоторой окрестности точки x_0 определена сложная функция $\Phi(x) = F[f(x)]$.

Положим, как всегда, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta x = x - x_0$. Функция F имеет в точке y_0 производную и, значит, дифференцируема в этой точке (см. п. 9.2), т. е.

$$\Delta z = F'(y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y, \tag{9.22}$$

где $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$. Функция $\varepsilon(\Delta y)$ не определена при $\Delta y = 0$. Для дальнейшего удобнее доопределить ее и при $\Delta y = 0$. Это можно сделать произвольным образом. Проще всего продолжить ее «по непрерывности», положив $\varepsilon(0) = 0$. Доопределенная таким образом функция $\varepsilon(\Delta y)$ непрерывна при $\Delta y = 0$.

Поделим теперь обе части равенства (9.22) на $\Delta x \neq 0$:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = F'(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{9.23}$$

Функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, т. е. существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0). \tag{9.24}$$

Из существования производной $f'(x_0)$ следует непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

При $\Delta x = 0$ имеем $\Delta y = 0$. Следовательно, приращение Δy, рассматриваемое как функция Δx, непрерывно в точке $\Delta x = 0$. Поэтому, согласно правилу замены переменных в предельных соотношениях, содержащих непрерывные функции (см. п. 5.2),

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0. \tag{9.25}$$

Теперь из (9.23), переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, в силу (9.24) и (9.25), получим формулу (9.21). □

Замечание. 1. При доказательстве теоремы было сказано, что $\varepsilon(\Delta y)$ можно доопределить произвольно при $\Delta y = 0$. Однако если, например, взять $\varepsilon(0) = 1$, то на первый взгляд формула (9.21) не получится, и не только потому, что в этом случае нельзя применить правило замены переменного для предела непрерывной функции, но и потому, что если $\varepsilon(0) = 1$ и если существуют такие $\Delta x \neq 0$, для которых $\Delta y = 0$, то равенство (9.25) будет неверным. Это, однако, не влияет на окончательный результат. Действительно, если для сколь угодно малых $\Delta x \neq 0$ существует $\Delta y = 0$, то отсюда легко следует, что

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

и, следовательно, второе слагаемое в правой части равенства (9.23) все равно стремится к нулю при $\Delta x \to 0$ (более того, в этом случае, как легко видеть, все члены равенства (9.23) стремятся к нулю). Можно было воспользоваться также и тем, что из формулы (9.2) следует, что $\alpha(0) = 0$.

На примере доказательства теоремы 4 хорошо видно, как удачно выбранная вспомогательная конструкция (в данном случае просто доопределение в нуле функции $\varepsilon(\Delta y)$ нулем, позволившее использовать правило замены переменного для пределов непрерывных функций), может существенно упростить доказательство.

Замечание 2. Формула (9.21) для производной сложной функции остается справедливой и в случае, когда под производными понимаются соответствующие односторонние производные, если только предварительно потребовать, чтобы сложная функция, необходимая для определения рассматриваемой односторонней (или двусторонней) производной, стоящей в левой части формулы (9.21), имела смысл.

Следствие (инвариантность формы первого дифференциала относительно преобразования независимой переменной):

$$dz = F'(y_0)\, dy = \Phi'(x_0)\, dx. \tag{9.26}$$

В этой формуле $dy = f'(x)\, dx$ является дифференциалом функции, а dx — дифференциалом независимой переменной.

Таким образом, дифференциал функции имеет один и тот же вид: произведение производной по некоторой переменной на «дифференциал этой переменной» — независимо от того, является эта переменная в свою очередь функцией или независимой переменной.

Докажем это. Согласно формуле (9.6), $dz = \Phi'(x_0)\,dx$, отсюда, применив формулу (9.21) для производной сложной функции, получим $dz = F'(y_0) f'(x_0)\,dx$, но $f'(x_0)\,dx = dy$, а поэтому $dz = F'(y_0)\,dy$, что и требовалось доказать.

Формулу (9.26) можно интерпретировать и несколько иначе, если вспомнить, что дифференциалом функции в точке является функция, линейная относительно дифференциала независимой переменной. Согласно (9.21) дифференциал функции $\Phi(x) = F[f(x)]$ имеет вид $d\Phi = F'(y_0) f'(x_0)\,dx$, т. е. является результатом подстановки линейной функции $dy = f'(x_0)\,dx$, посредством которой задан дифференциал df (где $y = f(x)$), в линейную функцию $dz = F'(y_0)\,dy$, задающую дифференциал dF (где $z = F(y)$). Иначе говоря, дифференциал композиции $\Phi = F \circ f$ является композицией дифференциалов dF и df:

$$d(F \circ f) = dF \circ df.$$

Отметим, что теорема 4 по индукции распространяется на суперпозицию любого конечного числа функций. Например, для сложной функции вида $z(y(x(t)))$ в случае дифференцируемости функций $z(y)$, $y(x)$ и $x(t)$ в соответствующих точках имеет место формула

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Если приходится иметь дело со сложной функцией $z = z(y)$, $y = y(x)$, то для обозначения ее производной z' употребляется также нижний индекс x или y, указывающий, по какой из переменных берется производная, т. е. пишут z'_x или z'_y. Часто для простоты штрих опускается, т. е. вместо z'_x пишется просто z_x. В этих обозначениях формула (9.21) имеет вид

$$z_x = z_y y_x.$$

Примеры. 1. Пусть $y = x^\alpha$, $x > 0$, найдем $\frac{dy}{dx}$. Имеем $x^\alpha = e^u$, где $u = \alpha \ln x$. Замечая, что $\frac{du}{dx} = \frac{\alpha}{x}$, получаем

$$\frac{dx^\alpha}{dx} = \frac{de^u}{dx} = \frac{de^u}{du}\frac{du}{dx} = e^u \cdot \frac{\alpha}{x} = e^{\alpha \ln x}\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Таким образом,

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Так, если $y = x^2$, то $y' = 2x$;
если $y = 1/x = x^{-1}$, то $y' = (-1)\,x^{-2} = -1/x^2$;
если $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$, то $y' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Если функция $y=x^{\alpha}$ определена при $x=0$ или при $x<0$, то при этих значениях x она также имеет производную $y'=\alpha x^{\alpha-1}$ Например, при $\alpha=1$, т. е. для функции $y=x$ в точке $x=0$, как и во всех других точках $y'=1$.

2. Пусть $y=|f(x)|$, где функция $f(x)$ дифференцируема на некотором интервале (a, b). Полагая $u=f(x)$, получаем $y=|u|$, $u=f(x)$. Пользуясь формулой из примера 1, п. 9.2, находим $y'=(|u|)'u'=f'(x)\cdot\operatorname{sign}f(x)$. Эта формула справедлива для всех $x\in(a, b)$, для которых $f(x)\neq 0$; она позволяет найти односторонние производные в тех точках, где $f(x)=0$.

3. Найдем производную функции

$$y=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \quad (x\neq a,\ x\neq -a).$$

В силу сказанного в примере 2

$$y'=\frac{1}{2a}\frac{\operatorname{sign}\dfrac{x-a}{x+a}}{\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)'=\frac{1}{2a}\,\frac{x+a}{x-a}\,\frac{x+a-(x-a)}{(x+a)^2}=\frac{1}{x^2-a^2}.$$

3. Найдем производную функции $y=\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|$. Аналогично предыдущему получим

$$y'=\frac{\operatorname{sign}(x+\sqrt{x^2+A})}{|x+\sqrt{x^2+A}|}(x+\sqrt{x^2+A})'=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+A}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+A}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}.$$

4. Пусть $y=\ln^2\arcsin\frac{1}{x}$, $x>1$. Найдем производную и дифференциал этой функции:

$$y'=\left(\ln^2\arcsin\frac{1}{x}\right)'=2\ln\arcsin\frac{1}{x}\left(\ln\arcsin\frac{1}{x}\right)'=$$

$$=2\ln\arcsin\frac{1}{x}\,\frac{1}{\arcsin\dfrac{1}{x}}\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)'=2\,\frac{\ln\arcsin\dfrac{1}{x}}{\arcsin\dfrac{1}{x}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}\left(\frac{1}{x}\right)'=$$

$$=-\frac{2\ln\arcsin\dfrac{1}{x}}{|x|\sqrt{x^2-1}\arcsin\dfrac{1}{x}}.$$

Отсюда дифференциал находится непосредственно по формуле $dy=y'\,dx$; однако, если бы мы еще не имели готового выражения для производной, т. е. дифференциал можно было бы найти и непосредственно, используя его инвариантность относительно выбора переменных:

$$d\left(\ln^2 \arcsin\frac{1}{x}\right)=2\ln\arcsin\frac{1}{x}\,d\left(\ln\arcsin\frac{1}{x}\right)=$$
$$=2\ln\arcsin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\arcsin\frac{1}{x}}\,d\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)=$$
$$=\frac{2\ln\arcsin\frac{1}{x}}{\arcsin\frac{1}{x}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\,d\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-2\ln\arcsin\frac{1}{x}}{|x|\sqrt{x^2-1}\arcsin\frac{1}{x}}\,dx.$$

5. Выведем с помощью теоремы 4 еще одну часто применяемую формулу. Пусть $y=u^v$, где $u=u(x)>0$, $v=v(x)$. Представим нашу функцию в виде $y=e^{v\ln u}$ и вычислим $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{de^{v\ln u}}{dx}=e^{v\ln u}\frac{d}{dx}(v\ln u)=u^v\left(\frac{dv}{dx}\ln u+\frac{v}{u}\frac{du}{dx}\right)=$$
$$=u^v\frac{dv}{dx}\ln u+vu^{v-1}\frac{du}{dx}. \qquad (9.27)$$

Таким образом, производная функции u^v равна сумме двух слагаемых, из которых первое совпадает с производной u^v в предположении, что u — постоянная, а второе — с производной u^v в предположении, что v — постоянная.

С помощью правила дифференцирования сложной функции можно находить и *производные функций, заданных неявно.*

6. Пусть дифференцируемая функция $y=y(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y)=0$ (см. п. 4.2). (Вопрос о том, как установить что данное уравнение на самом деле определяет некоторую функцию и будет ли она дифференцируемой мы пока оставляем в стороне; он будет изучен в дальнейшем.) Дифференцируя тождество $F(x, y(x))\equiv 0$ как сложную функцию, можно вычислить производную $\frac{dy}{dx}$.

В качестве примера вычислим производную неявной функции $y(x)$, определенной уравнением $x^2+y^2=a^2$. В данном конкретном случае существование подобной функции не вызывает сомнения, так как ею, например, является $y=\sqrt{a^2-x^2}$, а также $y=-\sqrt{a^2-x^2}$. Продифференцируем уравнение $x^2+y^2=a^2$, считая y функцией от x. Получим $2x+2yy'=0$; отсюда $y'=-\frac{x}{y}$.

С подобными задачами приходится сталкиваться в геометрии. Пусть, например, требуется найти касательную к окружности

$x^2+y^2=25$ в точке (3; 4). Угловой коэффициент k касательной равен производной: $k=y'$, и, значит, в нашем случае $k=-\frac{x}{y}$. Для рассматриваемой точки $k=-\frac{3}{4}$; поэтому уравнение искомой касательной можно записать в виде $y-4=-\frac{3(x-3)}{4}$, т. е. $3x+4y-25=0$.

Применим метод дифференцирования неявных функций к выводу формул, полученных ранее другим путем.

7. Рассмотрим снова функцию $y=u^v$. Логарифмируя, получаем ее неявное задание $\ln y=v\ln u$. Дифференцируя обе части этого уравнения будем иметь $y'/y=v'\ln u+\frac{v}{u}u'$ (выражение $(\ln y)'=y'/y$ называется *логарифмической производной* функции $y(x)$), или $y'=y\left(v'\ln u+\frac{v}{y}u'\right)$; подставляя сюда $y=u^v$, приходим снова к формуле (9.27).

Другой пример. Функция $y=\arcsin x$ неявно задается уравнением $x=\sin y$. Дифференцируя обе части по x, получаем $1=y'\cos y$, откуда $y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, т. е. то же, что и в п. 9.6.

8. В случае, когда функция задана не одной формулой, а несколькими, вычисление производной приходится иногда производить непосредственно, исходя из определения производной. Найдем, например, производную функции

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{при } x\neq 0, \\ 0 & \text{при } x=0. \end{cases}$$

При $x\neq 0$ производная существует и вычисляется по формулам дифференцирования: $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$. В точке же $x=0$ производная находится непосредственно по ее определению

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

Таким образом, функция $f(x)$ дифференцируема на всей вещественной оси.

Замечание. Используя теорему 4, можно все полученные нами формулы для производных основных элементарных функций записать в несколько более общем виде: если $u=u(x)$ — дифференцируемая функция, то

$$(\sin u)' = u' \cos u; \quad (e^u)' = e^u u';$$
$$(\cos u)' = -u' \sin u; \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u} \ (u > 0);$$
$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}; \quad (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$
$$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}; \quad (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$
$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u' \ (u > 0); \quad (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2};$$
$$(a^u)' = a^u u' \ln a; \quad (\operatorname{arctg} u) = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

Из перечисленных формул видно (при $u = x$), что производные основных элементарных функций являются элементарными функциями.

Полученные же нами в совокупности формулы дают возможность вычислить производную и дифференциал любой элементарной функции в случае, если эта производная существует.

Следует иметь в виду, однако, что не всякая элементарная функция имеет производные во всех точках своей области определения. Примером элементарной дифференцируемой не во всех точках функции является функция $|x| = \sqrt{x^2}$, она, как мы знаем, не имеет производной в точке $x = 0$ (см. п. 9.2).

Упражнения 5. Ответить на вопросы. Можно ли доказать формулу $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ при $dy \neq 0$, просто умножив и разделив $\frac{dz}{dx}$ на dy? Можно или нет доказать формулу $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ при $dx \neq 0$, разделив числитель и знаменатель дроби $\frac{dx}{dy}$ на dx?

6. Выяснить будет ли функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

непрерывной в точке $y = 0$? Будет ли она иметь производную в этой точке? Будет ли она иметь в ней односторонние производные?

9.8. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРОИЗВОДНЫЕ

Определение 5. *Функции* $(e^x + e^{-x})/2$ *и* $(e^x - e^{-x})/2$ *называются соответственно гиперболическим косинусом и гиперболическим синусом и обозначаются* $\operatorname{ch} x$ *и* $\operatorname{sh} x$:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

Справедлива формула

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \tag{9.28}$$

Действительно,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}\right) = 1.$$

Справедлива также формула

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x;$$

в самом деле,

$$2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2 \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x.$$

Эти формулы напоминают соотношения между обычными (как их иногда называют, круговыми) синусом и косинусом. Для $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ имеется и ряд других соотношений, аналогичных соответствующим формулам для $\sin x$ и $\cos x$. Этим и объясняется название функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$. Эпитет же «гиперболический» связан с тем обстоятельством, что формулы

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t \tag{9.29}$$

параметрически задают гиперболу, подобно тому как формулы

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t \tag{9.30}$$

параметрически задают окружность. В самом деле, если возвести в квадрат равенства (9.29), вычесть одно из другого и воспользоваться формулой (9.28), то получим $x^2 - y^2 = a^2$, т. е. уравнение равнобочной гиперболы.

Подобным же образом из уравнения (9.30) вытекает $x^2 + y^2 = a^2$, т. е. уравнение окружности.

Найдем производные гиперболических синуса и косинуса. Замечая, что $(e^{-x})' = -e^{-x}$, имеем

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Таким образом, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

Частные $\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ и $\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ по аналогии с обычными синусами и косинусами называются соответственно *гиперболическим тангенсом* и *гиперболическим котангенсом* и обозначаются

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x, \quad \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{cth} x.$$

Упражнения. 7. Вычислить производные функций $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$. Построить графики функций $y=\operatorname{ch} x$, $y=\operatorname{sh} x$, $y=\operatorname{th} x$ и $y=\operatorname{cth} x$. Найти производные их обратных функций. Выразить указанные обратные функции и их производные через логарифмы (функция, обратная к $\operatorname{ch} x$, определяется дополнительно условием неотрицательности ее значений).

Вычислить производные следующих функций (во всех точках, в которых это возможно).

8. $y=x^2(x^3-1)^4$.
9. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-x+1}$.
10. $y=\sqrt[3]{x}$.
11. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
12. $y=x^2\sin 2x+2x\cos 3x$.
13. $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.
14. $y=\sqrt[5]{x}\operatorname{ctg} 2x-\dfrac{1}{2}\ln x\operatorname{arctg} x$.
15. $y=2^{x^3}\ln\arccos x$.
16. $y=\arccos\dfrac{1}{x}$.
17. $y=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$.
18. $y=x^2|x|$.
19. $y=x^x$.
20. $y=|x|\ln|x|$.
21. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$.
22. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+$ $+\dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.
23. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$.
24. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.
25. $y=\sqrt[x]{x}$.
26. $y=x^{x^a}+x^{a^x}+a^{x^x}$.
27. $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$.
28. $y=\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}-\ln\operatorname{cth}\dfrac{x}{2}$.
29. $y=\arccos\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$.
30. $y=\dfrac{b}{a}x+\dfrac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\times$ $\times\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right)$ $(0\leqslant b<a)$.

§ 10. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

10.1. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Определение 1. *Пусть функция $f(x)$, определенная на интервале (a, b) имеет в каждой точке $x\in(a, b)$ производную $f'(x)$ и пусть $x_0\in(a, b)$. Если при $x=x_0$ производная функции $f'(x)$ существует, то она называется второй производной (или производной второго порядка) функции f и обозначается через $f''(x_0)$ или $f^{(2)}(x_0)$.*

Таким образом, $f''(x_0)=[f'(x)]'_{x=x_0}$ или, опуская обозначение аргумента, $y''=(y')'$. Аналогично определяется производная $y^{(n)}$ любого порядка $n=1, 2, \ldots$: *если существует производная $y^{(n-1)}$ порядка $n-1$* (при этом под производной нулевого порядка подразумевается сама функция: $y^{(0)}=y$, а под производной первого порядка — y'), то, по определению, $y^{(n)}=[y^{(n-1)}]'$.