Упражнения. 7. Вычислить производные функций $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$. Построить графики функций $y=\operatorname{ch} x$, $y=\operatorname{sh} x$, $y=\operatorname{th} x$ и $y=\operatorname{cth} x$. Найти производные их обратных функций. Выразить указанные обратные функции и их производные через логарифмы (функция, обратная к $\operatorname{ch} x$, определяется дополнительно условием неотрицательности ее значений).

Вычислить производные следующих функций (во всех точках, в которых это возможно).

8. $y=x^2(x^3-1)^4$.
9. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-x+1}$.
10. $y=\sqrt[3]{x}$.
11. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
12. $y=x^2\sin 2x+2x\cos 3x$.
13. $y=\ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.
14. $y=\sqrt[5]{x}\operatorname{ctg} 2x-\dfrac{1}{2}\ln x \operatorname{arctg} x$.
15. $y=2^{x^3}\ln\arccos x$.
16. $y=\arccos\dfrac{1}{x}$.
17. $y=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$.
18. $y=x^2|x|$.
19. $y=x^x$.
20. $y=|x|\ln|x|$.
21. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$.
22. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.
23. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$.
24. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.
25. $y=\sqrt[x]{x}$.
26. $y=x^{x^a}+x^{a^x}+a^{x^x}$.
27. $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$.
28. $y=\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}-\ln \operatorname{cth}\dfrac{x}{2}$.
29. $y=\arccos\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$.
30. $y=\dfrac{b}{a}x+\dfrac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\times \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right)$ $(0\le b<a)$.

§ 10. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

10.1. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Определение 1. *Пусть функция $f(x)$, определенная на интервале (a, b) имеет в каждой точке $x\in(a, b)$ производную $f'(x)$ и пусть $x_0\in(a, b)$. Если при $x=x_0$ производная функции $f'(x)$ существует, то она называется второй производной (или производной второго порядка) функции f и обозначается через $f''(x_0)$ или $f^{(2)}(x_0)$.*

Таким образом, $f''(x_0)=[f'(x)]'_{x=x_0}$ или, опуская обозначение аргумента, $y''=(y')'$. Аналогично определяется производная $y^{(n)}$ любого порядка $n=1, 2, \ldots$: *если существует производная $y^{(n-1)}$ порядка $n-1$* (при этом под производной нулевого порядка подразумевается сама функция: $y^{(0)}=y$, а под производной первого порядка — y'), то, по определению, $y^{(n)}=[y^{(n-1)}]'$.

Вспоминая как определялась производная (см. п. 9.1), определение n-й производной в точке x_0 можно записать в виде предела

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x},\quad n=1,\ 2\ldots.$$

Отметим, что из предположения, что функция f имеет в точке x_0 производную порядка n, следует, в силу определения последней, что в некоторой окрестности точки x_0 у функции f существует производная порядка $n-1$, а следовательно, при $n>1$, и все производные более низкого порядка $k<n-1$ (которые к тому же непрерывны в этой окрестности, поскольку во всех ее точках они имеют производную, см. теоремы 1 и 2 в п. 9.2), в частности сама функция определена в некоторой окрестности точки x_0.

Все здесь сказанное естественным образом переносится и на так называемые односторонние производные высшего порядка, которые читатель без труда определит самостоятельно.

Определение 2. *Функция называется n раз непрерывно дифференцируемой на некотором промежутке, если во всех точках этого промежутка она имеет непрерывные производные до порядка n включительно* ($n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$).

При этом на каком-либо конце рассматриваемого промежутка в случае, когда этот конец принадлежит промежутку, под производными, как обычно, понимаются соответствующие односторонние производные.

Для того чтобы функция была n раз непрерывно дифференцируемой на некотором промежутке, достаточно, чтобы она имела на нем непрерывную производную порядка n. Действительно, согласно определению, существование производной порядка n на рассматриваемом промежутке предполагает существование на нем производной порядка $n-1$, и поскольку из существования производной какой-либо функции в некоторой точке следует непрерывность функции в этой точке, то производная порядка $n-1$ непрерывна на данном промежутке. Аналогично, в случае $n>1$ доказывается непрерывность производной порядка $n-2$ и т. д.

Примеры. 1. $y=x^3$, $y'=3x^2$, $y''=6x$, $y^{(3)}=6$, $y^{(4)}=y^{(5)}=\ldots=0$.

2. $y=a^x$, $y'=a^x\ln a$, $y''=a^x\ln^2 a$, $y^3=a^x\ln^3 a$. Вообще по индукции легко установить, что $y^{(n)}=a^x\ln^n a$. В частности, $(e^x)^{(n)}=e^x$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

3. $y=\sin x$. Вычисляя последовательно производные, получим $y'=\cos x$, $y''=-\sin x$, $y^{(3)}=-\cos x$, $y^{(4)}=\sin x$, далее производные повторяются в том же порядке. Чтобы записать полученный результат одной формулой, заметим, что $\cos\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$, и поэтому $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$ и т. д.

По индукции $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ для любого $n=1, 2, \ldots$.

4. $y=\cos x$. Замечая, что $-\sin\alpha=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$, аналогично предыдущему примеру получим

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\quad n=1,\ 2,\ \ldots.$$

10.2. ВЫСШИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Теорема 1. *Пусть функции $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ имеют производные n-го порядка в точке x_0; тогда функции $y_1+y_2=f_1(x)+f_2(x)$ и $y_1y_2=f_1(x)f_2(x)$ также имеют производные n-го порядка в точке x_0, причем*

$$(y_1+y_2)^{(n)}=y_1^{(n)}+y_2^{(n)}, \tag{10.1}$$

$$(y_1y_2)^{(n)}=y_1^{(n)}y_2+C_n^1y_1^{(n-1)}y_2^{(1)}+C_n^2y_1^{(n-2)}y_2^{(2)}+\ldots+y_1y_2^{(n)}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^ky_1^{(n-k)}y_2^{(k)}, \tag{10.2}$$

где, как обычно, C_n^k обозначает число сочетаний из n элементов по k ($k=0, 1, 2, \ldots, n$).

Формула (10.2) обычно называется *формулой Лейбница**), ее символически можно записать в следующем виде, удобном для запоминания:

$$(y_1y_2)^{(n)}=(y_1+y_2)^{\{n\}}.$$

Индекс $\{n\}$ означает, что выражение $(y_1+y_2)^{\{n\}}$ записывается подобно биному Ньютона, т. е. в виде суммы с теми же коэффициентами, что и в биномиальной формуле, только степени функций y_1 и y_2 заменяются их производными соответствующего порядка (см. (10.2)).

Формулы (10.1) и (10.2) доказываются по индукции. При $n=1$, т. е. для производных первого порядка, они были доказаны в п. 9.5. Пусть теперь эти формулы верны для производных n-го порядка. Докажем их справедливость для производных порядка $n+1$.

В случае суммы функций имеем:

$$(y_1+y_2)^{(n+1)}=\left[(y_1+y_2)^{(n)}\right]'=\left(y_1^{(n)}+y_2^{(n)}\right)'=$$
$$=\left(y_1^{(n)}\right)'+\left(y_2^{(n)}\right)'=y_1^{(n+1)}+y_2^{(n+1)}.$$

Формула (10.2) доказана.

*) Г. Лейбниц (1664—1716) — немецкий философ и математик.

В случае произведения функций выкладки несколько сложнее:

$$(y_1y_2)^{(n+1)}=[(y_1y_2)^{(n)}]'=\left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)} y_2^{(k)}\right]'=$$
$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)}+y_1^{(n-k)} y_2^{(k+1)}\right]=$$
$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)}+\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)} y_2^{(k+1)}=$$
$$=y_1^{(n+1)} y_2^{(0)}+\sum_{k=1}^{n} C_k^n y_1^{(n+1-k)} y_2^k+\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k y_1^{(n-k)} y_2^{(k+1)}+y_1^{(0)} y_2^{(n+1)}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $C_n^0=C_n^n=1$. Теперь изменим индекс суммирования во второй сумме, положив $k=p-1$; тогда новый индекс суммирования p будет меняться от 1 до n. После этого в полученных суммах объединим попарно слагаемые, содержащие производные одинаковых порядков. Обозначая общий индекс суммирования через p, будем иметь

$$(y_1y_2)^{(n+1)}=y_1^{(n+1)} y_2^{(0)}+\sum_{p=1}^{n}\left(C_n^p+C_n^{p-1}\right) y_1^{(n+1-p)} y_2^{(p)}+y_1^{(0)} y_2^{(n+1)}$$

Отсюда, заметив, что $C_n^p+C_n^{p-1}=C_{n+1}^p$ *) и что $C_{n+1}^0=C_{n+1}^{n+1}=1$, получим

$$(y_1y_2)^{(n+1)}=y_1^{(n+1)} y_2^{(0)}+\sum_{p=1}^{n} C_{n+1}^p y_1^{(n+1-p)} y_2^{(p)}+y_1^{(0)} y_2^{(n+1)}=$$
$$=\sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p y_1^{(n+1-p)} y_2^{(p)}. \quad \square$$

Следствие. *Если c — постоянная, а $y=f(x)$ — функция, имеющая производную n-го порядка в точке x_0, то функция $cf(x)$ также имеет производную порядка n при $x=x_0$, причем*

$$(cy)^{(n)}=cy^{(n)}. \tag{10.3}$$

Действительно, если в формуле (10.2) положить $y_1=c$, $y_2=y$, то получится формула (10.3). Впрочем, она следует очевидным образом и из n-кратного применения формулы (9.19) к функции cy.

---

*) В самом деле, если зафиксировать один из $n+1$ элементов, составляющих сочетания по p элементов, то число сочетаний, в которое вошел этот фиксированный элемент, будет равно C_n^{p-1}, а число сочетаний, в которое он не вошел будет равно C_n^p, поэтому $C_{n+1}^p=C_n^{p-1}+C_n^p$.

Рассмотрим пример. Пусть $y=x^3\sin x$. Найдем с помощью формулы Лейбница производную $y^{(10)}$:

$$(x^3\sin x)^{(10)}=x^3\sin\left(x+10\frac{\pi}{2}\right)+10\cdot 3x^2\sin\left(x+9\cdot\frac{\pi}{2}\right)+$$
$$+10\cdot 9\cdot 3x\sin\left(x+8\cdot\frac{\pi}{2}\right)+10\cdot 9\cdot 8\sin\left(x+7\cdot\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=-x^3\sin x+30x^2\cos x+270x\sin x-720\cos x.$$

10.3. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ОТ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ, ОТ ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ И ОТ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Пусть функция $y=y(x)$ имеет вторую производную в точке x_0, а $z=z(y)$ — вторую производную в точке $y_0=y(x_0)$. Тогда сложная функция $z[y(x)]$ имеет при $x=x_0$ вторую производную, причем

$$z''_{xx}=z''_{yy}y'^2_x+z'_y y''_{xx}. \tag{10.4}$$

Действительно, поскольку существуют производные $y''(x_0)$ и $z''(y_0)$, то существуют также $y'(x_0)$ и $z'(y_0)$. Следовательно, функции $y(x)$ и $z(y)$ непрерывны соответственно в точках x_0 и y_0. Поэтому в некоторой окрестности точки x_0 определена сложная функция $z=z[y(x)]$. Дифференцируя ее и опуская для простоты обозначение аргумента, имеем $z'_x=z'_y y'_x$; дифференцируя еще раз по x, получим

$$z''_{xx}=(z'_y)'_x y'_x+z'_y y''_{xx}=z''_{yy}y'^2_x+z'_y y''_{xx}. \ \square$$

Аналогичным образом вычисляются, при соответствующих предположениях, и *производные высших порядков сложной функции*. Этот метод позволяет также доказывать существование и находить производные высших порядков от обратной функции.

Пусть функция $y=y(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 (ср. п. 9.6) и пусть при $x=x_0$ существуют производные y' и y'', причем $y'(x_0)\neq 0$; тогда и обратная функция $x=x(y)$ имеет вторую производную в точке $y_0=y(x_0)$, причем она может быть выражена через значения производных y' и y'' функции $y(x)$ при $x=x_0$.

В самом деле, опуская, как и выше, обозначения аргумента, согласно теореме 3 § 9 (см. п. 9.6), имеем $x'_y=1/y'_x$. Вычисляя производную по y от обеих частей и применяя к правой части правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$x''_{yy}=(x'_y)_y=\left(\frac{1}{y'_x}\right)'_x x'_y=-\frac{y''_{xx}}{y'^2_x}\cdot\frac{1}{y'_x}=-\frac{y''_{xx}}{y'^3}.$$

Аналогично при соответствующих предположениях вычисляются и *производные высших порядков для обратной функции*.

Подобным же образом можно поступать и в случае так называемого параметрического задания функции.

Определение 3. *Пусть функции $x=x(t)$ и $y=y(t)$ определены в некоторой окрестности точки t_0 и одна из них, например $x=x(t)$, непрерывна и строго монотонна в указанной окрестности; тогда существует обратная к $x(t)$ функция $t=t(x)$, и в некоторой окрестности точки $x_0=x(t_0)$ имеет смысл композиция $y(t(x))$. Эта функция y от x и называется параметрически заданной формулами $x=x(t)$, $y=y(t)$ функцией.*

Выведем формулы для дифференцирования параметрически заданных функций.

Если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют в точке t_0 производные и если $x'(t_0)\neq 0$, то параметрически заданная функция $y(t(x))$ также имеет в точке $x_0=x(t_0)$ производную, причем

$$y'_x=\frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}. \qquad (10.5)$$

В самом деле, по правилу дифференцирования сложной функции имеем (опуская обозначение аргумента)

$$y'_x=y'_t t'_x; \qquad (10.6)$$

по правилу же дифференцирования обратной функции

$$t'_x=\frac{1}{x'_t}. \qquad (10.7)$$

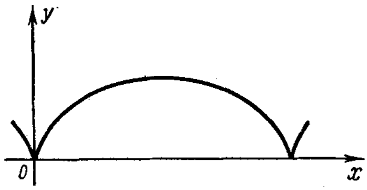

Рис. 39

Из формул (10.6) и (10.7) и следует формула (10.5).

Если, кроме того, существуют $x''_{tt}(t_0)$ и $y''_{tt}(t_0)$, то существует и $y''_{xx}(x_0)$ причем

$$y''_{xx}=(y'_x)_x=\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)_x=\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)_t t'_x=\frac{y''_{tt}x'_t-y'_t x''_{tt}}{x'^3_t}.$$

Аналогично вычисляются *производные более высокого порядка параметрически заданных функций.*

Рассмотрим в качестве примера параметрически заданную функцию

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad (a\neq 0,\ -\infty<t<+\infty). \qquad (10.8)$$

Ее график называется *циклоидой* (рис. 39). Пусть для определенности $a>0$; тогда функция $x(t)=a(t-\sin t)$ строго монотонно возрастает. Действительно, пусть $\Delta t>0$, тогда, замечая, что $0<\sin\frac{\Delta t}{2}<\frac{\Delta t}{2}$, имеем

$$x(t+\Delta t)-x(t)=a\{\Delta t-[\sin(t+\Delta t)-\sin t]\}=$$
$$=a\left[\Delta t-2\cos\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)\sin\frac{\Delta t}{2}\right]>a\left(\Delta t-2\cdot 1\cdot\frac{\Delta t}{2}\right)=0,$$

что и означает строго монотонное возрастание функции $x(t)$. В силу этого существует однозначная обратная функция $t=t(x)$.

Далее, $x'_t=a(1-\cos t)=2a\sin^2\frac{t}{2}\geqslant 0$, $y'_t=a\sin t$, и x'_t обращается в ноль только в точках вида $t=2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Поэтому, если $t\neq 2k\pi$, то, согласно правилу дифференцирования функции, заданной параметрически, имеем

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\sin t}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2};$$

$$y''_{xx}=\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)'_x=\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)'_x\frac{1}{x'_t}=-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2a\sin^2\frac{t}{2}}=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$$

Упражнение 1. Доказать, что циклоида (10.8) является траекторией точки окружности радиуса a, катящейся без скольжения по оси x-в.

10.4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В настоящем пункте мы для удобства будем иногда вместо символа дифференцирования d писать букву δ, т. е. вместо dy, dx писать δy, δx.

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на некотором интервале (a, b). Как известно, ее дифференциал

$$dy=f'(x)\,dx,$$

который называется также ее первым дифференциалом, зависит от двух переменных: x и dx. Пусть $f'(x)$, в свою очередь, дифференцируема в некоторой точке $x_0\in(a, b)$. Тогда дифференциал в этой точке функции dy, рассматриваемой как функция только от x (т. е. при некотором фиксированном dx), если для его обозначения использовать символ δ, имеет вид

$$\delta(dy)=\delta[f'(x)\,dx]\,|_{x=x_0}=[f'(x)\,dx]'\,|_{x=x_0}\delta x=f''(x_0)\,dx\,\delta x.$$

Определение 4. *Значение дифференциала $\delta(dy)$, т. е. дифференциала от первого дифференциала, в некоторой точке x_0 при $dx=\delta x$ называется вторым дифференциалом функции f в этой точке и обозначается через d^2y, т. е.*

$$d^2y=f''(x_0)\,dx^2. \tag{10.9}$$

Заметим, что в силу этого определения $d^2x=0$, ибо при вычислении дифференциалов мы считаем приращение $dx=\Delta x$ постоянным.

Подобным же образом в случае, когда производная $(n-1)$-го порядка $y^{(n-1)}$ дифференцируема в точке x_0 или, эквивалентно, когда при $x=x_0$ существует производная n-го порядка $y^{(n)}$, определяется *дифференциал n-го порядка* d^ny функции $y=f(x)$

в точке x_0 как дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка $d^{n-1}y$, в котором взято $\delta x = dx$:

$$d^n y = \delta\,(d^{n-1}y)\,|_{\delta x = dx}.$$

Покажем, что справедлива формула

$$d^n y = y^{(n)}\,dx^n, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots \tag{10.10}$$

Ее доказательство проведем по индукции. Для $n=1$ и $n=2$ она доказана. Пусть эта формула верна для дифференциалов порядка $n=1$:

$$d^{n-1}y = y^{(n-1)}\,dx^{n-1}.$$

Тогда, согласно данному выше определению, для вычисления дифференциала n-го порядка $d^{(n)}y$ необходимо вычислить сначала дифференциал (мы его обозначим символом δ) от $d^{n-1}y$:

$$\delta\,(d^{n-1}y) = \delta\,(y^{(n-1)}\,dx^{n-1}) = (y^{(n-1)}\,dx^{n-1})'\,\delta x = y^{(n)}\,\delta x\,dx^{n-1},$$

а затем положить $\delta x = dx$:

$$d^n y = \delta\,(d^{n-1}y)\,|_{\delta x = dx} = y^{(n)}\,dx^n. \ \square$$

Из формулы (10.10) следует, что

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}. \tag{10.11}$$

Отметим некоторые свойства дифференциалов высших порядков.

1°. $d^n(y_1 + y_2) = d^n y_1 + d^n y_2$.

2°. $d^n(cy) = c\,d^n y$, c — постоянная.

3°. $d^n(y_1 y_2) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k\,dy_1^{n-k}\,dy_2^k$, или, употребляя символическую запись,

$$d^n(y_1 y_2) = (dy_1 + dy_2)^{\{n\}},$$

где выражение $(dy_1 + dy_2)^{\{n\}}$ записывается по биномиальной формуле Ньютона, т. е. представляет собой сумму вида $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k\,d^{n-k}y_1\,d^k y_2$; при этом для любой функции u считается, что $d^0 u = u^{(0)}\,dx^0 = u$.

Эти свойства непосредственно следуют из соответствующих формул для производных n-го порядка (см. (10.1), (10.2), (10.3) и (10.10)).

Важное замечание. Формулы (10.10) и (10.11) справедливы, вообще говоря, при $n > 1$ (в отличие от случая $n = 1$) только тогда, когда x является независимым переменным. В случае дифференциалов высших порядков по зависимым переменным дело обстоит сложнее.

Пусть $z=z(y)$, $y=y(x)$, имеет смысл суперпозиция $z[y(x)]$ и функции $z(y)$ и $y(x)$ дважды дифференцируемы. Тогда

$$dz=z'_y\,dy,$$

дифференцируя еще раз и не прибегая для простоты к символу δ, т. е. считая запись $d(dz)$ равносильной записи $\delta(dz)|_{\delta x=dx}$ (так всегда и поступают на практике), причем здесь под $\delta(dz)$ понимается дифференциал по x от функции $dz=z'_y(y)\,dy=$ $=z'_y[y(x)]\,y'_x(x)\,dx$, получаем

$$d^2z=d(dz)=d(z'_y\,dy)=d(z'_y)\,dy+z'_y\,d(dy)=z''_{yy}\,dy^2+z'_y\,d^2y \qquad (10.12)$$

(мы написали $dz'_y=z''_{yy}\,dy$ на основании формулы (9.26), т. е. использовав инвариантность первого дифференциала).

Сравнивая формулы (10.9) и (10.12), мы видим, что они отличаются вторым членом, и так как, вообще говоря, $d^2y\neq 0$, то они существенно различны. Деля обе части равенства (10.12) на dx^2, мы получаем формулу второй производной для сложной функции:

$$z''_{xx}=z''_{yy}y'^2_x+z'_yy''_{xx},$$

которая была нами получена раньше (см. (10.4)) другим путем.

Подобным же образом могут быть вычислены дифференциалы и производные высших порядков сложной функции.

Упражнения. Вычислить производные и дифференциалы:

2. $y^{(8)}$ для функции $y=\sqrt{x}$.
3. $y^{(50)}$ для функции $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$.
4. $y^{(n)}$ для функции $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.
5. $y^{(n)}$ для функции $y=\sin^2 x$.
6. $y^{(n)}$ для функции $y=x\operatorname{ch} x$.
7. d^ny для функции $y=x^ne^x$.
8. d^ny для функции $y=\dfrac{\ln x}{x}$.
9. y''_{xx} для функции $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$.
10. y'''_{xxx} для функции $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.
11. y'_x и y''_{xx} для функции $x=y-a\sin y$.
12. y'_x и y''_{xx} для функции $x^2+2xy-y^2=1$.

§ 11. ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

11.1. ТЕОРЕМА ФЕРМА

Если функция f имеет в некоторой точке x_0 конечную или бесконечную производную, то $f(x)$ называется функцией, имеющей при $x=x_0$ производную в широком смысле.

Теорема 1 (Ферма*)). *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и принимает в этой точке наиболь-*

*) П. Ферма́ (1601—1665) — французский математик.