Пусть $z=z(y)$, $y=y(x)$, имеет смысл суперпозиция $z[y(x)]$ и функции $z(y)$ и $y(x)$ дважды дифференцируемы. Тогда

$$dz=z'_y\,dy,$$

дифференцируя еще раз и не прибегая для простоты к символу δ, т. е. считая запись $d(dz)$ равносильной записи $\delta(dz)|_{\delta x=dx}$ (так всегда и поступают на практике), причем здесь под $\delta(dz)$ понимается дифференциал по x от функции $dz=z'_y(y)\,dy=z'_y[y(x)]\,y'_x(x)\,dx$, получаем

$$d^2z=d(dz)=d(z'_y\,dy)=d(z'_y)\,dy+z'_y\,d(dy)=z''_{yy}\,dy^2+z'_y\,d^2y \qquad (10.12)$$

(мы написали $dz'_y=z''_{yy}\,dy$ на основании формулы (9.26), т. е. использовав инвариантность первого дифференциала).

Сравнивая формулы (10.9) и (10.12), мы видим, что они отличаются вторым членом, и так как, вообще говоря, $d^2y\neq 0$, то они существенно различны. Деля обе части равенства (10.12) на dx^2, мы получаем формулу второй производной для сложной функции:

$$z''_{xx}=z''_{yy}y'^2_x+z'_yy''_{xx},$$

которая была нами получена раньше (см. (10.4)) другим путем.

Подобным же образом могут быть вычислены дифференциалы и производные высших порядков сложной функции.

Упражнения. Вычислить производные и дифференциалы:

2. $y^{(8)}$ для функции $y=\sqrt{x}$.
3. $y^{(50)}$ для функции $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$.
4. $y^{(n)}$ для функции $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.
5. $y^{(n)}$ для функции $y=\sin^2 x$.
6. $y^{(n)}$ для функции $y=x\,\operatorname{ch} x$.
7. d^ny для функции $y=x^ne^x$.
8. d^ny для функции $y=\dfrac{\ln x}{x}$.
9. y''_{xx} для функции $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$.
10. y'''_{xxx} для функции $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.
11. y'_x и y''_{xx} для функции $x=y-a\sin y$.
12. y'_x и y''_{xx} для функции $x^2+2xy-y^2=1$.

§ 11. ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

11.1. ТЕОРЕМА ФЕРМА

Если функция f имеет в некоторой точке x_0 конечную или бесконечную производную, то $f(x)$ называется функцией, имеющей при $x=x_0$ производную в широком смысле.

Теорема 1 (Ферма*)). *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и принимает в этой точке наиболь-*

---

*) П. Ферма́ (1601—1665) — французский математик.

шее или наименьшее значение. Тогда, если при $x=x_0$ существует производная в широком смысле, то она равна нулю.

Доказательство. Пусть функция f определена в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и принимает для определенности при $x=x_0$ наибольшее значение, т. е. для всех $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$. Тогда, если $x < x_0$, то

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0, \tag{11.1}$$

а если $x > x_0$, то

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0. \tag{11.2}$$

Если существует производная в широком смысле, т. е. если существует конечный или бесконечный, определенного знака, предел

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

то, перейдя к пределу при $x \to x_0 - 0$ в неравенстве (11.1), получаем $f'(x_0) \geqslant 0$; аналогично из неравенства (11.2) при $x \to x_0 + 0$ находим $f'(x_0) \leqslant 0$. Эти неравенства выполняются одновременно лишь при $f'(x_0) = 0$. □

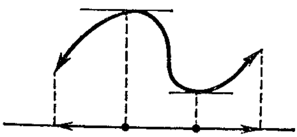

Рис. 40

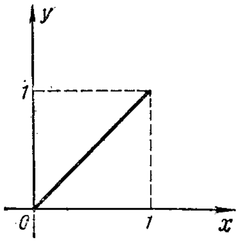

Рис. 41

Геометрическая интерпретация теоремы Ферма состоит в том, что если при $x=x_0$ функция f принимает наибольшее или наименьшее значение на некоторой окрестности точки x_0, то касательная к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ параллельна оси Ox (рис. 40).

Замечание. Если функция f принимает наибольшее или наименьшее значение при $x=x_0$ по сравнению с ее значениями в некоторой односторонней окрестности точки x_0 и имеет в x_0 (одностороннюю) производную, то эта производная может не равняться нулю. Так, например, функция $f(x)=x$, рассматриваемая на отрезке $[0,1]$, принимает при $x=0$ минимальное, а для $x=1$ — максимальное значение, однако, как в той, так и в другой точке производная равна единице (см. рис. 41).

11.2. ТЕОРЕМЫ РОЛЛЯ, ЛАГРАНЖА И КОШИ О СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЯХ

Теорема 2 (Ролль *)). *Пусть функция* f

1) *непрерывна на отрезке* $[a, b]$;

2) *имеет в каждой точке интервала* (a, b) *производную в широком смысле*;

3) *принимает равные значения на концах отрезка, т. е.* $f(a)=f(b)$; *тогда существует хотя бы одна такая точка* ξ, $a<\xi<b$, *что* $f'(\xi)=0$.

Доказательство. Мы уже знаем, что функция, непрерывная на отрезке, принимает наибольшее и наименьшее значения в некоторых точках этого отрезка (см. п. 6.1). Пусть $M=\max f(x)$, $m=\min f(x)$; тогда для всех $x\in[a, b]$ выполняется неравенство $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

Если $m=M$, то функция f постоянна и, значит $f'\equiv 0$ на $[a, b]$. В качестве точки ξ можно взять любую точку интервала (a, b).

Если же $m\neq M$, то из условия $f(a)=f(b)$ следует, что хотя бы одно из значений m или M не принимается на концах отрезка $[a, b]$. Пусть этим значением является M, т. е. существует такая точка $\xi\in(a, b)$, что $f(\xi)=M$, и, значит, в этой точке ξ функция f принимает наибольшее значение и на интервале (a, b). Поэтому из теоремы Ферма следует, что $f'(\xi)=0$. $\square$

Геометрически теорема Ролля означает, что у графика непрерывной на отрезке и дифференцируемой внутри него функции, принимающей на его концах одинаковые значения, существует точка, в которой касательная параллельна оси абсцисс (рис. 42).

Заметим, что все предпосылки теоремы Ролля существенны. Чтобы в этом убедиться, достаточно привести примеры функций, для которых выполнялись бы два из трех условий теоремы, третье же не выполнялось и у которых не существует точки ξ, такой, что $f'(\xi)=0$. (При этом в силу условия 3, в котором говорится о значениях функции в концевых точках промежутка, следует рассматривать лишь функции, определенные на отрезках.)

Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[0,1]$ и равная x, если $0\leqslant x<1$, и 0, если $x=1$, удовлетворяет условиям 2 и 3, но не удовлетворяет условию 1 (рис. 43).

Функция $f(x)=|x|$, $x\in[-1; 1]$ удовлетворяет условиям 1 и 3, но не удовлетворяет условию 2 (рис. 44).

Наконец, функция $f(x)=x$, $x\in[0; 1]$ удовлетворяет условиям 1 и 2, но не удовлетворяет условию 3 (см. рис. 41).

Для всех этих функций не существует точки, в которой их производная обращалась бы в ноль.

---

*) М. Ролль (1652—1719)—французский математик.

Обратим внимание на то, что по условиям теоремы Ролля отрезок $[a, b]$ может содержать точки, в которых функция имеет бесконечную производную, т. е. в которых либо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$, либо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$. Это требование нельзя ослабить, заменив его условием $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$. Например, для функции $f(x) = \sqrt{|x|}$,

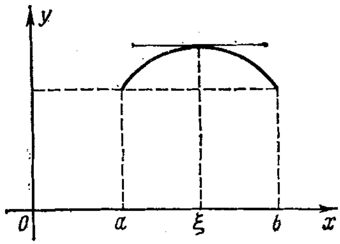

Рис. 42

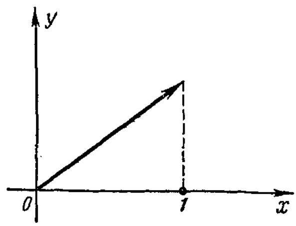

Рис. 43

$-1 \leqslant x \leqslant 1$, не существует точки $\xi \in [-1, +1]$, в которой производная этой функции обращалась бы в ноль. Вместе с тем функция $f(x) = \sqrt{|x|}$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля на отрезке $[-1, 1]$, за исключением того, что в точке $x=0$ эта функция не имеет ни конечной, ни бесконечной производной. В самом деле, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, причем этот предел не является бесконечностью определенного знака.

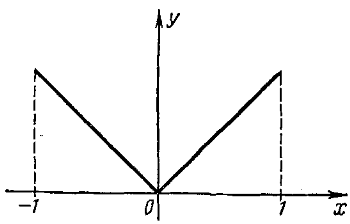

Рис. 44

Этот пример показывает целесообразность определения бесконечной производной только как бесконечности определенного знака.

Заметим, что построением соответствующих примеров (если, конечно, это удается сделать) и проверяют обычно в математике существенность тех или иных условий доказываемых теорем.

В дальнейшем мы не будем проводить проверки необходимости условий теорем, предоставляя это делать читателю по мере внутренней потребности.

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке $[a, b]$, то функция $F(x) = f(x) - f(a)$ равна нулю на его концах и $F'(x) = f'(x)$, в частности эти производные одновременно обращаются в ноль. Поэтому теорема Ролля равносильна утверждению: если функция непрерывна на некотором отрезке, обращается в ноль на его концах и дифференцируема во всех его внутренних точках, то существует его внутренняя точка, в которой производная обращается в ноль. Коротко говоря,

между двумя нулями дифференцируемой функции всегда лежит хотя бы один ноль ее производной.

Упражнения 1. Доказать, что если функция f удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке $[a, b]$ и не является постоянной, то на этом отрезке существуют такие точки ξ_1 и ξ_2, что $f'(\xi_1)>0$ и $f'(\xi_2)<0$.

2. Привести пример функции, непрерывной на отрезке $[a, b]$, имеющей производную в каждой точке интервала (a, b), но не имеющей производной (односторонней) в точке a.

Теорема 3. (Лагранж*)). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и в каждой точке интервала (a, b) имеет производную в широком смысле, то в этом интервале существует по крайней мере одна такая точка ξ, что*

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a). \qquad (11.3)$$

Эта теорема является, очевидно, обобщением теоремы Ролля.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-\lambda x \qquad (11.4)$$

и определим число λ таким образом, чтобы $F(a)=F(b)$, т. е. чтобы $f(a)-\lambda a=f(b)-\lambda b$. Это равносильно тому, что

$$\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad (11.5)$$

Для функции F выполняются все условия теоремы Ролля. Действительно, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция λx, будучи линейной, непрерывна на всей числовой оси; поэтому и функция $F(x)=f(x)-\lambda x$ также непрерывна на отрезке $[a, b]$. Функция f имеет во всех точках интервала (a, b) конечную или бесконечную производную, а функция λx — конечную производную во всех точках числовой оси, поэтому их разность $F(x)$ также имеет всюду в интервале (a, b) конечную или бесконечную производную (см. замечание в п. 9.5). Наконец, на концах отрезка $[a, b]$ в силу выбора λ (см. (11.5)) функция f принимает одинаковые значения. Поэтому существует хотя бы одна такая точка ξ, $(a<\xi<b)$, что $F'(\xi)=0$. Из (11.4) получаем $F'(x)=f'(x)-\lambda$, поэтому $f'(\xi)-\lambda=0$. Подставляя сюда λ из (11.5), получим

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \ \square \qquad (11.6)$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в следующем. Пусть $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ — концы графика функции f, AB — хорда, соединяющая точки A и B (рис. 45). Тогда отноше-

*) Ж.-Л. Лагранж (1736—1813) — французский математик и механик.

ние $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ равно тангенсу угла β между хордой AB и осью Ox, т. е.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\operatorname{tg}\beta,$$

а производная $f'(\xi)$, как известно (см. п. 9.3), равна тангенсу угла α между касательной к графику функции f в точке $(\xi, f(\xi))$ и положительным направлением оси Ox, т. е. $f'(\xi)=\operatorname{tg}\alpha$. Поэтому равенство (11.6) может быть переписано в виде

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta.$$

Таким образом, теорема Лагранжа показывает, что в интервале (a, b) должна найтись точка ξ (может быть, и не одна, см. рис. 35, где условию теоремы удовлетворяют точки ξ' и ξ''), в которой касательная к графику параллельна хорде AB.

Теорема Лагранжа найдет ряд важных приложений в дальнейшем.

Приведем другие формы записи формулы (11.3). Пусть $a<\xi<b$ и $\frac{\xi-a}{b-a}=\theta$. Тогда

$$\xi=a+\theta(b-a), \quad 0<\theta<1. \tag{11.7}$$

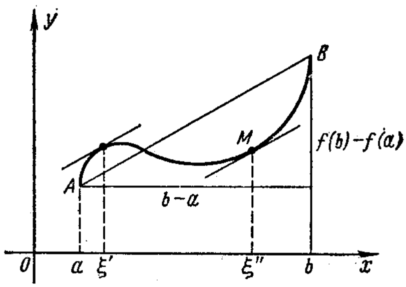

Рис. 45

Наоборот, если ξ выражается формулой (11.7), то, как легко видеть, $a<\xi<b$. Таким образом, в виде (11.7) могут быть представлены все точки интервала (a, b) и только они. Поэтому формула (11.3) может быть записана в виде

$$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a), \quad 0<\theta<1. \tag{11.8}$$

Положим теперь $a=x$, $b-a=\Delta x$ и, значит, $b=x+\Delta x$; тогда (11.8) перепишется в виде

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x, \quad 0<\theta<1. \tag{11.9}$$

Формула (11.9), а также равнозначная ей формула (11.3) и (11.8), называется *формулой конечных приращений Лагранжа*, или просто *формулой конечных приращений* в отличие от приближенного равенства

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x, \tag{11.10}$$

которое называют иногда формулой бесконечно малых приращений. Она выражает тот факт, что левая и правая части приближенного равенства (11.10) равны между собой для дифференцируемой в точке x функции f «с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем приращение Δx при $\Delta x \to 0$».

Замечание. Формула Лагранжа (11.3) может быть представлена в виде

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),$$

где $a<b$. Таким образом, она справедлива не только при $a<b$, но и для $a>b$.

Отметим три следствия из теоремы Лагранжа, полезные для дальнейшего.

Следствие 1. *Пусть функция f*

1) *определена на некотором промежутке (конечном или бесконечном);*

2) *имеет производную, равную нулю во всех его внутренних точках;*

3) *непрерывна в концевых точках рассматриваемого промежутка, входящих в него;*

тогда функция f постоянна на указанном промежутке.

Действительно, каковы бы ни были две точки x_1 и x_2, $x_1<x_2$, рассматриваемого промежутка, функция f, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[x_1, x_2]$ и, значит,

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),$$

где $x_1<\xi<x_2$. Но, по условию 2 следствия, $f'(\xi)=0$, и, значит, $f(x_1)=f(x_2)$ для любых двух точек x_1 и x_2 из области определения функции f, что и означает, что функция f постоянна. □

Следствие 2. *Если функции f и g дифференцируемы во всех внутренних точках некоторого промежутка и в этих точках*

$$f'=g',$$

а на концах промежутка, которые в него входят, функции f и g непрерывны, то эти функции отличаются на рассматриваемом промежутке лишь на постоянную

$$f-g=c.$$

Действительно, функция $F=f-g$ удовлетворяет условиям следствия 1, в частности, $F'=f'-g'=0$ во внутренних точках промежутка и поэтому $F=c$. □

Следствие 3. *Пусть функция φ*

1) *непрерывна на интервале (a, b);*

2) *дифференцируема во всех точках интервала (a, b), кроме, быть может, некоторой точки $x_0 \in (a, b)$;*

3) *существует $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi'(x)$; тогда существует и производная $\varphi'(x_0)$, причем*

$$\varphi'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\varphi'(x).$$

Действительно, пусть $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi'(x) = A$. Если $a < x < b$ и $x \neq x_0$, то по теореме Лагранжа $\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi)(x - x_0)$, где $\xi \in (x_0, x)$, если $x > x_0$, и $\xi \in (x, x_0)$, если $x < x_0$, откуда

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(\xi).$$

Будем для определенности считать, что $x > x_0$. Точка $\xi = \xi(x)$ является функцией от x и притом, вообще говоря, многозначной. Выберем произвольно для каждого $x \in (a, b)$ одно какое-либо значение ξ, тогда получим однозначную функцию $\xi(x)$ (как говорят, однозначную ветвь многозначной функции). Поскольку $x_0 < \xi(x) < x$, то

$$\lim_{x \to x_0} \xi(x) = x_0.$$

Применяя правило замены переменного для пределов функций (см. п. 4.8*), получим, что существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \varphi'(\xi) = A,$$

а следовательно, существует и предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = A.$$

Это и означает, что производная $\varphi'(x_0)$ существует и равна A. □

Упражнение 3. Пусть функция f непрерывна на интервале (a, b) и дифференцируема во всех точках этого интервала, кроме, быть может, некоторой точки $x_0 \in (a, b)$. Пусть существуют $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f'(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x)$, причем они не равны между собой. Доказать, что при этих предположениях производная $f'(x_0)$ не существует.

В теоремах Ролля и Лагранжа (а также и в нижеследующей теореме Коши) речь идет о существовании некоторой точки ξ, $a < \xi < b$, ее можно назвать «средней точкой», для которой выполняется то или иное равенство. Этим и объясняется название «теоремы о среднем» для этой группы теорем. Докажем последнее нужное нам утверждение этого типа.

Теорема 4 (Коши). *Пусть функции f и g*

1) *непрерывны на отрезке* $[a, b]$;

2) *имеют производные в каждой точке интервала* (a, b);

3) $g' \neq 0$ *во всех точках интервала* (a, b).

Тогда существует такая точка ξ, $a < \xi < b$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{11.11}$$

Заметим, что из условий теоремы следует, что формула (11.11) имеет смысл, т. е. $g(a) \neq g(b)$. В самом деле, если $g(a) = g(b)$, то функция g удовлетворяла бы условиям теоремы Ролля и, значит, нашлась бы такая точка ξ, что $g'(\xi)=0$, $a<\xi<b$, что противоречило бы условию 3.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-\lambda g(x), \tag{11.12}$$

где число λ выберем таким образом, чтобы $F(a)=F(b)$, т. е. чтобы $f(a)-\lambda g(a)=f(b)-\lambda g(b)$. Для этого нужно взять

$$\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \tag{11.13}$$

Функция F удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, следовательно, существует такая точка ξ, $a<\xi<b$, что $F'(\xi)=0$. Но из (11.12) $F'(x)=f'(x)-\lambda g'(x)$, а поэтому

$$f'(\xi)=\lambda g'(\xi)=0,$$

откуда следует, что

$$\lambda=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{11.14}$$

Сравнивая (11.13) и (11.14), получим формулу (11.11), обычно называемую *формулой конечных приращений Коши.* □

Отметим, что формула конечных приращений Лагранжа является частным случаем формулы конечных приращений Коши, в котором $g(x)=x$. Мы привели независимые доказательства этих формул, во-первых, из-за той важной роли, которую играет формула Лагранжа, а во-вторых, чтобы иметь возможность, используя одну и ту же идею (построения вспомогательной функции, удовлетворяющей условиям теоремы Ролля), применить ее дважды в доказательствах, причем сначала для большей наглядности в более простом случае.

Формула Коши (11.11), так же как и формула Лагранжа (11.3), справедлива не только если $a<b$, но и для $a>b$.

Упражнение 4. Пусть $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$. Применим к этой функции на отрезке $[0, x]$ формулу Лагранжа:

$$x^2\sin\frac{1}{x}=\left(2\xi\sin\frac{1}{\xi}-\cos\frac{1}{\xi}\right)x,$$

где $0<\xi<x$. Сократим обе части равенства на x при $x\neq 0$:

$$x\sin\frac{1}{x}=2\xi\sin\frac{1}{\xi}-\cos\frac{1}{\xi}.$$

Переходя здесь к пределу при $x\to 0$ (при этом, очевидно, $\xi\to 0$), получаем

$$\lim_{\xi\to 0}\cos\frac{1}{\xi}=0,$$

так как два других слагаемых, очевидно, стремятся к нулю. Вместе с тем предел функции $\cos \frac{1}{\xi}$ при стремлении аргумента к нулю не существует! Где ошибка?

Задача 7 (**Дарбу** *)). Доказать, что если функция дифференцируема на отрезке, то ее производная, принимая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное.

§ 12. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ПО ПРАВИЛУ ЛОПИТАЛЯ

Во многих случаях отыскание предела функции, заданной аналитически, при стремлении аргумента к некоторой точке (числу или к одной из бесконечностей ∞, $+\infty$ или $-\infty$) выполняемое путем формальной подстановки соответствующего значения вместо аргумента в формулу, задающую рассматриваемую функцию, приводит к выражениям вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0 или 1^∞. Они называются *неопределенностями*, так как по ним нельзя судить о том, существует или нет указанный предел, не говоря уже о нахождении его значения, если он существует. В этом случае вычисление предела называется также «*раскрытием неопределенности*».

Наряду с основным приемом, нахождения пределов функции — методом выделения главной части, существуют и другие способы отыскания пределов. Некоторые из них, носящие общее название *правил Лопиталя* **), мы изложим в этом параграфе.

12.1. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ВИДА 0/0

Теорема 1. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на отрезке $[a, b]$, таковы, что:*

1) $f(a)=g(a)=0$;

2) *существуют производные (правосторонние) $f'(a)$ и $g'(a)$ причем $g'(a)\neq 0$.*

Тогда существует предел

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Доказательство. Применим метод выделения главной части. В силу условия 2 имеем (см. п. 9.2).

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a),$$
$$g(x)=g(a)+g'(a)(x-a)+o(x-a).$$

Отсюда, согласно условию 1, получим, что

$$f(x)=f'(a)(x-a)+o(x-a),\quad g(x)=g'(a)(x-a)+o(x-a),$$

*) Г. Дарбу (1842—1917)—французский математик.

**) Г. Лопиталь (1661—1704)—французский математик.