так как два других слагаемых, очевидно, стремятся к нулю. Вместе с тем предел функции $\cos\frac{1}{\xi}$ при стремлении аргумента к нулю не существует! Где ошибка?

Задача 7 (**Дарбу** *)). Доказать, что если функция дифференцируема на отрезке, то ее производная, принимая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное.

§ 12. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ПО ПРАВИЛУ ЛОПИТАЛЯ

Во многих случаях отыскание предела функции, заданной аналитически, при стремлении аргумента к некоторой точке (числу или к одной из бесконечностей ∞, $+\infty$ или $-\infty$) выполняемое путем формальной подстановки соответствующего значения вместо аргумента в формулу, задающую рассматриваемую функцию, приводит к выражениям вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0 или 1^∞. Они называются *неопределенностями*, так как по ним нельзя судить о том, существует или нет указанный предел, не говоря уже о нахождении его значения, если он существует. В этом случае вычисление предела называется также «*раскрытием неопределенности*».

Наряду с основным приемом, нахождения пределов функции — методом выделения главной части, существуют и другие способы отыскания пределов. Некоторые из них, носящие общее название *правил Лопиталя* **), мы изложим в этом параграфе.

12.1. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ВИДА 0/0

Теорема 1. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на отрезке $[a, b]$, таковы, что:*

1) $f(a)=g(a)=0$;

2) *существуют производные (правосторонние) $f'(a)$ и $g'(a)$ причем $g'(a)\neq 0$.*

Тогда существует предел

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Доказательство. Применим метод выделения главной части. В силу условия 2 имеем (см. п. 9.2).

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a),$$
$$g(x)=g(a)+g'(a)(x-a)+o(x-a).$$

Отсюда, согласно условию 1, получим, что

$$f(x)=f'(a)(x-a)+o(x-a),\quad g(x)=g'(a)(x-a)+o(x-a),$$

*) Г. Дарбу (1842—1917)—французский математик.

**) Г. Лопиталь (1661—1704)—французский математик.

а поэтому

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(a)+\dfrac{o(x-a)}{x-a}}{g'(a)+\dfrac{o(x-a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(x)}. \ \Box$$

В теореме 1 предполагалось существование производных в точке a. Докажем теперь теорему, близкую по содержанию к предыдущей, в которой, однако, не будет предполагаться существование производных $f'(a)$ и $g'(a)$.

Теорема 2. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$:

1) *дифференцируемы на интервале* (a, b);

2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=0$;

3) $g'(x)\neq 0$ *для всех* $x\in(a, b)$;

4) *существует конечный или бесконечный, равный* $+\infty$ *или* $-\infty$, *предел* $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует предел

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. В силу условий теоремы функции f и g не определены в точке a; доопределим их, положив $f(a)=g(a)=0$. Теперь f и g непрерывны в точке a и удовлетворяют условиям теоремы Коши о среднем значении (см. п. 11.2) на любом отрезке $[a, x]$, где $a<x<b$. Поэтому для каждого x, $a<x<b$, существует такое $\xi=\xi(x)\in(a, x)$, что

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \tag{12.1}$$

причем $\lim\limits_{x\to a+0}\xi(x)=a$.

Поэтому, если существует $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$, то из правила замены переменного для пределов функций следует, что существует и $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=k$. Теперь из (12.1) получаем

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=k. \ \Box$$

Теоремы 1 и 2 остаются верными с естественными видоизменениями, как в случае левостороннего, так и двустороннего предела.

Теорема 3. *Пусть функции* f *и* g:

1) *дифференцируемы при* $x>c$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$;

3) $g'(x) \neq 0$ *для всех* $x > c$;

4) *существует конечный или бесконечный, равный* $+\infty$ *или* $-\infty$, *предел*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогда существует и предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $c > 0$ (если $c < 0$, то в качестве нового значения c возьмем, например, $c = 1$).

Выполним замену переменного $x = \frac{1}{t}$. Функции $\varphi(t) = f(1/t)$ и $\psi(t) = g(1/t)$ определены на интервале $(0, 1/c)$; если $x \to +\infty$, то $t \to +0$ и наоборот. На интервале $(0, 1/c)$ существуют производные

$$\varphi'(t) = -f'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2} \quad \text{и} \quad \psi'(t) = -g'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2},$$

где штрихом обозначены производные функций f и g по первоначальному аргументу.

Из сказанного и условий теоремы следует, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют на интервале $\left(0, \frac{1}{c}\right)$ условиям 1, 2 и 3 теоремы 2. Покажем еще, что из существования предела $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, который обозначим через k, следует существование предела $\lim\limits_{t \to +0} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$ и равенство его k, т. е. что выполняется и условие 4 теоремы 2. Действительно, используя полученные выражения для производных $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, находим

$$\lim_{t \to +0} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \lim_{t \to +0} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

Теперь из теоремы 2, примененной к функциям $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, следует, что $\lim\limits_{t \to +0} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = k$. Но

$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

где $x = \frac{1}{t}$, поэтому

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to +0} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = k. \ \square$$

Эта теорема остается верной с соответствующим видоизменением, и при $x \to -\infty$.

12.2. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ВИДА ∞/∞

Теорема 4. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:*

1) *дифференцируемы на интервале (a, b);*

2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=\infty$;

3) $g'(x)\neq 0$ *на* (a, b);

4) *существует конечный или бесконечный, равный $+\infty$ или $-\infty$, предел*

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{12.2}$$

Тогда существует и предел

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Пусть сначала предел (12.2) конечен; обозначим его через k:

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k.$$

Покажем, что и

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=k.$$

Для этого выберем точки x_0 и x так, чтобы $a<x<x_0<b$. Тогда на отрезке $[x, x_0]$ функции f и g будут удовлетворять условиям теоремы Коши. Поэтому согласно этой теореме существует такая точка $\xi\in(x, x_0)$, что

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

(Очевидно, точка ξ зависит от выбора точек x и x_0, т. е. $\xi=\xi(x, x_0)$). Найдем из этой формулы отношение $f(x)/g(x)$. Переписав ее в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)}\,\frac{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

получим

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,\frac{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}. \tag{12.3}$$

Как бы ни выбирать при заданном x_0 точку ξ так, чтобы выполнялось неравенство $a<\xi=\xi(x, x_0)<x_0$, в силу условия 4) теоремы будем иметь

$$\lim_{x_0\to a+0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=k,$$

а при фиксированном x_0 в силу условия 2) теоремы получим

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}=1.$$

Однако, в правой части формулы (12.3) нельзя просто воспользоваться теоремой о пределе произведения функций, так как пределы стоящих там сомножителей берутся при разных условиях: в одном случае точка x_0 стремится к точке a, а в другом — точка x_0 фиксирована, а к точке a стремится точка x. Тем не менее каково бы ни было $\varepsilon>0$, всегда можно выбрать x_0 так, чтобы отношение $f'(\xi)/g'(\xi)$ было столь близко к числу k для всех $\xi\in(a, x_0)$, а затем выбрать такое $\delta>0$, чтобы отношение $\dfrac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}$ было столь близко к 1 для всех $x\in(a, a+\delta)$, что в результате для всех указанных x выполнялось неравенство

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-k\right|<\varepsilon.$$

Собственно говоря, теорема в случае конечного предела (12.2) доказана, и на этом месте можно поставить знак $\square$.

Для полноты изложения сделаем некоторые разъяснения отдельных этапов доказательства, которые, впрочем, каждый, кто достаточно хорошо овладел предшествующим материалом, легко может провести самостоятельно.

Прежде всего, производилось деление на $f(x)$ и $g(x)$. Для обоснования этого надо показать, что для соответствующих значений справедливы неравенства $f(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$. Конечно, эти неравенства не имеют места, вообще говоря, при любом выборе точки $x\in(a, b)$, но они справедливы для всех x, достаточно близких к точке a. В самом деле, в силу условия 2) теоремы существует такое $\delta_1>0$, что для всех $x\in(a, a+\delta_1)$ выполняются неравенства $|f(x)|>0$, $|g(x)|>0$. Поэтому, если выбрать x_0 так, что $a<x_0<a+\delta_1$, то x будет также удовлетворять этому неравенству, т. е. $a<x<a+\delta_1$, и, следовательно, деление на $f(x)$ и $g(x)$ будет заведомо возможно.

Далее производилось деление на $1-f(x_0)/f(x)$. Это также возможно для всех x достаточно близких к точке a. Действительно, в силу условия $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ существует такое δ_2, что для всех x, удовлетворяющих условию $a<x<a+\delta_2$, справедливо неравенство $|f(x)|>|f(x_0)|$, а поэтому и неравенство $1-\frac{f(x_0)}{f(x)}\neq$ $\neq 0$. При этом выберем δ_2 так, чтобы $\delta_2<\delta_1$ — это всегда возможно.

Таким образом, формула (12.3) заведомо справедлива для всех таких x и x_0, что $a<x<x_0<a+\delta_2$.

Далее, для заданного $\varepsilon>0$ в силу существования конечного предела

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k,$$

найдется такое $\delta_3>0$, что для всех $x\in(a,\ a+\delta_3)$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-k\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{12.4}$$

при этом выберем δ_3 еще и так, чтобы $\delta_3<\delta_1$, а выбор x_0 подчиним условию $a<x_0<a+\delta_3$.

Положим теперь,

$$\alpha_1\overset{\text{def}}{=}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-k,\quad x<\xi<x_0. \tag{12.5}$$

Точка ξ, а потому и функция α_1, зависят от точек x_0 и x, однако при сделанном их выборе, т. е. при

$$a<x<x_0<a+\delta_3,$$

будем иметь $a<\xi<a+\delta_3$, и, следовательно, в силу неравенства (12.4) будет выполняться неравенство

$$|\alpha_1|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{12.6}$$

Положим далее

$$\alpha_2(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}-1. \tag{12.7}$$

Очевидно, в силу условия 2) теоремы имеем

$$\lim_{x\to a+0}\alpha_2(x)=0. \tag{12.8}$$

Из (12.3), (12.5) и (12.7) следует, что

$$f(x)/g(x)=(k+\alpha_1)(1+\alpha_2(x))=k+\alpha_1+(k+\alpha_1)\alpha_2(x). \tag{12.9}$$

Выберем теперь δ_ε, $0<\delta_\varepsilon<\delta_3$, так, чтобы при $a<x<a+\delta_\varepsilon$ выполнялось неравенство

$$(|k|+|\alpha_1|)\,|\alpha_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{12.10}$$

для чего в силу (12.6) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$|\alpha_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2(|k|+\varepsilon)}.$$

Это возможно в силу (12.8).

Из неравенств (12.6) и (12.10) следует, что для всех x, удовлетворяющих условию $a<x<a+\delta_\varepsilon$, выполняется неравенство

$$|\alpha_1+(k+\alpha_1)\alpha_2(x)|\leqslant|\alpha_1|+(|k|+|\alpha_1|)|\alpha_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

и потому из (12.9) следует, что $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-k\right|<\varepsilon$ при $a<x<a+\delta_\varepsilon$. Это и означает существование предела

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=k.$$

Так раскрываются на «языке неравенств» сделанные выше высказывания о выборе достаточно близких значений x_0 и x к точке a, обеспечивающих нужную близость отношения $f(x)/g(x)$ к числу k.

Рассмотрим теперь случай бесконечного предела.

Пусть $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$. Тогда в некоторой окрестности точки a имеем $f'(x)\neq 0$ (почему?) и $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0$. Поэтому, согласно доказанному выше, $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{g(x)}{f(x)}=0$, откуда следует, что $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

Но нужно доказать более сильное утверждение, а именно — что этот предел равен $+\infty$. Покажем это. Поскольку, согласно предположению, $\frac{f'(x)}{g'(x)}\to+\infty$ при $x\to a+0$, то существует такое $\eta_1>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $a<x<a+\eta_1$, будем иметь

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}>0.$$

Далее, зафиксируем x_0, $a<x_0<a+\eta_1$, так как нам придется снова использовать формулу (12.3).

Наконец, выберем η_2, $0<\eta_2<x_0-a$, так, чтобы для всех $x\in(a,\ a+\eta_2)$ имели место неравенства $|f(x)|>|f(x_0)|$, $|g(x)|>|g(x_0)|$, вследствие чего

$$1-\frac{f(x_0)}{f(x)}>0,\quad 1-\frac{g(x_0)}{g(x)}>0. \tag{12.11}$$

Тогда для всех x, удовлетворяющих условию $a<x<a+\eta_2$, выполняются неравенства (12.11),

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}>0,\quad \text{где}\quad x<\xi=\xi(x)<x_0,$$

и справедлива формула (12.3). Из нее следует, что для всех указанных x

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0.$$

Из доказанного выше утверждения $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ следует теперь, что $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$.

Аналогично рассматривается случай

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=-\infty. \square$$

Теорема 4 вместе с ее доказательством остается в силе с естественными видоизменениями, и при $x\to a-0$, $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$, а также в случае двусторонних пределов.

Можно показать, что при выполнении условий 1, 2 и 3, входящих в любую из теорем 2, 3 или 4, не может существовать предел $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$ без существования одного из двух «знакоопределенных» бесконечных пределов $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=-\infty$.

Задача 8. Доказать, что если выполнены условия 1, 2 и 3 теоремы 4 и $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$, то либо $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$, либо $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=-\infty$.

Примеры. 1. Найдем $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}$, $\alpha>0$. Замечая, что

$$(\ln x)'=\frac{1}{x},\quad (x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1} \text{ и } \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}}=\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0,$$

получаем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0.$$

Это означает, что при $x\to+\infty$ функция $\ln x$ растет медленнее, чем любая положительная степень переменной x.

Иногда правило Лопиталя приходится применять несколько раз.

2. Найдем $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}$, где n — натуральное число и $a>1$. Имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^n)'}{(a^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^x\ln a}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{a^x\ln^n a}=0. \tag{12.12}$$

Таким образом при $x\to+\infty$ любая степень x^n растет медленнее, чем показательная функция a^x, $a>1$.

3. Следует иметь в виду, что проведение вычислений по образцу (12.12) оправдано только в том случае, когда в результате получается конечный или бесконечный предел. Так, например, было бы ошибкой написать

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sin x)'}{(x+\sin x)'},$$

так как предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sin x)'}{(x+\sin x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

не существует.

В самом деле, беря последовательности $x_n'=2\pi n\to+\infty$ и $x_n''=\frac{\pi}{2}+2\pi n\to+\infty$ при $n\to\infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos x_n'}{1+\cos x_n'}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos x_n''}{1+\cos x_n''}=1.$$

Вместе с тем данная неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ может быть раскрыта элементарным путем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1.$$

Упражнение 1. Пусть $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, $g(x)=\sin x$. Найти $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}$ и доказать, что в этом случае правило Лопиталя неприменимо.

4. Неопределенности 0^0, ∞^0 или 1^∞ можно раскрыть, предварительно прологарифмировав соответствующие функции. Например, чтобы найти $\lim\limits_{x\to+0}x^x$, следует найти предел

$$\lim_{x\to+0}x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{1/x^2}=-\lim_{x\to+0}x=0.$$

Поэтому в силу непрерывности показательной функции

$$\lim_{x\to+0}x^x=\lim_{x\to+0}e^{x\ln x}=1.$$

Неопределенности вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ следует привести к виду $0/0$ или ∞/∞. При этом, как и всегда при применении правила Лопиталя, по ходу вычислений рекомендуется упрощать получающиеся выражения. Поясним это на примере.

5. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2x\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}$. Заметим, что

$$\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}\,\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}.$$

Предел первого сомножителя правой части находится непосредственно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{\sin x}\cos x\right)=2,$$

а предел второго — путем применения правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\frac{x}{\sin x}\cos x}=\frac{1}{3}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)=2/3.$

Упражнения. Найти пределы:

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-x^a}{x-a}$, $a>0$. 4. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to +0} x^\varepsilon\ln x$, $\varepsilon>0$. 5. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x-1/x)$.

§ 13. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

13.1. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

Если функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то ее приращение можно представить в виде

$$\Delta y=A\,\Delta x+o(\Delta x),\quad \Delta x\to 0,$$

где $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x)-y_0$, $y_0=f(x_0)$ и $A=f'(x_0)$, т. е. $f(x)=y_0+A(x-x_0)+o(x-x_0)$. Иначе говоря, существует линейная функция

$$P_1(x)=y_0+A(x-x_0) \tag{13.1}$$

такая, что

$$f(x)=P_1(x)+o(x-x_0),\quad x\to x_0,$$

причем

$$P_1(x_0)=y_0=f(x_0),\quad P_1'(x_0)=A=f'(x_0).$$

Поставим более общую задачу. Пусть функция f имеет в точке x_0 n производных. Требуется выяснить, существует ли многочлен $P_n(x)$ степени не выше n, такой, что

$$f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0, \tag{13.2}$$

и

$$f(x_0)=P_n(x_0),\quad f'(x_0)=P_n'(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)=P_n^{(n)}(x_0). \tag{13.3}$$

Будем искать этот многочлен, по аналогии с формулой (13.1), в виде

$$P_n(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\ldots+A_n(x-x_0)^n.$$