Предел первого сомножителя правой части находится непосредственно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{\sin x}\cos x\right)=2,$$

а предел второго — путем применения правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\dfrac{x}{\sin x}\cos x}=\frac{1}{3}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)=2/3.$

Упражнения. Найти пределы:

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-x^a}{x-a}$, $a>0$.
3. $\lim\limits_{x\to +0} x^\varepsilon \ln x$, $\varepsilon>0$.
4. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x-1/x)$.

§ 13. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

13.1. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

Если функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то ее приращение можно представить в виде

$$\Delta y=A\,\Delta x+o(\Delta x),\quad \Delta x\to 0,$$

где $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x)-y_0$, $y_0=f(x_0)$ и $A=f'(x_0)$, т. е. $f(x)=y_0+A(x-x_0)+o(x-x_0)$. Иначе говоря, существует линейная функция

$$P_1(x)=y_0+A(x-x_0) \tag{13.1}$$

такая, что

$$f(x)=P_1(x)+o(x-x_0),\quad x\to x_0,$$

причем

$$P_1(x_0)=y_0=f(x_0),\quad P_1'(x_0)=A=f'(x_0).$$

Поставим более общую задачу. Пусть функция f имеет в точке x_0 n производных. Требуется выяснить, существует ли многочлен $P_n(x)$ степени не выше n, такой, что

$$f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0, \tag{13.2}$$

и

$$f(x_0)=P_n(x_0),\ f'(x_0)=P_n'(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)=P_n^{(n)}(x_0). \tag{13.3}$$

Будем искать этот многочлен, по аналогии с формулой (13.1), в виде

$$P_n(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\ldots+A_n(x-x_0)^n.$$

Замечая, что $P_n(x_0)=A_0$, из первого условия (13.3), т. е. $f(x_0)=P_n(x_0)$, имеем $A_0=f(x_0)$. Далее,

$$P'_n(x)=A_1+2A_2(x-x_0)+\ldots+nA_n(x-x_0)^{n-1},$$

отсюда $P'_n(x_0)=A_1$, и так как $P'_n(x_0)=f'(x_0)$, то $A_1=f'(x_0)$. Затем найдем вторую производную многочлена $P_n(x)$:

$$P''_n(x)=2\cdot 1\cdot A_2+\ldots+n(n-1)A_n(x-x_0)^{n-2}.$$

Отсюда и из условия $f''(x_0)=P''_n(x_0)$ получим $A_2=\frac{f''(x_0)}{2!}$ и вообще

$$A_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

В силу самого построения, для многочлена

$$P_n(x)=$$
$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

выполнены все соотношения (13.3). Проверим, удовлетворяет ли он условию (13.2).

Пусть

$$r_n(x)\overset{\text{def}}{=}f(x)-P_n(x).$$

Из условия (13.3) следует, что

$$r_n(x_0)=r'_n(x_0)=\ldots=r_n^{(n)}(x_0)=0. \tag{13.4}$$

Поэтому, применяя n раз правило Лопиталя для раскрытия неопределенности $\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}$ при $x\to x_0$, а именно сначала $n-1$ раз теорему 2 из § 12, а затем теорему 1 того же параграфа, получаем:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x_0)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{r'_n(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}=\frac{r^n(x_0)}{n!}=0,$$

т. е. действительно $r_n(x)=o((x-x_0)^n)$, $x\to x_0$.

Итак, доказана следующая очень важная теорема.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ определенная на интервале $(a,\ b)$, имеет в точке $x_0\in(a,\ b)$ производные до порядка n включительно. Тогда при $x\to x_0$*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n), \tag{13.5}$$

или $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$.

Эта теорема остается справедливой, вместе с ее доказательством, и для функции f, определенной на отрезке $[a,\ b]$, при $x_0\in[a,\ b]$, если для $x_0=a$ и $x_0=b$ под производными понимать соответствующие односторонние производные.

Формула (13.5), называется *формулой Тейлора*[*] *n-го порядка с остаточным членом в форме Пеано.*

Многочлен

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{n!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (13.6)$$

называется *многочленом Тейлора,* а функция

$$r_n(x)=f(x)-P_n(x) \qquad (13.7)$$

— *остаточным членом n-го порядка формулы Тейлора.* Как показано, остаточный член $r_n(x)$ является бесконечно малой, при $x\to x_0$, более высокого порядка, чем все члены многочлена Тейлора (13.6).

Укажем другой вид записи формулы (13.5). Полагая

$$x-x_0=\Delta x,\ \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

получим

$$\Delta y=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\Delta x^k+o(\Delta x),\ \Delta x\to 0. \qquad (13.5')$$

Если в формуле (13.5) $x_0=0$, то получается частный вид формулы Тейлора, называемый обычно *формулой Маклорена*[**]:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n),\ x\to 0. \qquad (13.8)$$

Доказанная теорема позволяет любую функцию, удовлетворяющую условиям этой теоремы заменить, в окрестности некоторой точки, многочленом с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем члены многочлена. Таким многочленом является многочлен Тейлора. Величина погрешности дается при этом остаточным членом.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано дает единообразный метод выделения главной части функции в окрестности данной точки. На этом обстоятельстве и основаны многочисленные и разнообразные приложения формулы (13.5) в различных вопросах анализа.

Отметим полезное следствие из теоремы 1.

Следствие. *Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b), и пусть в точке x она имеет производные до порядка $n+1$*

---

[*] Б. Тейлор (1685—1731)—английский математик.
[**] К. Маклорен (1698—1746)—шотландский математик.

включительно. Тогда при $x \to x_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + O(x-x_0)^{n+1}. \tag{13.9}$$

Действительно, в силу теоремы 1 при $x \to x_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^{n+1}), \tag{13.10}$$

и поскольку

$$\frac{f^{n+1}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + o((x-x_0)^{n+1}) = O((x-x_0)^{n+1}) \text{ при } x \to x_0,$$

то из формулы (13.10) непосредственно следует формула (13.9). □

Упражнение 1. Доказать, что если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производную порядка n, то, каковы бы ни были точка x этой окрестности и функция $\psi(t)$, непрерывная на отрезке с концами в точках x_0 и x, имеющая неравную нулю производную внутри этого отрезка, найдется такая точка ξ, лежащая между x_0 и x, что для остаточного члена $r_{n-1}(x)$ формулы Тейлора функции $f(x)$ имеет место формула

$$r_{n-1}(x) = \frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(\xi)} \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Получить отсюда следующие виды записи остаточного члена:

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!\,p}(x-x_0)^p (x-\xi)^{n-p}, \quad p > 0 \quad \text{(форма Шлёмильха—Роша *)}.$$

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{(форма Лагранжа)},$$

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(x-x_0)^n, \quad 0 < \theta < 1 \quad \text{(форма Коши)}.$$

Указание. Рассмотреть вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

и применить к функциям φ и ψ теорему Коши о среднем значении. Для вывода остаточного члена в виде Шлёмильха—Роша положить $\psi(t) = (x-t)^p$.

13.2. МНОГОЧЛЕН ТЕЙЛОРА КАК МНОГОЧЛЕН НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ В ОКРЕСТНОСТИ ДАННОЙ ТОЧКИ

Заметим предварительно, что, очевидно, всякий многочлен

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k \tag{13.11}$$

---

* О. Шлёмильх (1823—1901)—немецкий математик. Э. Рош (1820—1883)—французский астроном и математик.

может быть представлен, для любого x_0, в виде

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k. \tag{13.12}$$

В самом деле, достаточно в (13.11) положить $x=x_0+h$ и разложить правую часть по степеням h; тогда

$$P_n(x)=a_0+a_1h+\ldots+a_nh^n, \text{ где } h=x-x_0,$$

т. е. мы получили формулу (13.12).

Многочлен Тейлора порядка n является многочленом, наилучшим образом среди всех многочленов степени n приближающим функцию f «в бесконечно малой окрестности» точки x_0, т. е. при $x\to x_0$. При этом такой многочлен оказывается единственным. Более точно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция f дифференцируема до порядка n включительно в точке x_0 и пусть*

$$f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n), \quad x\to x_0, \tag{13.13}$$

где $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$ — *некоторый многочлен степени, меньшей или равной n. Тогда*

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n, \tag{13.14}$$

т. е. $P_n(x)$ является многочленом Тейлора.

Иначе говоря, никакой многочлен степени, меньшей или равной n, отличный от многочлена Тейлора порядка n, не может приближать данную функцию с точностью до $o((x-x_0)^n)$ при $x\to x_0$ (а значит, и с более высокой точностью $o((x-x_0)^k)$, $k>n$).

Доказательство. Из формул (13.5) и (13.13) следует, что

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k+o((x-x_0)^n), \quad x\to x_0$$

откуда, перейдя к пределу при $x\to x_0$ получим $a_0=f(x_0)$. Отбрасывая слева и справа этот член, сокращая оставшиеся в обеих частях выражения на $x-x_0$ $(x\neq x_0)$ и замечая, что

$$o((x-x_0)^n)=\varepsilon(x)(x-x_0)^n, \text{ где } \lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0,$$

и, значит, при $x \to x_0$

$$\frac{o((x-x_0)^n)}{x-x_0} = \varepsilon(x)(x-x_0)^{n-1} = o((x-x_0)^{n-1}),\ n=1, 2, \ldots,$$

получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k-1} + o((x-x_0)^{n-1}) = \\ = \sum_{k=1}^{n} a_k (x-x_0)^{k-1} + o((x-x_0)^{n-1}).$$

Перейдя снова к пределу при $x \to x_0$ будем иметь $a_1 = f'(x_0)$. Продолжая таким же образом, получим

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \ \square$$

Единственность представления функции в виде (13.13) может быть иногда использована для ее разложения по формуле Тейлора. Именно, если удается каким-либо косвенным путем получить представление (13.13), то в силу теоремы 2 можно утверждать, что это и есть разложение по формуле Тейлора (13.5), т. е. что коэффициенты найденного многочлена выражаются по формулам (13.14).

Так, например, соотношение (13.12) представляет собой разложение многочлена (13.11) по формуле Тейлора, причем в этом случае $r_n(x) \equiv 0$, поэтому согласно теореме 2 коэффициенты многочлена (13.12) имеют вид

$$a_k = \frac{P_n^k(x_0)}{k!}.$$

Таким образом,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

В частности, при разложении многочлена степени n по формуле Тейлора остаток n-го порядка тождественно равен нулю.

Пусть требуется разложить по формуле Тейлора функцию $f(x) = 1/(1-x)$ в окрестности точки $x_0 = 0$. Замечая, что $1/(1-x)$ есть не что иное как сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,\quad |x| < 1,$$

и полагая $r_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots = \frac{x^{n+1}}{1-x}$, $|x| < 1$, получим

$$1/(1-x) = 1 + x + \ldots + x^n + r_n(x),$$

где $r_n(x)=O(x^{n+1})$ и, значит, $r_n(x)=o(x^n)$ при $x \to 0$. Таким образом, представление

$$1/(1-x)=1+x+\ldots+x^n+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n} x^k+o(x^n),\quad x \to 0.$$

и есть разложение функции $1/(1-x)$, по формуле Тейлора в окрестности нуля.

13.3. ПРИМЕРЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ФОРМУЛЕ ТЕЙЛОРА

1. $f(x)=\sin x$. Функция $\sin x$ обладает производными всех порядков. Найдем для нее формулу Тейлора при $x_0=0$, т. е. формулу Маклорена (13.8). Было доказано (см. п. 10.1), что $(\sin x)^{(m)}=\sin\left(x+m\frac{\pi}{2}\right)$, поэтому

$$f^{(m)}0=\sin\frac{m\pi}{2}=\begin{cases} 0 \text{ для } m=2k, \\ (-1)^k \text{ для } m=2k+1, \end{cases} \quad k=0,\ 1,\ 2, \ldots \tag{13.15}$$

и согласно формуле (13.5),

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}),$$

при $x \to 0$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, или, короче,

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2}) \text{ при } x \to 0.$$

Мы записали здесь остаточный член в виде $o(x^{2n+2})$, а не в виде $o(x^{2n+1})$, так как следующий за последним выписанным слагаемым член многочлена Тейлора в силу (13.15) равен нулю.

2. $f(x)=\cos x$. Как известно (см. п. 10.1), $f^{(m)}(x)=\cos\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)$, а поэтому

$$f^{(m)}(0)=\cos\frac{m\pi}{2}=\begin{cases} 0 \text{ для } m=2k+1, \\ (-1)^k \text{ для } m=2k, \end{cases} \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

и

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

при $x \to 0$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, или, короче,

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1}) \text{ при } x \to 0,$$
$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

3. $f(x)=e^x$. Поскольку $(e^x)^{(n)}=e^x$, то $f^{(n)}(0)=1$, $n=0, 1, \ldots,$ следовательно,

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n), \tag{13.16}$$

при $x\to 0$, $n=0, 1, 2, \ldots,$ или, короче,

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n) \text{ при } x\to 0.$$

Отсюда, заменяя x через $-x$, получим

$$e^{-x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{k!}+o(x^n) \text{ при } x\to 0,\ n=0, 1, 2, \ldots \tag{13.17}$$

4. $\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ и $\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Сложив и вычтя (13.16) и (13.17), будем иметь

$$\operatorname{sh} x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2}),$$

$$\operatorname{ch} x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1}) \text{ при } x\to 0\ n=0, 1, 2, \ldots.$$

В силу единственности представления функции в указанном виде (см. теорему 2) полученные соотношения являются формулами Тейлора для функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$.

5. $f(x)=(1+x)^\alpha$, α — некоторое фиксированное число. Так как $f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, то

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$$

и, следовательно,

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

при $x\to 0$, $n=0, 1, 2, \ldots,$ или, короче,

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+o(x^n) \text{ при } x\to 0,$$
$$n=1, 2, \ldots.$$

6. $f(x)=\ln(1+x)$. Легко видеть, что

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1},\ f''(x)=-(1+x)^{-2}$$

и вообще $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!\,(1+x)^{-k}$, $k=1, 2, \ldots$. Поэтому $f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$, $k=1, 2, \ldots$, и так как $f(0)=0$, то

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

при $x\to 0$, $n=1, 2, \ldots$, или, короче,

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o(x^n) \text{ при } x\to 0,\ n=1, 2, \ldots.$$

З а м е ч а н и е. В силу следствия теоремы 1, полученные формулы можно записать, используя символ O (O большое), следующим образом:

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+O(x^{2n+3}),$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+O(x^{2n+2}),$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+O(x^{n+1}),$$

$$\operatorname{sh} x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+O(x^{2n+3}),$$

$$\operatorname{ch} x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+O(x^{2n+2}),\qquad n=0, 1, 2, \ldots,$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+O(x^{n+1}),$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+O(x^{n+1}),\ n=1, 2, \ldots, \text{ при } x\to x_0.$$

Такая запись формул Тейлора в некоторых вопросах оказывается более удобной, чем их запись с символом o (o маленькое).

13.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА (МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ГЛАВНОЙ ЧАСТИ)

Формула Тейлора дает простое и весьма общее правило для выделения главной части функции. В результате этого метод вычисления пределов функций с помощью выделения главной части приобретает законченный алгоритмический характер.

Рассмотрим сначала случай неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Пусть требуется найти предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, где $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$. В этом случае рекомендуется разложить по формуле Тейлора функции f и g в окрестности точки x_0 (если, конечно, это возможно), ограничившись в этом разложении лишь первыми не равными нулю членами, т. е. взять разложения в виде

$$f(x)=a(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n), \qquad a\neq 0,$$
$$g(x)=b(x-x_0)^m+o((x-x_0)^m), \qquad b\neq 0,$$

тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{a(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)}{b(x-x_0)^m+o((x-x_0)^m)}=$$
$$=\frac{a}{b}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^{n-m}=\begin{cases}0, & \text{если } n>m,\\ \frac{a}{b}, & \text{если } n=m,\\ \infty, & \text{если } n<m.\end{cases}$$

Часто бывает удобно для разложения функций f и g по формуле Тейлора использовать готовый набор разложений элементарных функций, полученный в п. 13.3. Для этого следует в случае $x_0\neq 0$ предварительно выполнить замену переменного $t=$ $=x-x_0$; тогда $x\to x_0$ будет соответствовать $t\to 0$. Случай $x\to\infty$ заменой переменного $x=\frac{1}{t}$ сводится к случаю $t\to 0$.

Если имеется неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, т. е. требуется найти $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, где $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, то ее легко привести к рассмотренному случаю $\frac{0}{0}$ преобразованием $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1/g(x)}{1/f(x)}$.

Подобно вычислению пределов с помощью правила Лопиталя, при применении метода выделения главной части к раскрытию неопределенностей вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ их следует преобразовать к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Наконец, для раскрытия неопределенностей вида 0^0, ∞^0 и 1^∞ указанным методом, необходимо предварительно прологарифмировать рассматриваемые функции.

Посмотрим на примерах, как применяется формула Тейлора к вычислению пределов функций. Пусть требуется найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}.$$

Заметив, что (см. п. 13.3)

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3),\quad e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3/3+o(x^3)}{x^3/6+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3/3}{x^3/6}=2.$$

Рассмотрим неопределенность вида $\infty-\infty$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]^2-x^2}{x^2[x+o(x)]^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^2[x^2+o(x^2)]}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{3}}{x^4}=-\frac{1}{3}.$$

В качестве последнего примера вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$, т. е. раскроем неопределенность вида 1^∞. Согласно общему правилу, найдем предел логарифма выражения, стоящего под знаком предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{x+o(x^2)}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+o(x))}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}=0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}}=1.$$

Упражнения. Найти пределы:

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{e^x-1-x-x^2/2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x-x^2)}{x\sin x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sqrt[4]{1-x^2}-4e^{x^3}+\ln(1+x^2)}{\operatorname{arctg} x-\sin x}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})+2x^3}{x^5}$.