Упражнения. Построить графики следующих функций:

6. $y=x^{1/x}$.

7. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt{(x-1)^2}$.

8. $y=\sin^3 x+\cos^3 x$.

9. $y=x^2\ln x$.

10. $y=\dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.

11. $y=x^2\left(1-\frac{1}{4}\sin\frac{1}{x}\right)$.

12. $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$.

13. $x=t-e^{-t}$, $y=2t-e^{-2t}$.

14. $x=\dfrac{t^2+1}{t^2-1}$, $y=\dfrac{t}{t^4+1}$.

15. $y^3-x^2y^2-x^3=0$. Указание: выразить $x$ и $y$ через параметр $t$, полагая $y=tx$.

# § 15. ВЕКТОР-ФУНКЦИЯ

## 15.1. ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА И НЕПРЕРЫВНОСТИ ДЛЯ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

**Определение 1.** *Если каждому значению $t\in E$, где $E$ — некоторое множество чисел, соответствует определенный вектор $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ трехмерного пространства, то будем говорить, что на $E$ определена вектор-функция, или, что то же, векторная функция $\boldsymbol{r}(t)$.*

В этом определении в зависимости от рассматриваемых задач. под значениями $\boldsymbol{r}(t)$ можно понимать как свободные векторы, так и векторы с закрепленными в одной и той же точке началами (так называемые *радиус-векторы*).

Если в пространстве задана прямоугольная система координат, то, как хорошо известно, каждому вектору соответствует упорядоченная тройка действительных чисел — его координат, и наоборот, каждой упорядоченной тройке чисел соответствует вектор, для которого числа, входящие в эту тройку, являются его координатами. Поэтому задание вектор-функции эквивалентно заданию трех скалярных (числовых) функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, являющихся его координатами:

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t)).$$

Если при всех $t\in E$ имеем $z(t)=0$, то вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ называется двумерной; в этом случае пишется

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t)).$$

Длина всякого вектора $\boldsymbol{\rho}$ обозначается через $|\boldsymbol{\rho}|$. Будем предполагать известными основные алгебраические свойства векторов, понятие скалярного и векторного произведений, а также свойства этих произведений. Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначается через $\boldsymbol{ab}$ или $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$, а векторное через $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ или $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$.

Введем понятие предела, непрерывности, производной и дифференциала для векторных функций.

**Определение 2.** *Пусть вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $t_0$ и $\boldsymbol{a}$ — некоторый вектор.*

*Будем называть вектор* $\boldsymbol{a}$ *пределом функции* $\boldsymbol{r}(t)$ *при* $t\to t_0$ *и писать* $\boldsymbol{a}=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)$ (*или* $\boldsymbol{r}(t)\to\boldsymbol{a}$ *при* $t\to t_0$), *если для любого* $\varepsilon>0$ *существует такое* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, *что для всех* $t$, *удовлетворяющих условию* $|t-t_0|<\delta$, $t\neq t_0$, *выполняется неравенство* (*рис.* 62) $|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|<\varepsilon$.

Очевидно (ср. с леммой п. 4.9), что

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{a}, \tag{15.1}$$

тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|=0. \tag{15.2}$$

Если $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$ и $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, то для того, чтобы $\boldsymbol{a}=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\to t_0}x(t)=a_1,\quad \lim_{t\to t_0}y(t)=a_2,\quad \lim_{t\to t_0}z(t)=a_3. \tag{15.3}$$

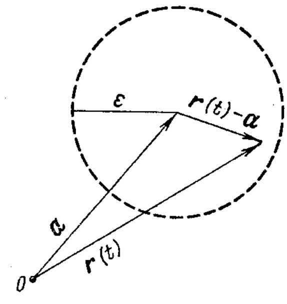


Рис. 62

В самом деле,

$$|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|=\sqrt{[x(t)-a_1]^2+[y(t)-a_2]^2+[z(t)-a_3]^2}. \tag{15.4}$$

Поэтому $|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|\geqslant|x(t)-a_1|$. Отсюда следует, что условие $|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|\to 0$ при $t\to t_0$ влечет за собой условие $|x(t)-a_1|\to 0$ при $t\to t_0$, т. е. $\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=a_1$. Аналогично доказываются другие равенства (15.3). Наоборот, если выполнено (15.3), то из (15.4) сразу получаем, что $|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|\to 0$ при $t\to t_0$, т. е. $\boldsymbol{a}=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)$.

Отметим некоторые свойства пределов векторных функций.

1°. Если $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{a}$, то $\lim\limits_{t\to t_0}|\boldsymbol{r}(t)|=|\boldsymbol{a}|$. Это непосредственно следует из неравенства $||\boldsymbol{r}|-|\boldsymbol{a}||\leqslant|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|$.

2°. $\lim\limits_{t\to t_0}[\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)+\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t)$.

3°. $\lim\limits_{t\to t_0}f(t)\boldsymbol{r}(t)=\lim\limits_{t\to t_0}f(t)\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)$ ($f(t)$ — скалярная функция).

4°. $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\boldsymbol{r}_2(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t)$.

5°. $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\times\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t)$.

В свойствах 2°—5° все рассматриваемые функции определены в некоторой окрестности точки $t_0$, кроме, быть может, самой точки $t_0$, и предполагается, что все пределы, входящие в правые части равенств, существуют; тогда утверждается, что существуют и пределы, стоящие в левых частях, причем справедливы написанные равенства.

Все эти свойства доказываются аналогично тому, как мы доказывали подобные утверждения, встречавшиеся нам раньше (см. п. 3.9, 4.7). Докажем, например, свойство 5°. Предварительно заметим, что для любых векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$

$$|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}|=|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\sin\widehat{\boldsymbol{pq}}\leqslant|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|. \tag{15.5}$$

Поэтому, если $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(t)$, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(t)$, причем $\lim\limits_{t\to t_0}|\boldsymbol{p}(t)|=0$, а $|\boldsymbol{q}(t)|$ — ограниченная функция, то из (15.5) имеем (см. п. 4.9)

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}|=0. \tag{15.6}$$

Пусть теперь $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)=\boldsymbol{a}$, $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t)=\boldsymbol{b}$. Положим $\boldsymbol{\alpha}(t)=\boldsymbol{r}_1(t)-\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\beta}(t)=\boldsymbol{r}_2(t)-\boldsymbol{b}$; тогда согласно (15.2),

$$\lim_{t\to t_0}|\alpha(t)|=\lim_{t\to t_0}|\beta(t)|=0 \tag{15.7}$$

и

$$\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)=[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\alpha}(t)]\times[\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\beta}(t)]=$$
$$=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\beta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\beta}(t),$$

где, в силу (15.7), $\lim\limits_{t\to t_0}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\beta}(t)|=\lim\limits_{t\to t_0}|\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{b}|=\lim\limits_{t\to t_0}|\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\beta}(t)|=0$. Так как

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\beta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\alpha}(t)|\times\boldsymbol{\beta}(t)|\leqslant$$
$$\leqslant|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\beta}(t)|+|\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\beta}(t)|,$$

то и $\lim\limits_{t\to t_0}|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\beta}(t)|=0$. А это, согласно (15.2), и означает, что

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}. \ \Box$$

Отметим, что свойства 1°—5° пределов вектор-функций могут, конечно, быть получены с помощью формул (15.3) из соответствующих свойств скалярных функций, если перейти к координатной записи векторов и их скалярных и векторных произведений.

Перейдем к определению непрерывности вектор-функции.

**Определение 3.** *Вектор-функция* $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, *определенная в некоторой окрестности точки* $t_0$, *называется непрерывной в* $t_0$, *если* $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t_0)$.

Из эквивалентности условий (15.1) и (15.3) следует, что для того чтобы вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$, определенная в некоторой окрестности точки $t_0$, была непрерывной в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы при $t=t_0$ были непрерывными функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Из свойств пределов векторных функций следует, что сумма, скалярное и векторное произведения векторных функций, а также произведение скалярных функций на векторные будут непрерывными в некоторой точке, если в этой точке непрерывны все слагаемые, соответственно — сомножители.

## 15.2. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

**Определение 4.** *Пусть вектор-функция $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ определена в некоторой окрестности точки $t_0$. Если существует предел*

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t},$$

*то он называется производной данной вектор-функции в $t_0$ и обозначается через $\boldsymbol{r}'(t_0)$ или $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$.*

Таким образом, производная вектор-функция в точке есть вектор.

Для того чтобы функция $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$, определенная в некоторой окрестности точки $t_0$, имела производную в $t_0$, необходимо и достаточно, чтобы функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ имели производные при $t=t_0$, причем в этом случае

$$\boldsymbol{r}'(t_0)=(x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0)),\quad |\boldsymbol{r}'(t_0)|=\sqrt{x'^2(t_0)+y'^2(t_0)+z'^2(t_0)}.$$

Это непосредственно следует из эквивалентности двух подходов (15.1) и (15.3) к определению предела для вектор-функции:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}=$$
$$=\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t},\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t},\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}\right).$$

**Определение 5.** *Вектор-функция $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, определенная в некоторой окрестности точки $t_0$, называется дифференцируемой при $t=t_0$, если ее приращение $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)$ в точке $t_0$ представимо в виде*

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\Delta t+\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\Delta t,\qquad(15.8)$$

*где $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)=0$. При этом линейная вектор-функция*) $\boldsymbol{a}\Delta t$ называется дифференциалом функции $\boldsymbol{r}(t)$ в точке $t_0$ и обозначается через $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\Delta t$:*

$$\Delta\boldsymbol{r}=d\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\Delta t.\qquad(15.9)$$

---

*) Вектор-функция аргумента $t$ называется линейной, если она имеет вид $\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — какие-либо два фиксированных вектора.

Очевидно, что если вектор-функция дифференцируема при $t=t_0$, то она и непрерывна в этой точке.

Как и в случае скалярных функций, из дифференцируемости функции следует существование производной $\boldsymbol{r}'(t)$ и равенство ее вектору $\boldsymbol{a}$. В самом деле, из (15.8) имеем

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)]=\boldsymbol{a}.$$

Наоборот, если существует производная $\boldsymbol{r}'(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$, то, полагая $\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)=\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}-\boldsymbol{r}'(t_0)$, получаем $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'(t_0)\Delta t+\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\Delta t$, где $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)=0$. Значит, $\boldsymbol{r}(t)$ дифференцируема в точке $t_0$ и

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'(t_0)\Delta t.$$

Положим для независимой переменной $t$, по определению, $dt=\Delta t$; тогда (опуская обозначение аргумента $t_0$)

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'dt,\quad \boldsymbol{r}'=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}.$$

Подставляя полученное выражение для $d\boldsymbol{r}$ в (15.9), получим

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'\Delta t+\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\Delta t,$$

или

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'\Delta t+\boldsymbol{\alpha}(\Delta t), \tag{15.10}$$

где $\boldsymbol{\alpha}(\Delta t)=\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\Delta t=\boldsymbol{o}(\Delta t)$ при $\Delta t\to 0$ *) и $\boldsymbol{\alpha}(0)=\boldsymbol{0}$.

Пусть теперь $t=t(\tau)$. Если эта функция дифференцируема в точке $\tau_0$, $t_0=t(\tau_0)$ и $\Delta\tau=\tau-\tau_0$, то из (15.10) (обозначая для ясности $\boldsymbol{r}'$ через $\boldsymbol{r}'_t$), следует, что

$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta\tau}=\boldsymbol{r}'_t\frac{\Delta t}{\Delta\tau}+\frac{\boldsymbol{\alpha}(\Delta t)}{\Delta\tau}.$$

Так как $\Delta t\to 0$ при $\Delta\tau\to 0$, то, как и в случае числовой функции (см. п. 9.7), положив $\boldsymbol{\varepsilon}(0)=\boldsymbol{0}$, получим

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\boldsymbol{\alpha}(\Delta t)}{\Delta\tau}=\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\frac{\Delta t}{\Delta\tau}=\boldsymbol{0}.$$

поэтому производная $\boldsymbol{r}'_\tau=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta\tau}$ существует и $\boldsymbol{r}'_\tau=\boldsymbol{r}'_t t'_\tau$. Отсюда, как и в случае скалярных функций, вытекает инвариантность записи дифференциала вектор-функции; как для зависимой переменной $t$, так и для независимой переменной $\tau$ имеем

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'_t\,dt,\quad d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'_\tau\,d\tau.$$

---

* По аналогии со случаем скалярных функций, для вектор-функции $\boldsymbol{\alpha}(t)$ пишется $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{o}(\beta)$ при $t\to t_0$, если $\boldsymbol{\alpha}(t)=\boldsymbol{\varepsilon}(t)\beta(t)$, где $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{\varepsilon}(t)=\boldsymbol{0}$.

Приведем формулы дифференцирования вектор-функций (аргумент для простоты обозначений опущен):

1. $(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)'=\boldsymbol{r}_1'+\boldsymbol{r}_2'$.
2. $(f\boldsymbol{r})=f'\boldsymbol{r}+f\boldsymbol{r}'$.
3. $(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2)'=\boldsymbol{r}_1'\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2'$.
4. $(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)'=\boldsymbol{r}_1'\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2'$.

Здесь все рассматриваемые функции определены в некоторой окрестности точки $t_0$ и предполагается, что все производные, стоящие в правой части каждого равенства, существуют при $t=t_0$; тогда в точке $t_0$ существуют и производные, стоящие в левой части, причем справедливы написанные равенства.

Все эти формулы доказываются аналогично формулам дифференцирования скалярных функций (см. п. 9.5). Докажем, например, формулу 4.

Использовав свойства 1°—5° пределов вектор-функций, получим:

$$[\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)]'_{t=t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}_1(t_0+\Delta t)\times\boldsymbol{r}_2(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}_1(t_0)\times\boldsymbol{r}_2(t_0)}{\Delta t}=$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\boldsymbol{r}_1(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}_1(t_0)}{\Delta t}\times\boldsymbol{r}_2(t_0+\Delta t)+\boldsymbol{r}_1(t_0)\times\frac{\boldsymbol{r}_2(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}_2(t_0)}{\Delta t}\right]=$$
$$=\boldsymbol{r}_1'(t_0)\times\boldsymbol{r}_2(t_0)+\boldsymbol{r}_1(t_0)\times\boldsymbol{r}_2'(t_0).$$

Если вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$ определена в некоторой окрестности точки $t_0$ и имеет $n$ производных в этой точке, то для нее справедлива формула Тейлора

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d^k\boldsymbol{r}(t_0)}{dt^k}\Delta t^k+\boldsymbol{o}(\Delta t^n).$$

Она непосредственно следует из разложения по формуле Тейлора координатных функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

Мы видим, что многие факты, установленные в теории скалярных функций, дословно переносятся на вектор-функции. Однако было бы ошибкой думать, что это всегда так: например, в определенном смысле аналог формулы конечных приращений не имеет места для вектор-функций.

Действительно, рассмотрим двумерную вектор-функцию $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t,\ \sin t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Поскольку $\boldsymbol{r}'(t)=(-\sin t,\ \cos t)$, то $|\boldsymbol{r}'(t)|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=1$ при любом $t\in[0,\ 2\pi]$. Следовательно, не существует такой точки $\xi\in[0,\ 2\pi]$, для которой было бы справедливо равенство, аналогичное формуле конечных приращений Лагранжа для скалярных функций,

$$\boldsymbol{r}(2\pi)-\boldsymbol{r}(0)=2\pi\boldsymbol{r}'(\xi),$$

так как слева стоит нулевой вектор, ибо $\boldsymbol{r}(2\pi)=\boldsymbol{r}(0)$, а справа — не нулевой.

Некоторой заменой формулы конечных приращений для вектор-функций является следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть вектор-функция* $\boldsymbol{r}(t)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и дифференцируема внутри него. Тогда существует такая точка* $\xi \in (a, b)$, *что*

$$|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)| \leqslant (b-a)|\boldsymbol{r}'(\xi)|. \qquad (15.11)$$

Доказательство. Если $\boldsymbol{r}(a)=\boldsymbol{r}(b)$, то неравенство (15.11) справедливо при любом выборе точки $\xi \in (a, b)$, ибо его левая часть обращается в ноль.

Пусть $\boldsymbol{r}(a) \neq \boldsymbol{r}(b)$. Оценим длину $|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)|$ вектора $\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a) \neq 0$. Если задан какой-либо вектор $\boldsymbol{x}$, то обозначая через $\boldsymbol{e}$ единичный вектор в направлении вектора $\boldsymbol{x}$, получим $|\boldsymbol{x}|=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e})$, ибо согласно определению скалярного произведения $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}) = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{e}|\cos\widehat{\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}}$, $|\boldsymbol{e}|=1$, $\widehat{\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}}=0$, и, следовательно, $\cos\widehat{\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}}=1$. Поэтому, если $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор в направлении вектора $\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a) \neq 0$, то

$$|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)|=(\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a), \boldsymbol{e})=(\boldsymbol{r}(b), \boldsymbol{e})-(\boldsymbol{r}(a), \boldsymbol{e}),$$

т. е. получилась разность значений числовой функции

$$f(t)=(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{e}) \qquad (15.12)$$

на концах отрезка $[a, b]$:

$$|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)|=f(b)-f(a). \qquad (15.13)$$

Из (15.12) следует, что функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех его внутренних точках, ибо согласно условиям теоремы этими свойствами обладает функция $\boldsymbol{r}(t)$. Поэтому, в силу формулы конечных приращений Лагранжа, существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$. Но согласно правилу дифференцирования скалярного произведения имеем

$$f'(t)=(\boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{e}),$$

вследствие чего

$$f(b)-f(a)=(\boldsymbol{r}'(\xi), \boldsymbol{e})(b-a), \quad a<\xi<b. \qquad (15.14)$$

Для любых же двух векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из определения скалярного произведения следует неравенство

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|=|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}||\cos\widehat{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}| \leqslant |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|;$$

в частности

$$|(\boldsymbol{r}'(\xi), \boldsymbol{e})| \leqslant |\boldsymbol{r}'(\xi)||\boldsymbol{e}|=|\boldsymbol{r}'(\xi)|.$$

Следовательно, из (15.14) получаем:

$$f(b)-f(a) \leqslant |\boldsymbol{r}'(\xi)|(b-a), \quad a<\xi<b.$$

Из этого неравенства и формулы (15.13) сразу следует неравенство (15.11). $\square$