§ 16. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

16.1. ПОНЯТИЕ КРИВОЙ

Рассмотрим отображения отрезков в трехмерное пространство R^3. Пусть $[a, b]$ — некоторый отрезок, а $r(t)$ — его отображение в R^3, т. е. отображение, ставящее в соответствие каждой точке $t \in [a, b]$ точку $r(t)$ пространства R^3, короче, $r: [a, b] \to R^3$.

Будем считать, что в пространстве R^3 фиксирована система координат. В этом случае задание точки пространства равносильно заданию трех ее координат. Обозначим координаты точки $r(t)$ через $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$:

$$r(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)).$$

Тогда задание отображения $r(t)$ оказывается равносильным заданию трех числовых функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, называемых *координатными функциями отображения* $r(t)$.

Отображение $r(t)$ называется *непрерывным на отрезке* $[a, b]$, если на этом отрезке непрерывны все его координатные функции.

Для отображения $r(t)$ будем обозначать через $\boldsymbol{r}(t)$ вектор-функцию, у которой координаты вектора $\boldsymbol{r}(t)$ совпадают с координатами точки $r(t)$, т. е. $\boldsymbol{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$, и будем называть отображение $r(t)$ и вектор-функцию $\boldsymbol{r}(t)$ соответствующими друг другу.

Очевидно, что отображение $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, непрерывно на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда на этом отрезке непрерывна соответствующая ему вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$. Действительно, мы знаем, что вектор-функция непрерывна на отрезке в том и только том случае, когда на нем непрерывны все ее координаты (см. п. 15.1), что по определению является условием непрерывности отображения $r(t)$ на отрезке.

Теперь можно сформулировать определение кривой.

Множество Γ пространства, заданное как непрерывный образ некоторого отрезка[*] называется *непрерывной кривой* или просто кривой.

Указанное непрерывное отображение, обозначим его снова через $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, отрезка $[a, b]$ на множество $\Gamma \subset R^3$ называется представлением кривой Γ и пишется

$$\Gamma = \{r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Переменная t называется *параметром кривой* Γ.

Таким образом, кривая есть не просто множество пространства, а множество, рассматриваемое как результат некоторого непрерывного отображения отрезка. Иначе говоря, кривая — это

---

[*] *Непрерывным образом отрезка* называется образ отрезка при непрерывном отображении последнего.

множество пространства плюс непрерывное отображение на него отрезка.

Поэтому одно и то же множество, полученное как образ двух разных непрерывных отображений отрезков, рассматривается как различные кривые.

Отметим, что непрерывное отображение $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, являющееся представлением кривой Γ, не предполагается взаимно однозначным: в одну и ту же точку кривой Γ могут отобразиться две или больше точек отрезка $[a, b]$.

Точки кривой $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, в которые отображается более чем одна точка отрезка $[a, b]$, называются *точками самопересечения*, или *кратными точками* этой кривой.

Таким образом, если точка M непрерывной кривой Γ является кратной точкой последней, то при заданном представлении $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, этой кривой Γ существуют по крайней мере два таких различных значения t_1 и t_2 параметра t, $a \leqslant t_1 \leqslant b$, $a \leqslant t_2 \leqslant b$, что $r(t_1) = r(t_2) = M$.

Точка $r(a)$ кривой $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ называется ее началом, а точка $r(b)$ — ее концом.

Определение 1. *Кривая $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ называется замкнутой кривой, или, что то же самое, замкнутым контуром, если ее начало совпадает с ее концом: $r(a) = r(b)$.*

Замкнутая кривая, не имеющая точек самопересечения, кроме точки $r(a) = r(b)$, и такая, что $r(t) \neq r(a) = r(b)$ при $a < t < b$, называется простым замкнутым контуром.

Будем говорить, что точка $M = r(t)$ кривой $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ стремится к точке $M_0 = r(t_0)$ этой кривой, если $|MM_0| \to 0$ при $t \to t_0$.

Если кривая Γ лежит в некоторой плоскости, то эта кривая называется *плоской*. Если указанная плоскость выбрана за координатную плоскость xOy, то представление кривой имеет вид

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = 0,$$

причем уравнение $z = 0$, если это не может привести к недоразумениям, обычно не пишется.

График непрерывной на некотором отрезке $[a, b]$ функции $y = f(x)$ является плоской кривой в нашем смысле с представлением

$$x = x,\quad y = f(x),\quad a \leqslant x \leqslant b$$

(в этом случае параметр $t = x$).

Отображение $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, задающее кривую Γ, при фиксированной в пространстве системе координат x, y, z можно задавать также в координатном виде, т. е., задавая координаты точки $r(t)$:

$$r(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)).$$

В этом случае тройка функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, называется *координатным представлением кривой* Γ *и пишется*:

$$\Gamma = \{x(t),\ y(t),\ z(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Отображение $r(t)$ можно задать и соответствующей ему вектор-функцией $\boldsymbol{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, где, как всегда, $\boldsymbol{r}(t)$ — радиус-вектор с концом в точке $r(t)$. *) В этом случае кривая $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *годографом* вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$, а сама эта вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ — *векторным представлением кривой* Γ и пишется

$$\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\quad a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Примером кривой является окружность. Возьмем для определенности окружность радиуса r с центром в начале координат. Ее можно, например, представить как непрерывный образ отрезка $[0,\ 2\pi]$ с помощью функций

$$x = r\cos t,\quad y = r\sin t,\qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \tag{16.1}$$

Очевидно, окружность является простым замкнутым контуром. Примером незамкнутой кривой является любая дуга окружности, соответствующая, например, изменению параметра t на отрезке $[0,\ \alpha]$, где $0 \leqslant \alpha < 2\pi$.

Отметим, что множество точек кривой

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t,\qquad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi \tag{16.2}$$

совпадает с множеством точек кривой (16.1): и в том и в другом случае это окружность $x^2 + y^2 = r^2$ на плоскости x, y. Однако получена она как результат разных отображений: при отображении (16.1), т. е. при изменении параметра t от 0 до 2π эта окружность проходится один раз, а при отображении (16.2), т. е. при изменении параметра t от 0 до 4π, она проходится дважды. Поэтому (16.1) и (16.2) — разные кривые.

Аналогичным образом определяются специальные виды непрерывных кривых: (непрерывно) дифференцируемые, дважды (непрерывно) дифференцируемые и т. п. Определим, например, непрерывно дифференцируемые кривые. Отображение $r(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$ отрезка $[a,\ b]$ в пространство называется *непрерывно дифференцируемым*, если все функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,\ b]$.

Кривая $\Gamma = \{r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *непрерывно дифференцируемой*, если ее представление $r(t)$ непрерывно дифференцируемо на отрезке $[a,\ b]$.

Аналогично определяются дифференцируемые кривые, дважды дифференцируемые, дважды непрерывно дифференцируемые и т. д.

---

*) Если не оговорено что-либо другое, то всегда предполагается, что начало радиус-вектора находится в начале координат.

Приведенное определение кривой имеет в своей основе физическое представление о траектории (пути) движущейся в пространстве материальной точки. Но на такой траектории можно выбирать различные параметры, например, время движения t, длину пройденного пути s или что-либо еще. Поэтому условие, состоящее в том, что две кривые с разными представлениями считаются всегда различными, не всегда удобно. Такое соглашение естественно для кривых (16.1) и (16.2). Однако два представления кривых

$$x=\cos t,\ y=-\sin t,\ -\pi\leqslant t\leqslant 0 \text{ и } y=\sqrt{1-x^2},\ -1\leqslant x\leqslant 1,$$

естественно было бы считать представлением одной и той же кривой: полуокружности $x^2+y^2=1$, $y\geqslant 0$.

Эти соображения приводят к мысли о проведении некоторого уточнения понятия кривой: объединения некоторых различных в смысле данного выше определения кривых в одну кривую. Сделаем это.

Будем говорить, что кривые $\Gamma_1=\{r(t),\ a\leqslant t\leqslant b\}$ и $\Gamma_2=\{\rho(\tau), \alpha\leqslant\tau\leqslant\beta\}$ являются одной и той же кривой, если существует непрерывная строго возрастающая функция $\tau=\varphi(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, $\varphi(a)=\alpha$, $\varphi(b)=\beta$ или непрерывная строго убывающая функция $\tau=\varphi(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, $\varphi(a)=\beta$, $\varphi(b)=\alpha$, такая, что для всех $t\in[a, b]$ имеет место равенство $r(t)=\rho(\varphi(t))$.

В случае (непрерывно) дифференцируемых кривых предполагается, что функция φ: $[a, b]\to[\alpha, \beta]$ кроме того (непрерывно) дифференцируема на $[a, b]$ и имеет не обращающуюся в ноль производную. Последнее условие обеспечивает (непрерывную) дифференцируемость обратной функции φ^{-1}.

Подобные преобразования параметра, т. е. такие, которые приводят к той же кривой в смысле сделанного определения, называются *допустимыми преобразованиями параметра*, а все представления одной и той же кривой называются *эквивалентными* между собой.

Более подробно переход к другим представлениям данной кривой будет рассмотрен в следующем пункте.

16.2*. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАННЫЕ КРИВЫЕ

Для построения строгой теории кривых, допускающих разные представления, введем предварительно понятие эквивалентных отображений отрезков в пространство.

Определение 2. *Непрерывное отображение $r(t)$ отрезка $[a, b]$ в пространство называется эквивалентным непрерывному отображению $\rho(\tau)$ отрезка $[\alpha, \beta]$ в то же пространство, если существует такая непрерывная строго монотонная функция $t=\varphi(\tau)$ (возрастающая или убывающая), что она отображает отрезок $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$ и для каждого $\tau\in[\alpha, \beta]$ справедливо ра-*

венство (*рис.* 63)

$$r(\varphi(\tau)) = \rho(\tau). \tag{16.3}$$

Функция $\varphi(\tau)$ называется *отображением, осуществляющим эквивалентность отображений* $r(t)$ и $\rho(\tau)$.

Если непрерывное отображение $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, отрезка $[a, b]$ в пространство эквивалентно непрерывному отображению $\rho(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, отрезка $[\alpha, \beta]$ в пространство, то пишут $r(t) \sim \rho(\tau)$.

Легко убедиться, что всякое непрерывное отображение отрезка в пространство эквивалентно самому себе: $r(t) \sim r(t)$ (здесь отображением, осуществляющим эквивалентность, является функция $t = \tau$, $a = \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta = b$). Это свойство называется свойством *рефлексивности*. Легко проверяется также, что если $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, и $\rho(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, суть непрерывные отображения соответственно отрезков $[a, b]$ и $[\alpha, \beta]$ в пространство и если $r(t) \sim \rho(\tau)$, то и $\rho(\tau) \sim r(t)$ — свойство *симметричности*. Так же легко убедиться, что если $r_1(t_1)$, $a_1 \leqslant t_1 \leqslant b_1$, $r_2(t_2)$, $a_2 \leqslant t_2 \leqslant b_2$, и $r_3(t_3)$, $a_3 \leqslant t_3 \leqslant b_3$, являются непрерывными отображениями соответственно отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ и $[a_3, b_3]$ в пространство, то из $r_1(t_1) \sim r_2(t_2)$ и $r_2(t_2) \sim r_3(t_3)$ следует, что $r_1(t_1) \sim r_3(t_3)$ — свойство *транзитивности*.

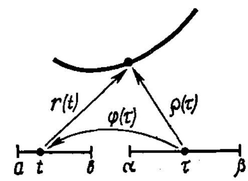

Рис. 63

Если в некотором множестве элементов введено понятие эквивалентности, обладающее тремя указанными свойствами (рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью), то такое множество распадается на непересекающиеся классы эквивалентных элементов (см. § 61). В нашем случае получаются непересекающиеся классы эквивалентных между собой непрерывных отображений отрезков.

Наконец, заметим, что, если $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, и $\rho(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$ — эквивалентные непрерывные отображения отрезков в пространство, то образы отрезков $[a, b]$ и $[\alpha, \beta]$ в пространстве соответственно при отображениях $r(t)$ и $\rho(\tau)$ совпадают. Это сразу следует из условия (16.3).

Перейдем теперь к понятию кривой.

Определение 3. *Всякое множество* Γ *непрерывных эквивалентных отображений* $r(t)$ *отрезков* $[a, b]$ *в пространство* (*см. определение* 2) *называется параметрически заданной кривой*:

$$\Gamma = \{r(t);\quad a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Каждое из указанных отображений называется представлением этой кривой.

Вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ ($\boldsymbol{r}(t)$ — радиус-вектор с концом в точке $r(t)$) называется по аналогии с п. 16.1 *векторным представлением* *параметрически заданной кривой* Г:

$$\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\quad a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Если $r(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$, то функции $x(t),\ y(t),\ z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ называются *координатным представлением параметрически заданной кривой* Г:

$$\Gamma = \{x(t),\ y(t),\ z(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Очевидно, что параметрически заданная кривая однозначно определяется каждым из своих представлений. Это позволяет (что более удобно), например, в записи $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ правую часть равенства понимать не как совокупность всех представлений кривой Г, а как некоторое вполне определенное ее представление $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Мы так и будем поступать в дальнейшем, причем не только в указанном случае, но и в случаях как векторных, так и координатных представлений.

Пример. В силу нашего определения параметрически заданные кривые

$$x = \cos t,\quad y = \sin t,\qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

и

$$x = \cos t,\quad y = \sin t,\qquad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi,$$

являются, как это уже отмечалось в п. 16.1, различными кривыми, хотя как множества точек плоскости они совпадают: эти множества представляют собой одну и ту же окружность $x^2 + y^2 = 1$. В первом случае эта окружность «пробегается» один раз, во втором — дважды.

Представления же

$$x = \cos t,\quad y = \sin t,\qquad -\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2$$

и

$$x = \sqrt{\tau(2-\tau)},\quad y = \tau - 1,\qquad 0 \leqslant \tau \leqslant 2,$$

задают одну и ту же кривую. Действительно, функция $\tau = 1 + \sin t$ непрерывна, строго монотонно возрастает на отрезке $[-\pi/2,\ \pi/2]$ и переводит одно представление в другое. Множество точек кривой образует в этом случае полуокружность $x^2 + y^2 = 1$, $x \geqslant 0$.

При заданном представлении $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, некоторой непрерывной кривой и при фиксированном значении параметра t через $r(t)$, естественно, обозначается точка рассматриваемой непрерывной кривой, в которую при данном представлении отображается точка $t \in [a,\ b]$.

Определим, теперь, что называется точкой параметрически заданной кривой, т. е. кривой, определенной как класс эквивалентных непрерывных отображений отрезков.

Определение 4. *Пусть $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, и $\rho(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, — два представления параметрически заданной кривой Г, φ — отображение, осуществляющее их эквивалентность (см. определение* 3) *и* *пусть* $t=\varphi(\tau)$, $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$, $a\leqslant t\leqslant b$ *(причем значение* τ, *а потому и значение* t *фиксированы), и, следовательно,* $r(t)=\rho(\tau)$. *Обозначим эту точку пространства через* P, *т. е.* $P=r(t)=\rho(\tau)$. *Пары* (P, t) *и* (P, τ) *называются эквивалентными.*

Эквивалентность пар (P, t) и (P, τ) будем обозначать символом $(P, t)\sim P(\tau)$.

Легко проверить, что 1) $(P, t)\sim(P, t)$;
2) если $(P, t)\sim(P, \tau)$, то $(P, \tau)\sim(P, t)$;
3) если $(P, t_1)\sim(P, t_2)$ и $(P, t_2)\sim(P, t_3)$, то $(P, t_1)\sim(P, t_3)$.

Определение 5. *Для данной параметрически заданной кривой* Γ *совокупность* $\{(P, t)\}$ *всех эквивалентных пар* (P — *фиксировано) называется точкой этой кривой, а точка пространства* P — *ее носителем.*

Каждая точка $\{(P, t)\}$ параметрически заданной кривой $\Gamma=\{r(t);\ a\leqslant t\leqslant b\}$ однозначно определяется каждой парой (P, t), и поскольку в этой паре $P=r(t)$, то каждая точка кривой Γ однозначно определяется значением параметра $t\in[a, b]$ при каждом представлении. Поэтому для краткости точки параметрически заданных кривых будем обозначать не символом $\{(P, t)\}$, а просто $r(t)$. В силу сказанного это обозначение имеет однозначный смысл.

Определение 6. *Совокупность носителей всех точек параметрически заданной кривой* Γ *называется носителем этой кривой.*

Точка P носителя кривой Γ, являющаяся носителем по крайней мере двух различных точек кривой, называется *кратной точкой* (или *точкой самопересечения*) носителя кривой Γ.

Как мы уже видели на примерах в п. 16.1 (см. (16.1) и (16.2)), различные кривые могут иметь один и тот же носитель. Заметим еще, что если $r(t)\neq r(a)=r(b)$, $a<t<b$ при одном представлении кривой, то это условие выполняется и при любом другом ее представлении. Следовательно, понятие замкнутого контура (см. определение 1 в п. 16.1) не зависит от выбора представления кривой.

Перейдем, теперь, к определению кривых других классов. Понятие эквивалентности отображений отрезка в пространство можно вводить не только для непрерывных отображений, но и для других отображений. Это дает возможность определить специальные классы параметрически заданных кривых: n раз дифференцируемых и n раз непрерывно дифференцируемых параметрически заданных кривых, $n=1, 2, \ldots$.

Определим, например, понятие эквивалентности для непрерывно дифференцируемых отображений отрезков и непрерывно дифференцируемую параметрически заданную кривую.

Определение 7. *Два непрерывно дифференцируемых отображения отрезков в пространство называются непрерывно дифференцируемо эквивалентными, если существует функция* φ, *осуществляющая их эквивалентность в смысле определения 2, которая как сама, так и ей обратная непрерывно дифференцируемы.*

Определение 8. *Всякое множество* Γ *непрерывно дифференцируемых и непрерывно дифференцируемо эквивалентных отображений отрезков в пространство называется непрерывно дифференцируемой параметрически заданной кривой.*

Вообще параметрически заданная кривая данного класса определяется как совокупность отображений отрезков в пространство (называемых ее представлениями), эквивалентных в некотором смысле. Отображения одного отрезка на другой, осуществляющие эту эквивалентность, называются в этом случае *допустимыми преобразованиями параметра* и удовлетворяют условиям рефлексивности, симметричности и транзитности (см. п. 16.1).

Каждая параметрически заданная кривая некоторого класса однозначно определяется любым своим представлением и для нее по той же схеме, что и выше, определяется понятие точки, носителя точки и носителя кривой. В дальнейшем для простоты там, где это не сможет привести к недоразумениям, параметрически заданные кривые и их носители (непрерывные кривые в смысле п. 16.1) будут называться одним и тем же термином «кривые».

16.3. ОРИЕНТАЦИЯ КРИВОЙ. ДУГА КРИВОЙ. СУММА КРИВЫХ. НЕЯВНОЕ ЗАДАНИЕ КРИВЫХ

Порядок чисел (по величине) на отрезке $[a, b]$ с помощью данного фиксированного представления $r(t)$ кривой $\Gamma=\{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, естественно, порождает соответствующий порядок точек на кривой. Точка $r(t') \in \Gamma$ считается предшествующей точке $r(t'') \in \Gamma$, или, что то же, точка $r(t'')$ считается следующей за точкой $r(t')$, если $a \leqslant t' < t'' \leqslant b$. Если этот же порядок точек желательно сохранить и при других представлениях кривой, то необходимо сузить класс допустимых преобразований параметра, именно допускать лишь строго монотонно возрастающие преобразования параметра.

Определение 9. *Кривая* Γ, *определенная классом эквивалентных непрерывных отображений отрезков в пространство, для которых допустимыми преобразованиями параметров являются только строго монотонно возрастающие непрерывные функции, называется ориентированной кривой.*

Таким образом, функции φ, осуществляющие эквивалентность двух представлений данной ориентированной кривой, удовлетворяют условиям определения 2 и, кроме того, являются строго монотонно возрастающими.

Вместо выражения «задана ориентированная кривая» говорят иногда, что «на кривой задана ориентация» (т. е. порядок точек).

Определение 10. *Пусть* $\Gamma=\{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — *ориентированная кривая и пусть* $t=t(\tau)$ — *строго монотонно убывающая и непрерывная на отрезке* $[\alpha, \beta]$ *функция, причем* $t(\alpha)=b$, $t(\beta)=a$. *Кривая, определяемая представлением* $r=r(t(\tau))$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, *назы-*

вается кривой, ориентированной противоположно кривой Γ, *и обозначается* $-\Gamma$.

Подобным же образом определяются ориентированные и противоположно ориентированные кривые других классов (дифференцируемые, непрерывно дифференцируемые и т. п.).

Если $t=t(\tau)$ — указанное в определении 10 отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$, $\tau_0 \in [\alpha, \beta]$ и $t_0 = t(\tau_0)$, то точки $r(t_0)$ и $r(t(\tau_0))$ соответственно кривой Γ и противоположно ориентированной кривой $-\Gamma$ называются соответствующими друг другу. Одна точка кривой Γ предшествует другой точке этой кривой тогда и только тогда, когда точка кривой $-\Gamma$, соответствующая первой точке, следует за точкой, соответствующей второй. Этим оправдывается термин «противоположно ориентированная кривая».

Если $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ — представление кривой Γ, то $r(a+b-\tau)$, $a \leqslant \tau \leqslant b$, является представлением противоположно ориентированной кривой $-\Gamma$, ибо функция $t=a+b-\tau$, $a \leqslant \tau \leqslant b$, строго монотонно убывает и отображает отрезок $[a, b]$ на себя.

В заключение сформулируем еще несколько полезных для дальнейшего определений.

Пусть задана кривая $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$.

Определение 11. *Если* $[a', b'] \subset [a, b]$, *то кривая* $\Gamma' = \{r(t);\ a' \leqslant t \leqslant b'\}$ *называется частью кривой* Γ (*или ее дугой*) *и пишется* $\Gamma' \subset \Gamma$.

Определение 12. *Если* $t_0 \in (a, b)$, $\Gamma_1 = \{r(t),\ a \leqslant t \leqslant t_0\}$, $\Gamma_2 = \{r(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant b\}$, *то кривая* Γ *называется суммой кривых* Γ_1 *и* Γ_2 *и пишется* $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Аналогично определяется сумма конечного числа кривых.

Определение 13. *Сумма конечного числа непрерывно дифференцируемых кривых называется кусочно-непрерывно дифференцируемой кривой.*

Определение 14. *Пусть* $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — *плоская кривая, расположенная на плоскости* x, y. *Если существует такая функция* $F(x, y)$, *что координаты точек* (x, y) *кривой* Γ *удовлетворяют условию*

$$F(x, y) = 0, \tag{16.4}$$

то говорят, что уравнение (16.4) *является неявным представлением кривой* Γ.

Следует, однако, иметь в виду, что, вообще говоря, множество всех точек, удовлетворяющих уравнению вида (16.4), не является кривой в выше определенном смысле даже для достаточно «хороших» функций $F(x, y)$. Например, множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)=0$, представляет собой окружность $x^2+y^2=1$ и точку $(0; 0)$. Можно показать, что это множество не является непрерывным образом отрезка.

Можно и в пространственном случае задавать кривые неявным образом, но уже при помощи системы друх уравнений:

$$F_1(x, y, z)=0, \quad F_2(x, y, z)=0.$$

Более подробно этим вопросом мы займемся в п. 41.3.

Наконец, отметим, что кривая всегда ограничена, т. е. лежит в некотором шаре; это следует из того, что функции координатного представления кривой, согласно теореме Больцано — Вейерштрасса, ограничены в силу их непрерывности. Вместе с тем уже в элементарной математике встречаются неограниченные кривые, к таковым относятся, например, прямая, парабола, гипербола, синусоида, график $\operatorname{tg} x$ и т. п. Чтобы охватить и такие «кривые», можно определить класс так называемых *открытых кривых* по схеме, подобной вышеприведенной, в которой за основу взято непрерывное отображение интервала, а не на отрезке, как это было сделано выше. Открытые кривые, в частности, могут быть и неограниченными. Подробное и точное формулирование всех этих понятий предоставляется проделывать читателю по мере потребности.

16.4. КАСАТЕЛЬНАЯ К КРИВОЙ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

Пусть задана кривая $\Gamma=\{\boldsymbol{r}(t),\ a\leqslant t\leqslant b\}$, вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ дифференцируема в точке $t_0\in[a, b]$ и $\boldsymbol{r}'(t_0)\neq 0$. Поскольку в силу определения дифференцируемости

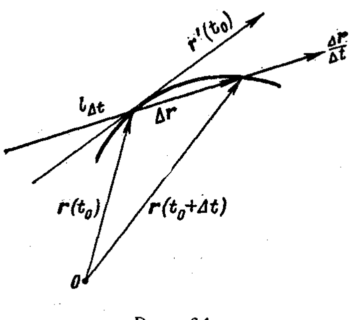

Рис. 64

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)=$$
$$=\boldsymbol{r}'(t_0)\Delta t+\boldsymbol{o}(\Delta t),\quad \Delta t\to 0,$$

то для всех достаточно малых $\Delta t\neq 0$ имеет место неравенство

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)\neq\boldsymbol{r}(t_0).$$

Действительно при сделанных предположениях $\boldsymbol{r}'(t_0)\Delta t\neq\boldsymbol{0}$, а потому для всех достаточно малых $\Delta t\neq 0$ будем иметь и

$$\boldsymbol{r}'(t_0)\Delta t+\boldsymbol{o}(\Delta t)\neq\boldsymbol{0}.$$

Прямая, проведенная через точки $r(t_0)$ и $r(t_0+\Delta t)$ называется *секущей* для кривой Г. Обозначим ее через $l_{\Delta t}$ (рис. 64). Для всех достаточно малых $\Delta t\neq 0$ в силу условия $r(t_0)\neq r(t_0+\Delta t)$ секущая $l_{\Delta t}$ определена однозначно. Поскольку вектор $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)$ параллелен этой секущей, то и вектор $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$, $\Delta t\neq 0$, отличающийся от вектора $\Delta\boldsymbol{r}$ лишь скалярным множителем $1/\Delta t$, также ей параллелен.

По условию в точке t_0 существует производная, т. е. предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \boldsymbol{r}'(t_0). \tag{16.5}$$

Так как все секущие проходят через одну и ту же точку $r(t_0)$, то геометрически формула (16.5) означает, что секущие $l_{\Delta t}$ при Δt, стремящемуся к нулю стремятся к некоторому предельному положению, т. е. к прямой, проходящей через ту же точку $r(t_0)$ в направлении вектора $\boldsymbol{r}'(t_0)$. Эта прямая в силу условия $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq 0$ определена однозначно. Она и называется *касательной к кривой* Γ в точке $r(t_0)$.

Таким образом, в силу самого определения касательной к кривой Γ в точке $r(t_0)$, производная $\boldsymbol{r}'(t_0)$ вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ в случае, если $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq 0$ является вектором, параллельным касательной в точке $r(t_0)$. Если начало вектора $\boldsymbol{r}'(t_0)$ поместить в эту точку, как это обычно и делается, то он будет направлен по касательной.

В рассматриваемом случае дифференциал $d\boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}'(t_0)\,dt$ также направлен по касательной к кривой, ибо он отличается от производной лишь скалярным множителем dt. Вектор $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{r}'/|\boldsymbol{r}'|$, $\boldsymbol{r}' \neq 0$ является единичным вектором, направленным по касательной. Вектор $\Delta \boldsymbol{r}$ при $\Delta t > 0$ направлен от точки кривой с меньшим значением параметра к точке с большим значением параметра, поэтому можно сказать, что вектор $\Delta \boldsymbol{r}$ при $\Delta t > 0$ показывает направление, в котором параметр на кривой возрастает, т. е., как говорят, положительное направление на кривой. Вектор $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t > 0$ имеет то же направление, что и вектор $\Delta \boldsymbol{r}$. Поскольку $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \boldsymbol{r}'(t)$, то естественно говорить, что вектор $\boldsymbol{r}'(t)$, а значит, и вектор $\boldsymbol{t}$, который отличается, быть может, от вектора $\boldsymbol{r}'(t)$ положительным числовым множителем $1/|\boldsymbol{r}'(t)|$, также направлены в сторону возрастания параметра и что их ориентация (направление) соответствует ориентации кривой. Направление вектора $\boldsymbol{t}$ (или, что то же, вектора $\boldsymbol{r}'$) называется *положительным направлением касательной*.

Уравнение касательной к кривой Γ в точке $r(t_0)$, для которой $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq 0$, в векторной записи имеет вид

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_0) + \boldsymbol{r}'(t_0)\tau, \quad -\infty < \tau < +\infty,$$

где $\boldsymbol{r}$ — текущий радиус-вектор касательной. В координатной записи уравнение касательной в этом случае имеет вид

$$\begin{gathered} x = x(t_0) + x'(t_0)\tau, \\ y = y(t_0) + y'(t_0)\tau, \\ z = z(t_0) + z'(t_0)\tau, \\ -\infty < \tau < +\infty. \end{gathered}$$

Исключив переменную τ, получим

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}.$$

Определение 15. *Пусть* Γ — *дифференцируемая кривая и* $\boldsymbol{r}(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$ — *ее векторное представление. Точка кривой* Γ, *в которой* $\boldsymbol{r}'\neq\boldsymbol{0}$, *называется неособой, а точка, в которой* $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{0}$ — *особой.*

Если $\boldsymbol{r}=(x(t)),\ y(t),\ z(t))$, то из равенства $|\boldsymbol{r}'|=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$ (см. п. 15.2) имеем: *точка* $(x(t),\ y(t),\ z(t))$ *кривой* Γ *неособая тогда и только тогда, когда в ней* $x'^2+y'^2+z'^2>0$, *т. е. хоть одна из производных* x', y' *и* z' не обращается в нуль.

Согласно доказанному выше, *во всякой неособой точке кривой* Γ *существует касательная.*

В определении 15 формально правильнее было бы говорить об особой и неособой точке кривой при данном ее представлении. Это не было сделано, поскольку понятие особой точки не зависит от выбора представления кривой. Поясним и докажем это.

Допустимыми преобразованиями параметра для дифференцируемых кривых являются функции $t=t(\tau)$, которые, как сами, так и обратные к ним, являются строго монотонными дифференцируемыми функциями. Поэтому в силу теоремы 3 п. 9.6 о производной обратной функции имеем $t'_\tau\tau'_t=1$. Отсюда следует, что для каждого допустимого преобразования $t=t(\tau)$, $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$, параметра дифференцируемой кривой всегда $t'(\tau)\neq 0$, $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$. Поскольку

$$x_\tau'^2+y_\tau'^2+z_\tau'^2=\left(x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2\right)t_\tau'^2,$$

то неособая точка при одном представлении дифференцируемой кривой будет одновременно неособой и при любом другом ее представлении.

Определение 16. *Непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек называется гладкой.*

Кривая, представимая как сумма конечного числа гладких кривых, называется кусочно-гладкой.

Отметим, что если плоская кривая имеет явное представление $y=y(x)$ или $x=x(y)$, то для нее вектор $(x'(t),\ y'(t))$ — всегда не нулевой: в первом случае это $(1,\ y')$, а во втором — $(x',\ 1)$.

Аналогичным образом определяется касательная как предельное положение секущей и кривой $\Gamma=\{\boldsymbol{r}(t),\ a\leqslant t\leqslant b\}$ в точке $\boldsymbol{r}(t_0)$, $t_0\in[a,\ b]$, и в случае, когда $\boldsymbol{r}'(t_0)=\boldsymbol{0}$, но существует некоторое натуральное $n>1$, для которого $\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)\neq\boldsymbol{0}$.

Если все $\boldsymbol{r}^{(k)}(t_0)=\boldsymbol{0}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, а $\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)\neq\boldsymbol{0}$, то раскладывая $\Delta\boldsymbol{r}$ по формуле Тейлора, получаем

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)=\frac{1}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)\,\Delta t^n+\boldsymbol{o}(\Delta t^n),\quad \Delta t\to 0.$$

Вектор $\frac{\Delta r}{\Delta t^n}$ направлен параллельно секущей $l_{\Delta t}$, проходящей через точки $r(t_0)$ и $r(t_0+\Delta t)$. Из написанного равенства следует, очевидно, что существует предел

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t^n}=\frac{1}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)\neq\mathbf{0}.$$

Поэтому в этом случае предельное положение секущей $l_{\Delta t}$, т. е. касательная в точке $r(t_0)$, является прямой, проходящей через точку $r(t_0)$ параллельно вектору $\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)$.

16.5. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

Прежде чем определять понятие длины дуги кривой, введем понятие разбиения отрезка — понятие, которое будет неоднократно встречаться и в дальнейшем.

Определение 17. *Для всякого отрезка* $[a, b]$ *систему его точек* t_i, $i=0, 1, 2, \ldots, n$, *таких, что*

$$a=t_0<t_1<\ldots<t_{i-1}<t_i<\ldots<t_n=b,$$

будем называть его разбиением и обозначать $\tau=\{t_i\}_{i=0}^{i=n}$.

Пусть задана кривая $\Gamma=\{\boldsymbol{r}(t),\ a\leqslant t\leqslant b\}$ и пусть $\tau=\{t_i\}_{i=0}^{i=n}$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Положим

$$\sigma_\tau\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{r}(t_i)-\boldsymbol{r}(t_{i-1})|.$$

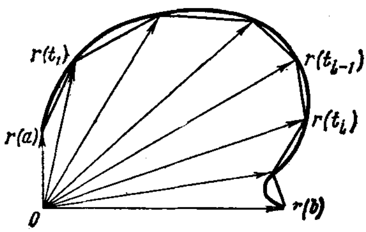

Рис. 65

Очевидно (рис. 65), σ_τ — длина ломаной с вершинами $r(a)$, $r(t_1)$, ..., $r(t_{n-1})$, $r(b)$, т. е. как обычно говорят, *ломаной, вписанной в кривую* Γ.

Всякую ломаную, в частности и вписанную в кривую $\Gamma=\{r(t);\ a\leqslant t\leqslant b\}$, можно рассматривать как кривую в смысле данного выше определения, если только задать ее представление. Пусть λ — ломаная, т. е. множество, состоящее из конечного числа отрезков с вершинами в точках M_0, M_1, ..., M_n (эти отрезки называются звеньями ломаной). Возьмем некоторый отрезок $[a, b]$ и какое-либо его разбиение на n отрезков: $\tau=\{t_i\}_{i=0}^{i=n}$. Будем для простоты всегда считать, что представлением ломаной является непрерывное отображение $\rho(t)$, линейно отображающее каждый отрезок $[t_{i-1}, t_i]$ на отрезок $M_{i-1}M_i$, $i=1, 2, \ldots, n$; таким образом, если обозначить через $\boldsymbol{\rho}_i$ радиус-вектор точки M_i, $i=0, 1, \ldots, n$, то векторное представление ломаной будет иметь вид

$$\boldsymbol{\rho}(t)=\frac{\boldsymbol{\rho}_i-\boldsymbol{\rho}_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}(t-t_{i-1})+\boldsymbol{\rho}_{i-1},\quad t_{i-1}\leqslant t\leqslant t_i,\quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Если $M_{i-1} \neq M_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$, то ломаная называется *невырожденной*.

Определение 18. *Величина* $S_\Gamma = \sup\limits_\tau \sigma_\tau$, *где верхняя грань взята по всевозможным разбиениям* τ *отрезка* $[a, b]$, *называется длиной кривой* Γ. *Если* $S_\Gamma < +\infty$, *то кривая* Γ *называется спрямляемой.*

В силу этого определения спрямляемость кривой и ее длина не зависят от выбора представления кривой и всегда

$$0 \leqslant S_\Gamma \leqslant +\infty.$$

Упражнение 1. Доказать, что кривая, являющаяся частью спрямляемой кривой, также спрямляема.

Лемма 2. *Пусть* $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b$, *тогда*

$$S_\Gamma = S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}. \tag{16.6}$$

Доказательство. Пусть $a < c < b$ и

$$\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\},\quad \Gamma_a = \{\boldsymbol{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant c\},\quad \Gamma_b = \{\boldsymbol{r}(t),\ c \leqslant t \leqslant b\}.$$

Пусть τ — разбиение отрезка $[a, b]$, а τ^* — разбиение этого же отрезка, совпадающее с τ, если точка c входит в разбиение τ, и получающееся из τ добавлением к нему точки c, если эта точка не входит в разбиение τ. Разбиение τ^* является объединением двух разбиений отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, которые мы обозначим соответственно τ_a и τ_b, т. е. $\tau^* = \tau_a \cup \tau_b$. Очевидно, для длин ломаных, соответствующих разбиениям τ^*, τ_a и τ_b справедливо равенство $\sigma_{\tau^*} = \sigma_{\tau_a} + \sigma_{\tau_b}$. Но $\sup\limits_{\tau_a} \sigma_{\tau_a} = S_{\Gamma_a}$, $\sup\limits_{\tau_b} \sigma_{\tau_b} = S_{\Gamma_b}$, следовательно,

$$\sigma_{\tau^*} \leqslant S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}.$$

При переходе от разбиения τ к разбиению τ^*, быть может, лишь одно звено $r(t_{i-1})r(t_i)$ заменяется двумя $r(t_{i-1})r(c)$ и $r(c)r(t_i)$, и поскольку $|r(t_{i-1})r(t_i)| \leqslant |r(t_{i-1})r(c)| + |r(c)r(t_i)|$, то $\sigma_\tau \leqslant \sigma_{\tau^*}$ и, следовательно,

$$\sigma_\tau \leqslant S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}.$$

Но $S_\Gamma = \sup\limits_\tau \sigma_\tau$, поэтому

$$S_\Gamma \leqslant S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}. \tag{16.7}$$

Докажем теперь обратное неравенство. Для произвольных τ_a и τ_b разбиений соответственно отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ и разбиения $\tau^* = \tau_a \cup \tau_b$ отрезка $[a, b]$ имеем $\sigma_{\tau_a} + \sigma_{\tau_b} = \sigma_{\tau^*} \leqslant S_\Gamma$. Отсюда $\sigma_{\tau_a} \leqslant S_\Gamma - \sigma_{\tau_b}$; фиксируя разбиение τ_b и переходя к верхней грани σ_{τ_a} при всевозможных τ_a, получаем неравенство $S_{\Gamma_a} \leqslant S_\Gamma - \sigma_{\tau_b}$, и затем —

$$S_{\Gamma_a} + \sigma_{\tau_b} \leqslant S_\Gamma.$$

Беря верхнюю грань множества чисел, которое получается при всевозможных разбиениях τ_b, будем иметь:

$$S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b} \leqslant S_\Gamma. \ \square$$

Отметим, что в лемме 2 не предполагается, что рассматриваемые кривые спрямляемы.

Задача 12. Построить пример неспрямляемой кривой.

Теорема 1. *Если кривая $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ непрерывно дифференцируема, то она спрямляема, и ее длина S_Γ удовлетворяет неравенству*

$$|r(b) - r(a)| \leqslant S_\Gamma \leqslant M(b-a), \tag{16.9}$$

где

$$M = \max_{[a,\ b]} |\boldsymbol{r}'(t)|. \tag{16.10}$$

Отметим, что в силу непрерывности производной $\boldsymbol{r}'(t)$, ее абсолютная величина $|\boldsymbol{r}'(t)|$ также непрерывна и потому достигает на отрезке $[a, b]$ своего наибольшего значения M.

Доказательство. Возьмем какое-либо разбиение $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$ отрезка $[a, b]$. Тогда применив неравенство (15.11), получим

$$|\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)| = \left| \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{r}'(\xi_i)|(t_i - t_{i-1}), \tag{16.11}$$

где $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Поскольку

$$\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})| = \sigma_\tau$$

— длина вписанной в кривую Γ ломаной, соответствующей разбиению τ, и для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ в силу (16.10) имеет место неравенство $|\boldsymbol{r}'(\xi_i)| \leqslant M$, то из неравенства (16.11) для любого разбиения τ, будем иметь

$$|\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)| \leqslant \sigma_\tau \leqslant M \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = M(b-a). \tag{16.12}$$

Перейдя в этом неравенстве к верхней грани по τ, получим утверждение теоремы. $\square$

Теорема 2. *Пусть кривая $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t));\ a \leqslant t \leqslant b\}$ непрерывно дифференцируема. Тогда переменная длина дуги s, отсчитываемая от начала $r(a)$ кривой Γ или соответственно от ее конца $r(b)$, является возрастающей, соответственно убывающей,* *непрерывно дифференцируемой функцией параметра t; при этом*

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=\left|\frac{dr}{dt}\right|, \tag{16.13}$$

соответственно

$$\frac{ds}{dt}=-\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=-\left|\frac{dr}{dt}\right|. \tag{16.14}$$

Доказательство. Пусть $s=s(t)$ длина дуги кривой Γ от точки $r(a)$ до точки $r(t)$. Пусть $t_0\in[a, b]$, $t_0+\Delta t\in[a, b]$ и $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t)$. Очевидно, что функция $s=s(t)$ возрастает на отрезке $[a, b]$, т. е. если $\Delta t>0$, то $\Delta s\geqslant 0$; если же $\Delta t<0$, то $\Delta s\leqslant 0$. Поэтому всегда $\frac{\Delta s}{\Delta t}\geqslant 0$.

Применив неравенство (16.9) к части кривой Γ, соответствующей отрезку $[t_0, t_0+\Delta t]$ при $\Delta t>0$ (соответственно отрезку $[t_0+\Delta t, t_0]$ при $\Delta t<0$), получим:

$$|\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)|\leqslant|\Delta s|\leqslant M|\Delta t|;$$

откуда

$$\left|\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}\right|\leqslant\frac{\Delta s}{\Delta t}\leqslant M, \tag{16.15}$$

где M — наибольшее значение $|\boldsymbol{r}'(t)|$ на отрезке $[t_0, t_0+\Delta t]$ при $\Delta t>0$ или на отрезке $[t_0+\Delta t, t_0]$ при $\Delta t<0$.

В силу непрерывности производной $\boldsymbol{r}'(t)$ ее абсолютная величина $|\boldsymbol{r}'(t)|$ также непрерывна и потому ее наибольшее значение существует, т. е. принимается в некоторой точке $\xi=t_0+\theta\Delta t$, $0<\theta<1$, указанного отрезка. Поэтому неравенство (16.15) можно переписать в виде

$$\left|\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}\right|\leqslant\frac{\Delta s}{\Delta t}\leqslant|\boldsymbol{r}'(t_0+\theta\,\Delta t)|,\qquad 0<\theta<1.$$

Перейдя здесь к пределу при $\Delta t\to 0$, в левой части неравенства в силу определения производной, а в правой в силу непрерывности производной $\boldsymbol{r}'(t)$ в точке $t=t_0$, получим $|\boldsymbol{r}'(t_0)|$. Следовательно, предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$ существует и также равен $|\boldsymbol{r}'(t_0)|$, т. е. существует производная $s'(t_0)$ и $s'(t_0)=|\boldsymbol{r}'(t_0)|$.

Если $\boldsymbol{r}(t)=(x(t), y(t), z(t))$, то $\boldsymbol{r}'(t)=(x'(t), y'(t), z'(t))$ и потому

$$s'(t)=|\boldsymbol{r}'(t)|=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}.$$

Если теперь $\sigma=\sigma(t)$ — переменная длина дуги, отсчитываемая от конца $r(b)$ кривой Γ, то, очевидно, $\sigma=S_\Gamma-s$, откуда, дифференцируя это равенство по t, будем иметь

$$\frac{d\sigma}{dt}=-\frac{ds}{dt}=-\left|\frac{dr}{dt}\right|.\ \square$$

Следствие 1. *Если параметром непрерывно дифференцируемой кривой является переменная длина дуги s, то*

$$\left|\frac{dr}{ds}\right| = 1. \tag{16.16}$$

Это сразу следует из формулы $\left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{ds}{dt}$ при $t = s$.

Замечание. Формула (16.16) имеет простой геометрический смысл. Поясним его. Пусть параметром непрерывно дифференцируемой кривой Г является переменная длина дуги s: $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S_\Gamma\}$. Величина $|\Delta \boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}(s+\Delta s) - \boldsymbol{r}(s)|$ равна длине отрезка, соединяющего точки $r(s)$ и $r(s+\Delta s)$. Этот отрезок называется обычно хордой, стягивающей дугу кривой Г с началом в точке $r(s)$ и концом в точке $r(s+\Delta s)$. Длина указанной дуги, очевидно, равна $|\Delta s|$ (рис. 66). Поскольку $\left|\frac{dr}{ds}\right| = \lim\limits_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta r}{\Delta s}\right|$, то из равенства (16.16) следует, что

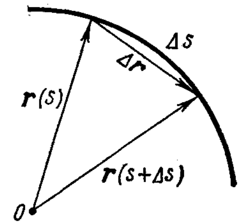

Рис. 66

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta r|}{|\Delta s|} = 1.$$

Это означает, что предел отношения длины дуги к длине стягивающей ее хорды равен единице, когда дуга стягивается в точку. В этом и состоит геометрический смысл формулы (16.16).

Следствие 2. *Для всякой непрерывно дифференцируемой кривой Г без особых точек, т. е. для всякой гладкой кривой, существует ее представление $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, в котором за параметр s взята переменная длина дуги кривой Г.*

Доказательство. Пусть непрерывно дифференцируемая кривая $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ не имеет особых точек, т. е. $\boldsymbol{r}'(t) \neq \boldsymbol{0}$ для всех $t \in [a, b]$. В этом случае переменная длина дуги $s = s(t)$ является строго монотонно возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией, ибо $\frac{ds}{dt} = |\boldsymbol{r}'| > 0$ во всех точках $[a, b]$. Поэтому существует обратная функция $t = t(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S_\Gamma$, которая также строго монотонно возрастает и имеет непрерывную не обращающуюся в ноль производную на отрезке $[0, S_\Gamma]$, т. е. функция $t = t(s)$ является допустимым преобразованием параметра для непрерывно дифференцируемых кривых без особых точек и представление $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t(s))$ является искомым представлением, в котором роль параметра играет переменная длина дуги. □

Выясним теперь геометрический смысл координат вектора $\frac{dr}{ds}$. Обозначим через α, β и γ углы, образованные вектором $\frac{dr}{ds}$ или, что то же, касательной к кривой $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(s)\}$ соответственно с осями Ox, Oy и Oz. Тогда из равенства $\left|\frac{dr}{ds}\right| = 1$, очевидно, следует, что проекции вектора $\frac{dr}{ds}$ на оси координат равны соответственно направляющим косинусам вектора $\frac{dr}{ds}$: $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$, т. е.

$$\frac{dr}{ds} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma). \tag{16.17}$$

Наряду с этим для вектор-функции $\boldsymbol{r}(s) = (x(s),\ y(s),\ z(s))$, как для всякой вектор-функции (см. п. 15.2), имеем

$$\frac{dr}{ds} = \left(\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}\right). \tag{16.18}$$

Сравнивая (16.17) и (16.18), получаем

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma. \tag{16.19}$$

В качестве примера рассмотрим кривую, называемую *винтовой линией*. Эта кривая задается представлением

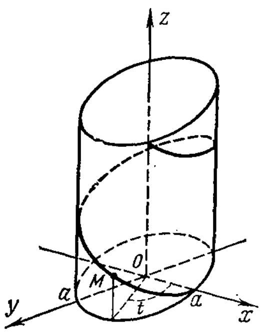

Рис. 67

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt,$$
$$a^2 + b^2 \neq 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Очевидно, что винтовая линия является бесконечно дифференцируемой кривой, и так как

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2 \neq 0,$$

то она не имеет особых точек (рис. 67). Следовательно, переменную длину ее дуги можно принять за параметр.

Найдем соответствующее представление. Согласно формуле (16.13), имеем

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Отсюда $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и, так как $t(0) = 0$, то $t = s/\sqrt{a^2+b^2}$. Поэтому искомое представление имеет вид

$$x(s) = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y(s) = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},$$
$$z(s) = \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant T\sqrt{a^2+b^2}.$$

Упражнение 2. Доказать, что для спрямляемой кривой без точек самопересечения переменная длина дуги является непрерывной *строго монотонной функцией параметра*.

16.6. ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ

Пусть $\Gamma=\{\boldsymbol{r}(t);\quad a\leqslant t\leqslant b\}$ — непрерывно дифференцируемая плоская кривая, лежащая в плоскости xOy,

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t))$$

и пусть $s=s(t)$ — переменная длина дуги кривой Γ; для ее производной из формул (16.13) и (16.14) получаем:

$$\frac{ds}{dt}=\pm\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \tag{16.20}$$

здесь знак «+» берется, если длина дуги $s(t)$ отсчитывается от начальной точки $r(a)$ кривой, и знак «—», если от конечной точки $r(b)$. Из формулы (16.20) для дифференциала дуги получаем выражение

$$ds^2=dx^2+dy^2. \tag{16.21}$$

Пусть точка $(x(t_0),\ y(t_0))$ — неособая, т. е. $x'^2(t_0)+y'^2(t_0)>0$, например $x'(t_0)\neq 0$. Пусть для определенности $x'(t_0)>0$, тогда в некоторой окрестности точки t_0 также $x'(t)>0$ и, значит, функция $x(t)$ строго монотонно возрастает в этой окрестности; поэтому существует обратная непрерывно дифференцируемая функция $t=t(x)$. Подставляя ее в представление кривой Γ, находим

$$y=y(t(x))=f(x),$$

т. е. в некоторой окрестности неособой точки непрерывно дифференцируемая кривая, является графиком непрерывно дифференцируемой функции f; точнее, существуют окрестность точки t_0 и непрерывно дифференцируемая функция f, определенная на некотором интервале, содержащем точку $x_0=x(t_0)$, такие, что часть кривой, соответствующая значениям параметра, принадлежащим указанной окрестности точки t_0, является графиком функции f.

В случае, если кривая Γ является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y=f(x)$, формула (16.20) превращается в формулу

$$\frac{ds}{dx}=\pm\sqrt{1+y'^2},\text{ и, следовательно, } ds=\pm\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Рассмотрим геометрический смысл формулы (16.21) в случае, когда Γ является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, и длина дуги кривой отсчитывается от начальной точки кривой (рис. 68). Пусть

$$x_0\in[a,\ b],\ x_0+dx\in[a,\ b],\ y_0=f(x_0),\ M_0=(x_0,\ y_0),$$
$$y_0+\Delta y=f(x_0+dx),\ M=(x_0+dx,\ y_0+\Delta y),$$

M_0N — касательная в точке M_0, $PM=\Delta y$ — приращение функции в точке x_0+dx, $PN=dy$ — приращение ординаты касательной в точке x_0+dx. Треугольник M_0NP прямоугольный; поскольку $M_0P=dx$, $PN=dy$, то

$$M_0N^2=M_0P^2+PN^2=dx^2+dy^2=ds^2,$$

т. е. длина отрезка касательной M_0N равна ds. Иначе говоря, приращение длины касательной $\sqrt{dx^2+dy^2}$ равно главной части ds приращения длины дуги Δs.

Если теперь на кривой Γ в качестве параметра взята переменная длина дуги s: $\Gamma=\{\boldsymbol{r}(s);\ 0\leqslant s\leqslant S_\Gamma\}$, то, согласно (16.19),

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\quad \frac{dy}{ds}=\cos\beta=\sin\alpha,\quad \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}, \tag{16.22}$$

где (рис. 69) α — угол, образованный касательной с осью Ox, а β — с осью Oy.

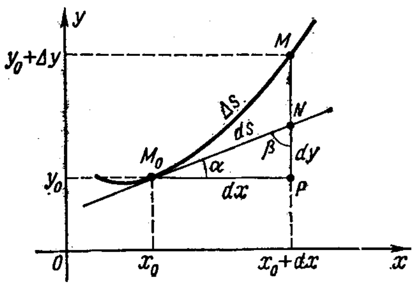

Рис. 68

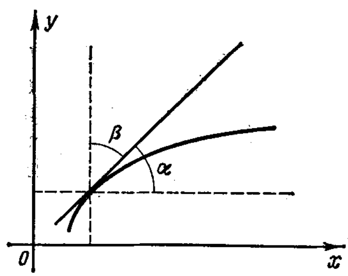

Рис. 69

Отметим, что эти формулы могут быть получены применением к «криволинейному треугольнику» M_0MP (см. рис. 68) формул, выражающих синус и косинус углов обычного прямоугольного треугольника через его катеты и гипотенузу, считая стороны указанного «треугольника» M_0MP равными соответственно dx, dy, ds. Подобное обстоятельство имеет место и для пространственных формул (16.19). Такой метод получения формул (16.19) и (16.22) является, конечно, необоснованным — он не имеет доказательной силы, однако он облегчает запоминание этих формул.

16.7. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

Пусть теперь годограф Γ непрерывно дифференцируемой вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ есть траектория движущейся материальной точки, а параметр t — время движения. Обозначим переменную длину дуги, отсчитываемую от некоторой начальной точки $\boldsymbol{r}(t_0)$, через $s=s(t)$. Пусть $t>t_0$; положив $\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)$ согласно (16.13), получим

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|=\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t},$$

т. е. длина вектора $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ совпадает с величиной скорости в рассматриваемой точке (см. п. 9.4); сам же вектор $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, как мы знаем (см. п. 16.2), направлен по касательной. Вектор $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ называется в этом случае *скоростью движения* в данной точке и обозначается $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}.$$

§ 17. КРИВИЗНА КРИВОЙ

17.1. ДВЕ ЛЕММЫ. РАДИАЛЬНАЯ И ТРАНСВЕРСАЛЬНАЯ СОСТАВЛЯЮЩИЕ СКОРОСТИ

Докажем две полезные для дальнейшего леммы о производных вектор-функции.

Лемма 1. *Пусть вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ имеет производную в точке t_0. Если длина вектора $\boldsymbol{r}(t)$ в некоторой окрестности точки t_0 постоянна, то вектор $\boldsymbol{r}'(t_0)$ ортогонален вектору $\boldsymbol{r}(t_0)$, т. е.*

$$\boldsymbol{r}'(t_0)\,\boldsymbol{r}(t_0)=0. \tag{17.1}$$

Доказательство. По условию, существует окрестность точки t_0, в которой длина вектора $\boldsymbol{r}(t)$ постоянна: $|\boldsymbol{r}(t)|=c$, где c — константа. Поэтому для всех точек указанной окрестности имеем $|\boldsymbol{r}(t)|^2=c^2$, а следовательно, и $\boldsymbol{r}^2(t)=c^2$. Вычислив производную функции $\boldsymbol{r}^2(t)$ в точке t_0, получим (см. п. 15.2) $2\boldsymbol{r}(t_0)\,\boldsymbol{r}'(t_0)=0$ откуда и следует (17.1). $\square$

Физическая интерпретация этой леммы состоит в том, что у материальной точки, движущейся так, что она все время остается на поверхности сферы, ее скорость направлена по касательной к этой сфере и, следовательно, перпендикулярна радиус-вектору.

Пусть функция $\boldsymbol{r}(t)$ определена в некоторой окрестности $U(t_0)$ точки t_0 и пусть в этой окрестности $\boldsymbol{r}(t)\neq 0$ (если вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ непрерывна в точке t_0, то условия неравенства нулю радиус-векторов $\boldsymbol{r}(t)$ в достаточно малой окрестности точки t_0 всегда можно добиться переносом начала координат). Пусть $t=t_0+\Delta t\in U(t_0)$ и пусть $\varphi=\varphi(t)$ — угол (выраженный в радианах) между векторами $\boldsymbol{r}(t_0)$ и $\boldsymbol{r}(t)$, $|\varphi|\leqslant\pi$, причем будем считать, что $\varphi(t)\geqslant 0$ для $\Delta t\geqslant 0$ и $\varphi\leqslant 0$ для $\Delta t<0$. В точке t_0 для приращения $\Delta\varphi$ функции φ имеем

$$\Delta\varphi=\varphi(t)-\varphi(t_0)=\varphi(t),$$

ибо $\varphi(t_0)=0$; поэтому всегда $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\geqslant 0$.