т. е. длина вектора $\frac{dr}{dt}$ совпадает с величиной скорости в рассматриваемой точке (см. п. 9.4); сам же вектор $\frac{dr}{dt}$, как мы знаем (см. п. 16.2), направлен по касательной. Вектор $\frac{dr}{dt}$ называется в этом случае *скоростью движения* в данной точке и обозначается $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}.$$

§ 17. КРИВИЗНА КРИВОЙ

17.1. ДВЕ ЛЕММЫ. РАДИАЛЬНАЯ И ТРАНСВЕРСАЛЬНАЯ СОСТАВЛЯЮЩИЕ СКОРОСТИ

Докажем две полезные для дальнейшего леммы о производных вектор-функции.

Лемма 1. *Пусть вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ имеет производную в точке t_0. Если длина вектора $\boldsymbol{r}(t)$ в некоторой окрестности точки t_0 постоянна, то вектор $\boldsymbol{r}'(t_0)$ ортогонален вектору $\boldsymbol{r}(t_0)$, т. е.*

$$\boldsymbol{r}'(t_0)\,\boldsymbol{r}(t_0)=0. \tag{17.1}$$

Доказательство. По условию, существует окрестность точки t_0, в которой длина вектора $\boldsymbol{r}(t)$ постоянна: $|\boldsymbol{r}(t)|=c$, где c — константа. Поэтому для всех точек указанной окрестности имеем $|\boldsymbol{r}(t)|^2=c^2$, а следовательно, и $\boldsymbol{r}^2(t)=c^2$. Вычислив производную функции $\boldsymbol{r}^2(t)$ в точке t_0, получим (см. п. 15.2) $2\boldsymbol{r}(t_0)\,\boldsymbol{r}'(t_0)=0$ откуда и следует (17.1). $\square$

Физическая интерпретация этой леммы состоит в том, что у материальной точки, движущейся так, что она все время остается на поверхности сферы, ее скорость направлена по касательной к этой сфере и, следовательно, перпендикулярна радиус-вектору.

Пусть функция $\boldsymbol{r}(t)$ определена в некоторой окрестности $U(t_0)$ точки t_0 и пусть в этой окрестности $\boldsymbol{r}(t)\neq 0$ (если вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ непрерывна в точке t_0, то условия неравенства нулю радиус-векторов $\boldsymbol{r}(t)$ в достаточно малой окрестности точки t_0 всегда можно добиться переносом начала координат). Пусть $t=t_0+\Delta t\in U(t_0)$ и пусть $\varphi=\varphi(t)$ — угол (выраженный в радианах) между векторами $\boldsymbol{r}(t_0)$ и $\boldsymbol{r}(t)$, $|\varphi|\leqslant\pi$, причем будем считать, что $\varphi(t)\geqslant 0$ для $\Delta t\geqslant 0$ и $\varphi\leqslant 0$ для $\Delta t<0$. В точке t_0 для приращения $\Delta\varphi$ функции φ имеем

$$\Delta\varphi=\varphi(t)-\varphi(t_0)=\varphi(t),$$

ибо $\varphi(t_0)=0$; поэтому всегда $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\geqslant 0$.

Определение 1. *Производная* $\frac{d\varphi(t_0)}{dt}$ *называется скоростью вращения вектор-функции* $\boldsymbol{r}(t)$ *в точке* t_0 *и обозначается* $\omega = \omega(t_0;\ \boldsymbol{r}(t))$:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{17.2}$$

Заметим, что, если выбрать противоположный отсчет углов, т. е. определить угол между векторами $\boldsymbol{r}(t_0)$ и $\boldsymbol{r}(t)$ как угол $\psi = -\varphi$, то, очевидно,

$$\frac{d\psi}{dt} \leqslant 0 \quad \text{и} \quad \omega(t_0;\ \boldsymbol{r}) = \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt} = \left|\frac{d\psi}{dt}\right|.$$

Таким образом, как при одном, так и при другом отсчете углов φ между векторами $\boldsymbol{r}(t_0)$ и $\boldsymbol{r}(t)$ всегда

$$\omega(t_0;\ \boldsymbol{r}) = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|.$$

Лемма 2. *Пусть вектор-функция* $\boldsymbol{r}(t)$ *определена в некоторой окрестности точки* t_0 *и* $\boldsymbol{r}(t_0) \neq 0$. *Тогда, если в точке* t_0 *существует производная* $\boldsymbol{r}'(t_0)$, *то в этой точке существует и скорость вращения* $\omega = \omega(t_0;\ \boldsymbol{r}(t))$, *причем*

$$\omega = \frac{1}{r^2(t_0)} |\boldsymbol{r}(t_0) \times \boldsymbol{r}'(t_0)|. \tag{17.3}$$

Следствие. *Если в дополнение к условиям леммы длина вектора* $\boldsymbol{r}(t)$ *постоянна:* $|\boldsymbol{r}(t)| = r$, r — *константа, то*

$$\omega = |\boldsymbol{r}'(t)|/r. \tag{17.4}$$

Доказательство. В силу существования производной $\boldsymbol{r}'(t_0)$ функция $\boldsymbol{r}(t)$ непрерывна в точке t_0. Отсюда и из условия $\boldsymbol{r}(t_0) \neq 0$ следует, что для всех достаточно малых Δt выполняется неравенство $\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) \neq 0$ и, следовательно, определен угол $\Delta\varphi$ между векторами $\boldsymbol{r}(t_0)$ и $\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t)$. Из непрерывности вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ в точке t_0 следует также*) и непрерывность в точке t_0 функции $\varphi(t)$, т. е.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta\varphi = 0$$

(как всегда $\Delta t = t - t_0$, $\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \varphi(t)$, ибо $\varphi(t_0) = 0$).

Для вычисления производной (17.2) заменим бесконечно малую $\Delta\varphi$ на эквивалентную ей при $\Delta t \to 0$ бесконечно малую $\sin\Delta\varphi$ (см. лемму в п. 8.2), которую можно найти из формулы

$$|\boldsymbol{r}(t_0) \times \boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t)| = |\boldsymbol{r}_0(t_0)|\,|\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t)|\,|\sin\Delta\varphi|.$$

*) Это вытекает, например, из равенства $\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{r}(t_0)\,\boldsymbol{r}(t)}{|\boldsymbol{r}(t_0)|\,|\boldsymbol{r}(t)|}$.

В силу теоремы 2 п. 8.3 о замене бесконечно малых им эквивалентными при вычислении пределов имеем

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta t}\right|=$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\boldsymbol r(t_0)\times\boldsymbol r(t_0+\Delta t)|}{|\boldsymbol r(t_0)|\,|\boldsymbol r(t_0+\Delta t)|\,|\Delta t|}=\frac{1}{r^2(t_0)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\boldsymbol r(t_0)\times\boldsymbol r(t_0+\Delta t)|}{|\Delta t|}. \tag{17.5}$$

Здесь снова была использована непрерывность вектор-функции $\boldsymbol r(t)$ в точке t_0: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\boldsymbol r(t_0+\Delta t)=\boldsymbol r(t_0)$.

Далее, поскольку функция $\boldsymbol r(t)$ дифференцируема в точке t_0, то

$$\boldsymbol r(t_0+\Delta t)=\boldsymbol r(t_0)+\boldsymbol r'(t_0)\,\Delta t+\boldsymbol\varepsilon(\Delta t)\,\Delta t,$$

где $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\boldsymbol\varepsilon(\Delta t)=\boldsymbol 0$. Подставив это выражение для $\boldsymbol r(t_0+\Delta t)$ в (17.5) и заметив, что $|\boldsymbol r(t_0)\times\boldsymbol r(t_0)|=0$ и $\lim\limits_{\Delta t\to 0}|\boldsymbol r(t_0)\times\boldsymbol\varepsilon(\Delta t)=0$ получим:

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{|\boldsymbol r(t_0)\times\boldsymbol r'(t_0)|}{r^2(t_0)}.\ \square$$

Доказательство следствия. Если $|\boldsymbol r(t)|=r$ — постоянная, то в силу леммы 1 $\boldsymbol r(t_0)\boldsymbol r'(t_0)=0$, т. е. $|\boldsymbol r(t_0)|\,|\boldsymbol r'(t_0)|\cos\widehat{\boldsymbol r\boldsymbol r'}=0$. Поскольку $|\boldsymbol r(t_0)|\neq 0$, то либо $|\boldsymbol r'(t_0)|=0$, либо угол $\widehat{\boldsymbol r\boldsymbol r'}$ между векторами $\boldsymbol r(t_0)$ и $\boldsymbol r'(t_0)$ равен $\pm\pi/2$ и, следовательно, $|\sin\widehat{\boldsymbol r\boldsymbol r'}|=1$. В обоих случаях

$$|\boldsymbol r(t_0)\times\boldsymbol r'(t_0)|=|\boldsymbol r(t_0)|\,|\boldsymbol r'(t_0)|\,|\sin\widehat{\boldsymbol r\boldsymbol r'}|=r\,|\boldsymbol r'(t_0)|.$$

Подставляя это выражение в формулу (17.3), получим (17.4). $\square$

Леммы 1 и 2 остаются справедливыми и в случае, если в них под окрестностями понимать односторонние окрестности.

Для выяснения физического смысла формул (17.3) и (17.4) будем снова интерпретировать кривую, описываемую концом радиус-вектора $\boldsymbol r(t)$, как траекторию движения материальной точки, а параметр t — как время. Пусть длина вектора $\boldsymbol r(t)$ остается постоянной: $|\boldsymbol r(t)|=r$, т. е. точка движется по сфере радиуса r. Рассмотрим движение точки в каждый момент времени как вращение около так называемой мгновенной оси вращения, т. е. оси, проходящей через начало координат перпендикулярно плоскости движения (так называется плоскость, проходящая через радиус-вектор $\boldsymbol r(t)$ параллельно скорости $\boldsymbol v=\frac{d\boldsymbol r(t)}{dt}$. Тогда вектор $\boldsymbol\omega=(\boldsymbol r\times\boldsymbol r')/r^2$ физически означает вектор угловой скорости, а формулы (17.3) и (17.4) выражают связь между угловой скоростью $\boldsymbol\omega$ и линейной скоростью $\boldsymbol v$. В частности, формула (17.4) в этих обозначениях принимает вид

$$|\boldsymbol\omega|=|\boldsymbol v|/r.$$

Замечание. Используя лемму 1, можно легко получить разложение производной вектор-функции на две ортогональные составляющие: в направлении вектора $\boldsymbol{r}(t)$ (*радиальная составляющая*) и в перпендикулярном направлении (*трансверсальная составляющая*).

Пусть вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ определена в некоторой окрестности точки t_0, $\boldsymbol{r}(t) \neq 0$ и существует производная $\boldsymbol{r}'(t_0)$. Положим $\boldsymbol{r}_0(t) = \frac{\boldsymbol{r}(t)}{|\boldsymbol{r}(t)|}$, очевидно, $|\boldsymbol{r}_0(t)| \equiv 1$. В точке t_0 существует производная

$$\frac{d|\boldsymbol{r}|}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\boldsymbol{r}^2} = \frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}|} = \boldsymbol{r}_0\boldsymbol{r}',$$

следовательно, в точке t_0 существует и производная $\frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt}$, которая, согласно лемме 1, ортогональна вектору $\boldsymbol{r}_0(t_0)$, а потому, и вектору $\boldsymbol{r}(t_0)$.

Дифференцируя равенство $\boldsymbol{r}(t) = |\boldsymbol{r}(t)|\,\boldsymbol{r}_0(t)$ в точке t_0, получим

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d|\boldsymbol{r}|}{dt}\boldsymbol{r}_0 + |\boldsymbol{r}|\frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt} = (\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{r}_0 + |\boldsymbol{r}|\frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt}. \tag{17.6}$$

Это и есть искомое разложение.

В случае, если годограф вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ является траекторией движущейся материальной точки, то формула (17.6) дает разложение ее скорости на составляющую поступательного движения (радиальная составляющая) и составляющую вращательного движения (трансверсальная составляющая).

17.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВИЗНЫ КРИВОЙ И ЕЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ

Пусть $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$ — непрерывно дифференцируемая и, следовательно, спрямляемая кривая, s — переменная длина дуги $0 \leqslant s_0 \leqslant S$, $\Delta s = s - s_0$, а $\alpha = \alpha(s)$ — угол между касательными к кривой Γ в точках $\boldsymbol{r}(s_0)$ и $\boldsymbol{r}(s_0 + \Delta s)$, причем будем считать, что $\alpha(s) \geqslant 0$ для $\Delta s \geqslant 0$ и $\alpha(s) \leqslant 0$ для $\Delta s < 0$. Очевидно, $\Delta\alpha = \alpha(s) - \alpha(s_0) = \alpha(s)$, ибо $\alpha(s_0) = 0$.

Пусть теперь $\boldsymbol{t}(s) = \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}$. Как было показано, $\boldsymbol{t}(s)$ является единичным вектором (см. (16.16)), параллельным касательной к кривой в соответствующей точке (см. п. 16.4), поэтому угол $\Delta\alpha$ является и углом между векторами $\boldsymbol{t}(s_0)$ и $\boldsymbol{t}(s_0 + \Delta s)$.

Определение 2. *Угловая скорость вращения касательного единичного вектора* $\boldsymbol{t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ *в данной точке кривой называется кривизной* $k(s_0)$ *кривой в этой точке,* $k(s_0) = \omega(s_0;\ \boldsymbol{t}) = \frac{d\alpha(s_0)}{ds}$.

Опуская для краткости значение аргумента, получаем

$$k = \frac{d\alpha}{ds}. \tag{17.7}$$

Поскольку $|t| = 1$, то в силу следствия леммы 2 из п. 17.1 отсюда имеем

$$k = \left|\frac{dt}{ds}\right| \tag{17.8}$$

$\left(\text{если, конечно, производная } \frac{dt}{ds} \text{ существует}\right)$.

Определение 3. *Величина, обратная кривизне, называется радиусом кривизны в данной точке и обозначается R, т. е. $R = 1/k$.*

Пусть Γ — окружность радиуса R. В этом случае угол $\Delta\alpha$ между касательными равен углу, образованному радиусами точек касания (рис. 70), а для длины дуги Δs между этими точками имеется формула $\Delta s = R\Delta\alpha$. Поэтому $\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \frac{1}{R}$. По определению же кривизны для окружности имеем

$$k = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \frac{1}{R}.$$

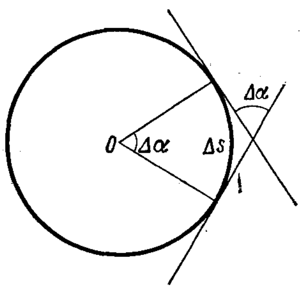

Рис. 70

Таким образом, в случае окружности ее кривизна k постоянна (не зависит от точки) и равна обратной величине радиуса; радиус же кривизны окружности равен ее радиусу. Отсюда и произошел термин «радиус кривизны».

Достаточные условия существования кривизны в данной точке и метод ее вычисления даются следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — дважды дифференцируемая кривая без особых точек. Тогда в каждой ее точке существует кривизна и*

$$k = |\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''| / |\boldsymbol{r}'|^3. \tag{17.9}$$

Штрихом здесь и в дальнейшем обозначаются производные по произвольному параметру t. Производные по длине дуги s будем обозначать символом $\frac{d}{ds}$.

Доказательство. При предположениях теоремы переменная длина дуги $s = s(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, $0 \leqslant s \leqslant S$, кривой Γ может быть принята на этой кривой за параметр (см. следствие 2 из теоремы 2 в п. 16.5). При этом единичный касательный вектор $\boldsymbol{t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ является непрерывно дифференцируемой вектор-функцией и поэтому для него при каждом значении $s_0 \in [0, S]$ определена скорость его вращения $\omega(s_0;\ t)$, т. е. в каждой точке кривой Γ определена кривизна

$$k(s_0) = \omega(s_0;\ t) = \frac{d\alpha}{ds}, \tag{17.10}$$

где $\alpha = \alpha(s)$ — угол между векторами $\frac{d\boldsymbol{r}(s_0)}{ds}$ и $\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}$, выбранный, как указано в начале этого пункта. В частности, это означает, что для всех $s \in [0,\ S]$ выполняется неравенство $\frac{d\alpha(s)}{ds} \geqslant 0$.

Из формулы

$$\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds} = \boldsymbol{r}'(t)\frac{dt}{ds} = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{s'}$$

следует, что векторы $\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}$ и $\boldsymbol{r}'(t)$ при $s = s(t)$ всегда коллинеарны, и поскольку функция $s'(t)$ не меняет знака, то указанные векторы либо всегда имеют одно направление (если $s'(t) > 0$), либо всегда противоположное (если $s'(t) < 0$).

При этом в первом случае достаточно малым приращениям Δt соответствуют приращения Δs того же знака, а во втором — противоположного. В силу сказанного, если $s_0 = s(t_0)$, $t_0 \in [a,\ b]$, и если $\beta = \beta(t)$ — угол между векторами $\boldsymbol{r}'(t_0)$ и $\boldsymbol{r}'(t)$, то либо для всех $t \in [a,\ b]$ будет $\beta = \alpha$, либо для всех $t \in [a,\ b]$ будет $\beta = -\alpha$; поэтому (см. п. 17.1)

$$\omega(t_0,\ \boldsymbol{r}') = \left|\frac{d\alpha}{dt}\right|. \tag{17.11}$$

Теперь, используя формулы (17.10), (17.11) и лемму 2, получим

$$k(s_0) = \frac{d\alpha}{ds} = \left|\frac{d\alpha}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \omega(t_0;\ \boldsymbol{r}')\frac{1}{|s'|} = \frac{|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3}$$

(мы воспользовались также формулой (16.13)). $\square$

От формулы (17.9) легко перейти к выражению для кривизны в координатной записи. В самом деле, замечая, что $\boldsymbol{r}' = (x',\ y',\ z')$, $\boldsymbol{r}'' = (x'',\ y'',\ z'')$ и что

$$\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

(где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — единичные векторы соответственно в направлении осей Ox, Oy, Oz), получаем

$$|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''| = \sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2}, \tag{17.12}$$

с другой стороны

$$|\boldsymbol{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \tag{17.13}$$

Подставив (17.12) и (17.13) в (17.9), мы и найдем искомое выражение.

17.3. ГЛАВНАЯ НОРМАЛЬ. СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ ПЛОСКОСТЬ

Рассмотрим дважды дифференцируемую кривую Γ без особых точек. У такой кривой существует дважды дифференцируемое представление $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, где s — переменная длина дуги, $0\leqslant s\leqslant S$.

Обозначим через $\boldsymbol{n}$ единичный вектор в направлении вектора $\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$, где $\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ — единичный касательный вектор к рассматриваемой кривой. Из формулы (17.8) следует, что $\boldsymbol{n}$ определен лишь для тех точек, в которых кривизна $k\neq 0$, и что в этих точках

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=k\boldsymbol{n}. \tag{17.14}$$

Вектор $\boldsymbol{t}$ — единичный, поэтому вектор $\boldsymbol{n}$ перпендикулярен (см. п. 17.1) вектору $\boldsymbol{t}$. Формула (17.14) называется *формулой Френе* *).

Вектор $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$, а значит, и вектор $\boldsymbol{n}=\frac{1}{k}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$ не зависят от выбора ориентации кривой. Действительно, если σ — переменная длина дуги кривой, отсчитываемая в противоположном, чем s, направлении, и, следовательно, если $\sigma=S-s$, то, замечая, что $\frac{d\sigma}{ds}=-1$, получим

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{d\sigma^2}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{d\sigma^2}.$$

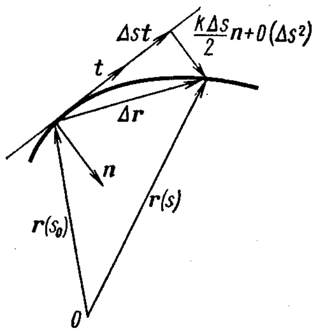

Рис. 71

Определение 4. *Всякая прямая, проходящая через точку кривой и перпендикулярная к касательной в этой точке, называется нормалью к кривой в данной точке. Нормаль к кривой, параллельная вектору* $\boldsymbol{n}$, *называется главной нормалью.*

Вектор главной нормали $\boldsymbol{n}$ с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем Δs^2, указывает направление, в котором кривая в окрестности данной точки отклоняется от своей касательной (рис. 71). Действительно, выбирая на кривой в качестве параметра переменную длину дуги s, согласно формуле Тейлора для вектор-функции (см. п. 15.2), будем иметь

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s_0)=\frac{d\boldsymbol{r}(s_0)}{ds}\Delta s+\frac{1}{2}\frac{d^2\boldsymbol{r}(s_0)}{ds^2}\Delta s^2+\boldsymbol{o}(\Delta s^2),$$

или, заметив, что (см. 17.14))

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{t},\ \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=k\boldsymbol{n}, \tag{17.15}$$

*) Ж. Френе (1801—1880) — французский математик.

получим

$$\Delta\boldsymbol{r}=\Delta s\boldsymbol{t}+\frac{1}{2}k\Delta s^2\boldsymbol{n}+o(\Delta s^2);$$

поскольку $\frac{1}{2}k\Delta s^2>0$, то эта формула и доказывает справедливость нашего утверждения.

Определение 5. *Плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль в данной точке кривой, называется соприкасающейся плоскостью.*

В силу этого определения соприкасающаяся плоскость определена для точек, в которых $k\neq 0$. Найдем уравнение этой плоскости для кривой, заданной представлением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ с произвольным параметром t. Как и выше, производные по переменному t будем обозначать штрихом, а производные по длине дуги s — символом $\frac{d}{ds}$. Дифференцируя $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ как сложную функцию $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, $s=s(t)$, получим (см. (17.15))

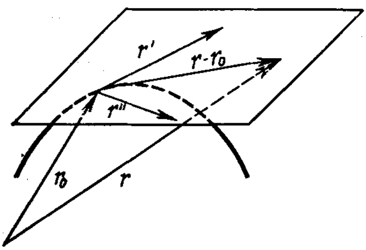

Рис. 72

$$\boldsymbol{r}'=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}s'=s'\boldsymbol{t},$$

$$\boldsymbol{r}''=s'^2\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}+s''\boldsymbol{t}=s'^2k\boldsymbol{n}+s''\boldsymbol{t}. \quad (17.16)$$

Отсюда следует, что векторы $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$ также параллельны соприкасающейся плоскости; в силу же условия $k\neq 0$ выполняется неравенство $\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''\neq 0$ (см. (17.9)), и, значит, $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$ не коллинеарны. Обозначим теперь через $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_0'$ и $\boldsymbol{r}_0''$ векторы $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$ в некоторой фиксированной точке данной кривой Γ, а через $\boldsymbol{r}$ обозначим текущий вектор соприкасающейся плоскости; тогда смешанное произведение векторов $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_0'$ и $\boldsymbol{r}_0''$ должно быть равно нулю, так как все они параллельны соприкасающейся плоскости (рис. 72):

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,\ \boldsymbol{r}_0',\ \boldsymbol{r}_0'')=0.$$

Это и есть уравнение указанной плоскости в векторном виде. В координатном виде оно запишется следующим образом

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix}=0,$$

где $\boldsymbol{r}_0'=(x_0',\ y_0',\ z_0')$, $\boldsymbol{r}''=(x_0'',\ y_0'',\ z_0'')$.

В случае если в данной точке $k=0$, то любая плоскость, проходящая через касательную в этой точке, называется *соприкасающейся*.

17.4. ЦЕНТР КРИВИЗНЫ И ЭВОЛЮТА КРИВОЙ

Определение 6. *Точка пространства, лежащая на главной нормали к кривой в данной точке и находящаяся от этой точки на расстоянии R в направлении вектора $\boldsymbol{n}$, называется центром кривизны кривой в указанной ее точке.*

Таким образом, если $\boldsymbol{\rho}$ является радиус-вектором центра кривизны, а $\boldsymbol{r}$, как обычно, радиус-вектор данной точки кривой, то

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+R\boldsymbol{n},$$

или, что то же (см. (17.15)),

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+\frac{1}{k^2}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}. \tag{17.17}$$

Найдем выражение $\boldsymbol{\rho}$ через производные вектор-функции по произвольному параметру t. По правилу дифференцирования сложной функции,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{r}'\frac{dt}{ds}=\frac{\boldsymbol{r}'}{s'},$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\boldsymbol{r}'}{s'}\right)=\left(\frac{\boldsymbol{r}'}{s'}\right)'\frac{1}{s'}=\frac{\boldsymbol{r}''s'-\boldsymbol{r}'s''}{s'^3}. \tag{17.18}$$

Эти формулы в силу формул (17.15), очевидно, являются обращением формул (17.16).

Подставив (17.18) в (17.17), получим

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+\frac{1}{k^2}\frac{s'\boldsymbol{r}''-s''\boldsymbol{r}''}{s'^3}, \tag{17.19}$$

где (считая для простоты, что при возрастании параметра t длина дуги $s(t)$ также возрастает) $s'=|\boldsymbol{r}'|=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$, откуда

$$s''=\frac{x'x''+y'y''+z'z''}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}.$$

Формулы (17.17) и (17.19) можно рассматривать как представления некоторой кривой, точками которой являются центры кривизны данной кривой. Эта кривая называется *эволютой* данной кривой.

17.5. ФОРМУЛЫ ДЛЯ КРИВИЗНЫ И ЭВОЛЮТЫ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Все сказанное в предыдущем пункте, в частности, справедливо и для плоских кривых. Заметим лишь, что если кривая $\Gamma=\{\boldsymbol{r}(t)\}$ лежит в некоторой плоскости, то все производные вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ также лежат в этой плоскости. В самом деле, в ней лежит приращение вектор-функции $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$, а поэтому и отношение $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$. Отсюда легко следует, что и предел этих отношений $\boldsymbol{r}' = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ лежит в указанной плоскости. Применяя то же рассуждение к $\boldsymbol{r}'$, мы докажем, что и $\boldsymbol{r}''$ находится в той же плоскости, и т. д.

Из сказанного следует, что если кривая лежит в некоторой плоскости, то касательный вектор $\boldsymbol{r}$, а если ее кривизна $k \neq 0$, то и вектор главной нормали $\boldsymbol{n}$ лежат в той же плоскости. Поэтому эта плоскость является соприкасающейся плоскостью для рассматриваемой кривой.

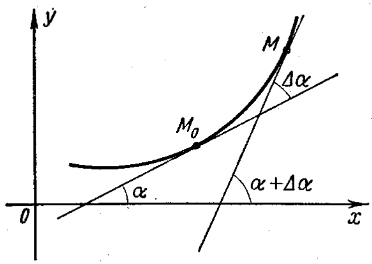

Рис. 73

Отметим также, что, если в случае кривой $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(s)\}$, лежащей в плоскости xOy в отличие от п. 17.2 через $\alpha(s)$ обозначить угол, образованный касательной в точке $r(s)$ с осью Ox (рис. 73), то $\Delta\alpha = \alpha(s_0 + \Delta s) - \alpha(s_0)$ будет являться углом между касательными в точках $r(s_0)$ и $r(s_0 + \Delta s)$. Если угол α возрастает вместе с s, т. е. если $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \geqslant 0$ при $\Delta s > 0$, то $k = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$; если же α убывает с возрастанием s, то

$$k = -\lim_{\Delta s \to \infty} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = -\frac{d\alpha}{ds}.$$

Выпишем некоторые из формул, полученных в предыдущем пункте, считая, что кривая $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ лежит в плоскости xOy: $\boldsymbol{r}(t) = (x(t),\ y(t))$. Из формул (17.9), (17.12) и (17.13) имеем

$$k = \frac{1}{R} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \tag{17.20}$$

Обозначая (ξ, η) центр кривизны кривой Γ, из формулы (17.17) получим формулы, выражающие координаты ξ и η через производные по s:

$$\xi = x + R^2 \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \eta = y + R^2 \frac{d^2y}{ds^2},$$

а из формул (17.19) и (17.20) следуют формулы, выражающие координаты центра кривизны через производные по произвольному параметру t:

$$\xi = x + \frac{(x'^2 + y'^2)^3}{(x'y'' - x''y')^2} \cdot \frac{x''\sqrt{x'^2 + y'^2} - x'\dfrac{x'x'' + y'y''}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= x - y'\,\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}; \tag{17.21}$$

аналогично,

$$\eta = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}. \tag{17.22}$$

Упражнение 1. Пусть Γ — дважды дифференцируемая плоская кривая без особых точек, пусть α — угол наклона ее касательной к оси Ox и пусть $k^* = \frac{d\alpha}{ds}$ (следовательно, $|k^*| = k$) и $R^* = \frac{1}{k^*}$. Показать, что $\xi = x - R^* \sin\alpha$, $\eta = y + R^* \cos\alpha$, а также что $\xi = x - \frac{dy}{d\alpha}$, $\eta = y + \frac{dx}{d\alpha}$.

В случае, когда кривая является графиком функции $y = f(x)$, формулы (17.20), (17.21) и (17.22) принимают вид

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \tag{17.23}$$

$$\xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''} y', \tag{17.24}$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Примеры. 1. Найдем кривизну и эволюту параболы $y = ax^2$, $a > 0$.

Замечая, что $y' = 2ax$, $y'' = 2a$, по формуле (17.23) имеем $k = \frac{2a}{(1 + 4a^2x^2)^{3/2}}$. Чтобы найти уравнение эволюты, воспользуемся формулами (17.24):

$$\xi = x - \frac{1 + 4a^2x^2}{2a} 2ax = -4a^2x^3, \quad \eta = ax^2 + \frac{1 + 4a^2x^2}{2a} = \frac{6a^2x^2 + 1}{2a}.$$

Получилось параметрическое представление эволюты параболы с параметром x. Можно получить и ее явное представление, исключив этот параметр x. Для этого из первого равенства найдем $x^3 = -\xi/4a^2$, а из второго $x^2 = (2a\eta - 1)/6a^2$. Возводя первое получившееся равенство в квадрат, а второе в куб и приравнивая правые части, будем иметь

$$\left(\frac{\xi}{4a^2}\right)^2 = \left(\frac{2a\eta - 1}{6a^2}\right)^3, \text{ откуда } \xi = \pm \frac{4}{3} \sqrt{\frac{a}{3}} \left(\eta - \frac{1}{2a}\right)^{3/2}.$$

Эта кривая, изображенная на рис. 74, является, как мы знаем (см. пример 2 в п. 14.3), полукубической параболой.

2. Найдем радиус кривизны и эволюту эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $a \geqslant b > 0$.

Заметив, что $x' = -a\sin t$, $y' = b\cos t$, $x'' = -a\cos t$, $y'' = -b\sin t$, по формуле (17.20) получим

$$R = \frac{1}{k} = \frac{(a^2\sin^2 + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t} = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}.$$

Поэтому из формул (17.21) и (17.22) следует, что

$$\xi = a\cos t - b\cos t\,\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,$$

$$\eta = b\sin t - a\sin t\,\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t.$$

Это параметрическое представление искомой эволюты; параметр t можно исключить, возводя получившиеся равенства в степень 2/3 и складывая их:

$$(a\xi)^{2/3} + (b\eta)^{2/3} = (a^2-b^2)^{2/3}.$$

Эта кривая называется *астроидой* (рис. 75).

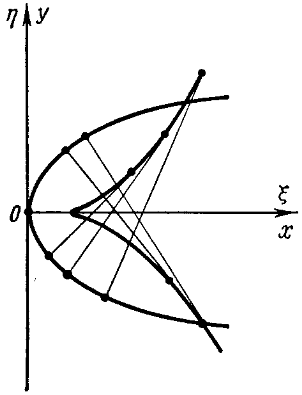

Рис. 74

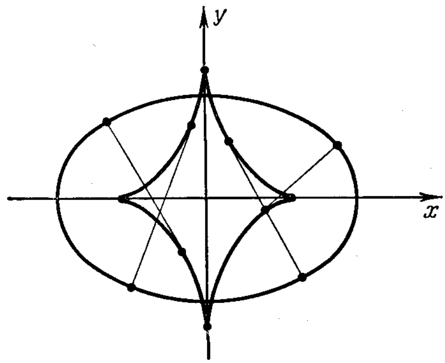

Рис. 75

Иногда для изображения кривой бывает удобно использовать так называемые полярные координаты (ρ, φ), $\rho \geqslant 0$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, где ρ — длина радиус-вектора данной точки M, а φ — угол, образованный этим радиус-вектором с осью Ox. Таким образом, каждой точке плоскости, кроме начала координат, взаимно однозначно соответствует указанная упорядоченная пара (ρ, φ); для начала же координат имеем $\rho = 0$, а угол φ не определен (рис. 76).

Если $M = (x, y)$ где, как обычно, x и y — декартовы координаты точки M, то

$$x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi. \tag{17.25}$$

Обратная связь выражается формулами

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2},\qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + k\pi,$$

где $k = 0$, если $x \geqslant 0$, $k = 1$, если $x < 0$, $y > 0$, и $k = -1$, если $y < 0$; при этом, как обычно, при $x = 0$, $y \neq 0$ считается $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} y$.

Иногда на угол φ не накладывают ограничения $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, а обозначают через φ любой угол, для которого $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$. В этом случае соответствие между упорядоченными парами (ρ, φ), $\rho \neq 0$, и точками плоскости, отличными от начала координат, уже, очевидно, не является взаимно однозначным.

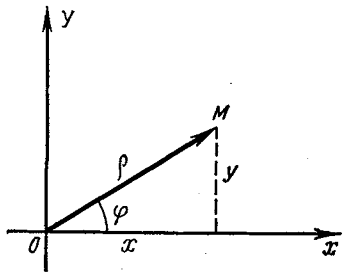

Рис. 76

Если задана непрерывная функция

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, \qquad (17.26)$$

то, подставляя ее в (17.25), получаем

$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi, \quad y = \rho(\varphi)\sin\varphi, \qquad (17.27)$$

т. е. параметрическое представление некоторой кривой Γ. В этом смысле можно говорить, что уравнение (17.26) задает в полярных координатах кривую Γ. Для вычисления кривизны, радиуса кривизны и эволюты кривой Γ, заданной уравнением (17.26), надо перейти к ее параметрическому представлению (17.27) и воспользоваться выведенными выше формулами.

Упражнения 2. Пусть в полярных координатах задана кривая $\rho = \rho(\varphi)$, пусть α — угол наклона ее касательной к оси Ox, а ω — угол, образованный этой касательной с продолжением радиус-вектора точки касания. Доказать, что $\alpha = \omega + \varphi$ и $\operatorname{tg}\omega = \rho/\rho'$.

3. Найти эволюту кривой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ называемой *кардиоидой*.

Указание. Полезно воспользоваться результатами упражнений 1 и 2.

Задача 13. Пусть Γ — дважды дифференцируемая кривая без особых точек, $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, и пусть $t_0 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t_1 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t_2 \in [a, b]$. Проведем через точки $r(t_0)$, $r(t_0 + \Delta t_1)$ и $r(t_0 + \Delta t_2)$ плоскость; доказать, что если в точке $r(t_0)$ кривизна $k \neq 0$, то при $\Delta t_1 \to 0$ и $\Delta t_2 \to 0$ эта плоскость стремится (определите это понятие) к соприкасающейся плоскости в точке $r(t_0)$.

Задача 14. В предположении предыдущей задачи проведем через те же три точки $r(t_0)$, $r(t_0 + \Delta t_1)$ и $r(t_0 + \Delta t_2)$ окружность. Доказать, что эта окружность при $\Delta t_1 \to 0$ и $\Delta t_2 \to 0$ стремится к окружности (определите это понятие), лежащей в соприкасающейся плоскости с центром в центре кривизны кривой и радиусом, равным радиусу кривизны в точке $r(t_0)$.

Эта предельная окружность называется *соприкасающейся окружностью* в данной точке кривой.