ГЛАВА ВТОРАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 18. МНОЖЕСТВА НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

18.1. ОКРЕСТНОСТИ ТОЧЕК. ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ТОЧЕК

Прежде чем перейти к изучению функций многих переменных, ознакомимся с некоторыми свойствами множеств, на которых эти функции задаются. Будем предполагать, что на рассматриваемой нами плоскости или в пространстве всегда задана некоторая прямоугольная система декартовых координат. Точки будем большей частью обозначать буквами $a, b, \ldots, x, y, z, \ldots$ *), а их координаты — теми же буквами с индексами, т. е. в случае плоскости будем писать $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$, а в случае пространства $x=(x_1, x_2, x_3)$, $y=(y_1, y_2, y_3)$. Расстояние между точками x и y будем обозначать $\rho(x, y)$. Как известно, формула для расстояния между точками x и y в случае плоскости имеет вид

$$\rho(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2},$$

а в случае пространства —

$$\rho(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}.$$

В дальнейшем придется иметь дело не только с функциями двух и трех переменных, но и с функциями большего числа переменных, а поэтому полезно ввести понятие n-мерного пространства для любого $n=1, 2, 3, \ldots$

Определение 1. *Точкой x n-мерного пространства называется упорядоченная совокупность n действительных чисел $(x_1, \ldots, x_n)=x$.*

Число x_i называется i-координатой точки x; $i=1, 2, \ldots, n$.

Расстояние между двумя точками $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ определяется по формуле

$$\rho(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}. \tag{18.1}$$

*) Иногда точки обозначаются и большими буквами, например M, N, P, а их координаты — буквами x, y, z.

Совокупность точек n-мерного пространства, для которых определено расстояние согласно формуле (18.1), *называется n-мерным евклидовым пространством* (*или, более полно, n-мерным арифметическим евклидовым пространством*) *и обозначается через* R^n или R^n_x.

Иногда для краткости вместо $x=(x_1, \ldots, x_n)$ будем писать $x=(x_i)$.

В случае $n=1$ пространство R^n совпадает с прямой, в случае $n=2$ — с плоскостью, а в случае $n=3$ — с пространством, изучаемым в элементарной и аналитической геометрии. В случае произвольного $n>3$ не следует искать в нашем определении какого-то скрытого физического или геометрического смысла. Нашей целью является лишь построение некоторого математического аппарата, удобного для изучения функций многих переменных; определения и терминологию мы заимствуем из обычной геометрии, так как это позволяет включить прямую, плоскость и трехмерное пространство в одну более общую схему.

Расстояние между точками в n-мерном евклидовом пространстве R^n обладает следующими свойствами:

1°) $\rho(x, y)\geqslant 0$, причем $\rho(x, y)=0$ в том и только том случае, когда $x=y$;

2°) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$ для любых двух точек x и y из R^n;

3°) $\rho(x, z)\leqslant\rho(x, y)+\rho(y, z)$ для любых трех точек x, y и z из R^n.

Свойства 1° и 2° непосредственно следуют из формулы (18.1), третье же, обычно называемое «*неравенством треугольника*» и хорошо известное для обычного трехмерного пространства, в общем случае (при произвольном n) требует доказательства.

Докажем предварительно лемму.

Лемма 1 (Коши — Шварц *)). *Для любых действительных чисел* a_k *и* b_k, $k=1, 2, \ldots, n$, *выполняется неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \tag{18.2}$$

Следствие.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \tag{18.3}$$

Доказательство. Если все $a_i=0$, $i=1, 2, \ldots, n$, то неравенство (18.2) очевидно — обе его части обращаются в ноль. Если же $a_1^2+\ldots+a_n^2>0$, то рассмотрим квадратичную функцию

$$F(t)=\sum_{i=1}^{n}(a_i t+b_i)^2=t^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2+2t\sum_{i=1}^{n} a_i b_i+\sum_{i=1}^{n} b_i^2. \tag{18.4}$$

*) Г. Шварц (1843—1921) — немецкий математик.

Очевидно, что

$$F(t) \geqslant 0. \tag{18.5}$$

Из условия (18.5) следует, что квадратный трехчлен (18.4) имеет либо совпадающие действительные корни, либо существенно комплексные корни, и поэтому его дискриминант не положителен:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 0.$$

Перенеся второе слагаемое в правую часть и извлекая квадратный корень, получим (18.2). □

Для доказательства неравенства (18.3) оценим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2$, применяя неравенство (18.2):

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} =$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2.$$

Извлекая из обеих частей квадратный корень, получим (18.3). □

Вернемся теперь к свойству 3 расстояния между точками в пространстве R^n.

Пусть $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)$ и $z=(z_1, \ldots, z_n)$. Положим $a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$, и значит, $a_i + b_i = x_i - z_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда неравенство (18.3) перепишется следующим образом:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2},$$

или, согласно (18.1) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$. □

В дальнейшем в этом параграфе пространство R^n будем считать фиксированным (т. е. считать фиксированным число n).

Определение 2. *Множество точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного евклидова пространства R^n таких, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = x_n = 0$, называется i-й координатной осью ($i = 1, 2, \ldots, n$) этого пространства. Точка $O = (0, 0 \ldots, 0)$ называется началом координат.*

Очевидно, в случае $n=2$ и $n=3$ наше определение дает обычные координатные оси.

Замечание. Пусть на плоскости заданы две прямоугольные системы координат, точка M в одной системе имеет координаты

(x, y), а в другой (ξ, η), т. е. $M=(x, y)=(\xi, \eta)$. Ставя в соответствие упорядоченной паре чисел (x, y) упорядоченную пару (ξ, η), получаем взаимно однозначное соответствие между множеством всех упорядоченных пар (x, y) и множеством всех упорядоченных пар (ξ, η). При этом если

$$M'=(x', y')=(\xi', \eta'), \quad M''=(x'', y'')=(\xi'', \eta''),$$

то

$$\rho(M', M'')=\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2}=\sqrt{(\xi''-\xi')^2+(\eta''-\eta')^2}.$$

Этот пример делает естественным следующее определение.

Пусть каждой точке $x=(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ поставлен в соответствие упорядоченный комплекс из n действительных чисел $\xi(x)=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, таким образом, что для любых двух точек $x'=(x_1, \ldots, x_n)$ и $x''=(x_1'', \ldots, x_n'')$ и соответствующих им комплексов $\xi(x')=(\xi_1', \ldots, \xi_n')$ и $\xi(x'')=(\xi_1'', \ldots, \xi_n'')$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i''-x_i')^2=\sum_{i=1}^{n}(\xi_i''-\xi_i')^2,$$

тогда числа, входящие в совокупность $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ также называются *координатами точки* x («в другой системе координат»). При таком определении координат расстояние между двумя данными точками не меняется при изменении систем координат, т. е. при замене одной системы координат другой. В дальнейшем, если не оговорено что-либо другое, система координат считается фиксированной.

Если точка x задается координатами $(x_1, \ldots, x_n)$, то иногда для ясности пространство R_x^n будет обозначать $R_{x_1}^n, \ldots, x_n$.

Определение 3. *Пусть* $x \in R^n$ и $\varepsilon > 0$. *Совокупность всех точек* y *пространства* R^n, *таких, что* $\rho(x, y) < \varepsilon$, *называется* n*-мерным шаром с центром в точке* x *и радиусом* ε *или* ε*-окрестностью (а иногда сферической или правильнее, шаровой окрестностью) точки* x *в пространстве* R^n *и обозначается* $U(x; \varepsilon)$; *таким образом,*

$$U(x; \varepsilon)=\{y : y \in R^n, \ \rho(x, y) < \varepsilon\}. \tag{18.6}$$

В координатной записи это определение выглядит так:

$$U(x; \varepsilon)=\left\{y=(y_1, \ldots, y_n) : \sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2 < \varepsilon^2\right\},$$
$$x=(x_1, \ldots, x_n), \quad \varepsilon > 0.$$

В случае прямой, т. е. при $n=1$ (рис. 77) $x=x_1$, $y=y_1$, а поэтому

$$U(x; \varepsilon)=\{y: |y-x| < \varepsilon\}.$$

Таким образом, $U(x;\ \varepsilon)$ является интервалом длины 2ε с центром в точке x, т. е. окрестностью точки x в рассмотренном выше смысле (см. п. 2.6).

В случае плоскости, т. е. при $n=2$ (рис. 78) $x=(x_1,\ x_2)$, $y=(y_1,\ y_2)$ и

$$U(x;\ \varepsilon)=\{y=(y_1,\ y_2):(y_1-x_1)^2-(y_1-x_1)^2<\varepsilon^2\},\quad \varepsilon>0,$$

т. е. $U(x;\ \varepsilon)$—круг радиуса ε с центром в точке $x=(x_1,\ x_2)$, а в случае пространства, т. е. при $n=3$ окрестность точки $x=(x_1,\ x_2,\ x_3)$

$$U(x;\ \varepsilon)= \\ =\{y=(y_1,\ y_2,\ y_3):(y_1-x)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2<\varepsilon^2\},\quad \varepsilon>0,$$

является шаром радиуса ε с центром в точке $(x_1,\ x_2,\ x_3)$.

Таким образом, понятие окрестности обобщено на случай n-мерного евклидова пространства R^n. Однако наряду с указанным обобщением бывает полезно и другое обобщение этого понятия, а именно понятие так называемой прямоугольной окрестности.

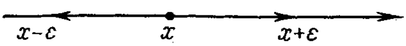

Рис. 77

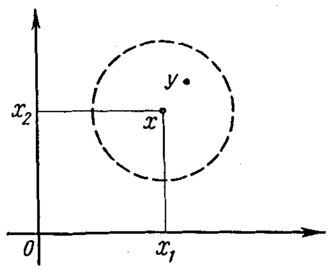

Рис. 78

Определение 4. Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)\in R^n$, $\delta_i>0$, $i=1,\ 2,\ldots,n$. *Множество*

$$P(x;\ \delta_1,\ \ldots,\ \delta_n)= \\ =\{y=(y_1,\ \ldots,\ y_n):x_i-\delta_i<y_i<x_i+\delta_i,\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}\qquad(18.7)$$

называется n-мерным параллелепипедом, а точка x — его центром.

Определение 5. *Если* $\delta_1=\delta_2=\ldots=\delta_n=\delta$, *то* $P(x,\ \delta,\ \delta,\ \ldots,\ \delta)$ *называется n-мерным кубом с центром в точке x и обозначается* $P(x;\ \delta)$.

Если $n=1$, то множество $P(x;\ \delta)$ является интервалом с центром в точке x длины 2δ; если $n=2$, то множество $P(x;\ \delta_1,\ \delta_2)$ является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат (их длины равны соответственно $2\delta_1$ и $2\delta_2$); при $n=3$ множество $P(x;\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3)$ представляет собой прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат (их длины соответственно равны $2\delta_1$, $2\delta_2$ и $2\delta_3$).

Под n-мерным параллелепипедом, соответственно n-мерным кубом, понимается также множество, определенное вышеуказанными условиями хотя бы в одной системе координат (а не обязательно в данной, как это было сделано выше). В дальнейшем n-мерный параллелепипед и n-мерный куб понимаются лишь в узком смысле, т. е. в смысле данного выше определения при фиксированной системе координат.

Определение 6. *Всякий n-мерный параллелепипед $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ называется прямоугольной окрестностью точки x.*

Если прямоугольная окрестность точки является n-мерным кубом, то она называется также и *кубической окрестностью* этой точки.

Лемма 2. *Какова бы ни была ε-окрестность $U(x; \varepsilon)$ точки $x \in R^n$, существует ее прямоугольная окрестность $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ такая, что*

$$P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n) \subset U(x; \varepsilon), \tag{18.8}$$

и наоборот, какова бы ни была прямоугольная окрестность $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ точки $x \in R^n$, существует ее ε-окрестность $U(x; \varepsilon)$ такая, что

$$U(x; \varepsilon) \subset P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n). \tag{18.9}$$

Эти утверждения геометрически очевидны, при $n = 1$, 2 и 3. Действительно, при $n = 1$ понятия сферической и прямоугольной окрестностей совпадают. При $n = 2$ лемма означает, что во всякий прямоугольник можно поместить круг с центром в центре прямоугольника, а во всякий круг можно вписать прямоугольник с центром в центре круга. Наконец, при $n = 3$ лемма означает, что во всякий прямоугольный параллелепипед можно поместить шар с центром в центре этого параллелепипеда и во всякий шар можно вписать прямоугольный параллелепипед с центром в центре рассматриваемого шара. Нетрудно записать и доказать эти утверждения и в аналитической форме, использовав координатную запись. Этот способ, как это сейчас будет показано, легко обобщается и на случай произвольного n-мерного пространства.

Доказательство леммы. Для любых точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $a = (a_1, \ldots, a_n)$ пространства R^n при каждом $i = 1, 2, \ldots, n$ справедливы неравенства

$$|x_i - a_i| \leq \rho(x, a) \leq |x_1 - a_1| + \ldots + |x_n - a_n|. \tag{18.10}$$

Левое неравенство получится, если в выражении $\rho(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}$ все слагаемые под корнем, кроме i-го, заменить нулем — в результате значение $\rho(x, a)$ может только уменьшиться.

Правое неравенство (18.10) следует из неравенства

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2} \leq |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|, \tag{18.11}$$

справедливого для любых действительных чисел α_i, $i=1, 2, \ldots, n$, и проверяемого непосредственным возведением в квадрат. Полагая в (18.11) $\alpha_i = x_i - a_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, получаем неравенство, стоящее в правой части (18.10).

Пусть задана шаровая окрестность $U(a;\ \varepsilon)$ точки a. Рассмотрим прямоугольную окрестность $P(a;\ \varepsilon/n)$, т. е. n-мерный куб с центром в точке a и ребром длины $2\varepsilon/n$ (случай $n=2$ изображен на рис. 79). Если $x \in P(a;\ \varepsilon/n)$ и, следовательно, в силу определения (18.7) выполняются неравенства $|x_i - a_i| < \frac{\varepsilon}{n}$, $i=1, 2, \ldots, n$, то из (18.10) вытекает и справедливость неравенства

$$\rho(x,\ a) \leqslant |x_1 - a_1| + \ldots + |x_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{n} + \ldots + \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Это означает, что $x \in U(a;\ \varepsilon)$. Поскольку под x подразумевалась произвольная точка куба $P(a;\ \varepsilon/n)$, то $P(a;\ \varepsilon/n) \subset U(a;\ \varepsilon)$; таким образом (18.8) доказано.

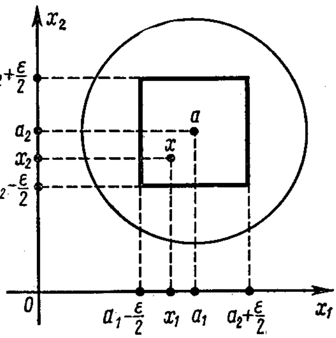

Рис. 79

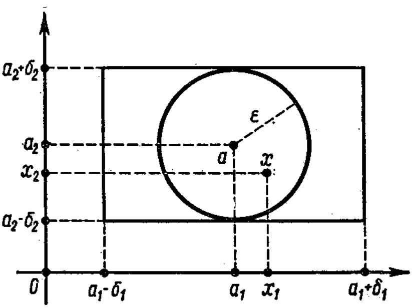

Рис. 80

Пусть теперь задана прямоугольная окрестность $P(a;\ \delta_1, \ldots, \delta_n)$ точки a. Положим $\varepsilon = \min\limits_{i=1, 2, \ldots, n} \delta_i$ и рассмотрим шаровую окрестность $U(a;\ \varepsilon)$ этой точки (см. рис. 80). Если $x \in U(a;\ \varepsilon)$ то для любого $i=1, 2, \ldots, n$ в силу (18.10) получим неравенства

$$|x_i - a_i| \leqslant \rho(x,\ a) < \varepsilon \leqslant \delta_i,$$

т. е. согласно определению (18.7) $x \in P(a;\ \delta_1, \ldots, \delta_n)$. Поскольку x — произвольная точка шара $U(a;\ \varepsilon)$, то $U(a;\ \varepsilon) \subset P(a;\ \delta_1, \ldots, \delta_n)$. □

На примере доказательства этой леммы хорошо видно, как используя для наглядности плоский чертеж, можно проводить доказательства в n-мерном пространстве.

От слишком поспешного использования аналогий, не подкрепленных математическими доказательствами, предостерегает пример, содержащийся в нижеследующем упражнении.

Упражнение 1. Доказать, что при $n=1, 2, 3, 4$ n-мерный куб с ребрами, длины которых равны единице, содержится в шаре единичного радиуса и с центром в центре куба, а при $n \geqslant 5$ аналогичное утверждение несправедливо.

Определение 7. *Пусть каждому натуральному числу m поставлена в соответствие некоторая точка $x^{(m)} \in R^n$ (не обязательно разные точки для разных m). Тогда множество $\{x^{(m)} : m=1, 2, \ldots\}$, состоящее из точек пространства R^n с различными номерами называется последовательностью точек этого пространства и обозначается*

$$x^{(m)}, \quad m=1, 2, \ldots, \quad \text{или} \quad \{x^{(m)}\}.$$

Последовательность $\{y^{(k)}\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x^{(m)}\}$ и обозначается

$$x^{(m_k)}, \ k=1, 2, \ldots, \text{ или } \{x^{(m_k)}\},$$

если для любого k существует такое m_k, что $y^{(k)} = x^{(m_k)}$, причем если $k' < k''$, то $m_{k'} < m_{k''}$.

Определение 8. *Точка $x \in R^n$ называется пределом последовательности $\{x^{(m)}\}$ и пишется*

$$x = \lim_{m \to \infty} x^{(m)}, \quad \text{если} \quad \lim_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, x) = 0.$$

Если $x = \lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)}$, то говорят, что последовательность $\{x^{(m)}\}$ сходится к точке x. Последовательность, которая сходится к некоторой точке, называется сходящейся.

Используя понятие окрестности, легко установить, что $x = \lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)}$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое m_ε, что для всех $m \geqslant m_\varepsilon$ выполняется включение $x^{(m)} \in U(x; \varepsilon)$. Согласно лемме 2, получаем также $x = \lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)}$ в том и только том случае, когда для любой прямоугольной окрестности $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ существует номер m_0 (зависящий от этой окрестности) такой, что для всех $m \geqslant m_0$

$$x^{(m)} \in P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n). \tag{18.12}$$

Конечно, при определении предела можно ограничиться и только одними кубическими окрестностями.

В случае $n=1$ определение 8 превращается в обычное определение предела числовой последовательности.

При $n=2$ сходимость последовательности $\{x^{(m)}\}$ точек плоскости R^2 к точке $x \in R^2$ означает, что, каков бы ни был круг с центром в точке x, начиная с некоторого номера, зависящего от радиуса этого круга, все члены данной последовательности лежат в этом круге (рис. 81). В случае $n=3$ сходимость последовательности точек $\{x^{(m)}\}$ пространства к точке $x \in R^3$ означает, что, каков бы ни был обычный трехмерный шар с центром в точке x, начиная с некоторого номера, зависящего от радиуса шара, все члены данной последовательности лежат в этом шаре.

Как и в случае числовых последовательностей, можно сказать, что $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)}=x$, $x^{(m)} \in R^n$, $m=1, 2, \ldots$, если всякая ε-окрестность точки x содержит почти все точки данной последовательности, т. е. все, за исключением, быть может, конечного числа их.

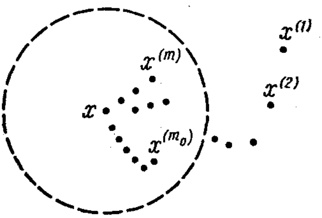

Рис. 81

Понятие предела последовательности $\{x^{(m)}\}$ точек пространства R^n может быть сведено к понятию предела числовых последовательностей, а именно последовательностей координат точек $x^{(m)}$, $m=1, 2 \ldots$.

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность* $x^{(m)}=\left(x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right) \in R^n$, $m=1, 2, \ldots$, *сходилась к точке* $x=(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{m\to\infty} x_i^{(m)}=x_i, \quad i=1, 2, \ldots, n. \tag{18.13}$$

Доказательство. Докажем необходимость условия (18.13). Пусть $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)}=x$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$; тогда, согласно (18.12) существует такое m_ε, что при всех $m \geqslant m_\varepsilon$ выполняется включение

$$x^{(m)} \in P(x;\ \varepsilon),$$

т. е. для любого $i=1, 2, \ldots, n$ и при $m \geqslant m_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$\left|x_i^{(m)}-x_i\right|<\varepsilon,$$

а это и означает, что

$$\lim_{m\to\infty} x_i^{(m)}=x_i, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Докажем достаточность условия (18.13). Пусть $\lim\limits_{m\to\infty} x_i^{(m)}=x_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, и $P(x;\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — заданная прямоугольная окрестность точки x. Тогда для каждого $\varepsilon_i>0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ существует такой номер $m_i=m_i(\varepsilon_i)$, что для всех $m \geqslant m_i$ выполняется неравенство

$$\left|x_i^{(m)}-x_i\right|<\varepsilon_i, \quad i=1, 2, \ldots, n. \tag{18.14}$$

Обозначим через m_0 наибольший из номеров $m_1, \ldots, m_n$:

$$m_0 = \max\{m_1, \ldots, m_n\};$$

тогда при $m \geqslant m_0$ и всех $i = 1, 2, \ldots, n$ будут одновременно выполнены условия (18.14) и, следовательно (см. (18.7)), при $m \geqslant m_0$ будем иметь включение

$$x^{(m)} \in P(x; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n),$$

что и означает, согласно (18.12), что

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x. \ \square$$

Из теоремы 1 и свойств пределов числовых последовательностей следует, что если последовательность точек имеет предел, то он единственен, и что всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу, что и вся последовательность.

Упражнение 2. Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие сходимости последовательности точек пространства R^n, аналогичное критерию Коши для числовых последовательностей.

Определение 9. *Множество $E \subset R^n$ называется ограниченным, если существует n-мерный куб $P(O; a)$ с центром в начале координат O такой, что $E \subset P(O; a)$.*

Аналогично лемме 2 доказывается, что, каков бы ни был шар $U(x; \varepsilon)$, существует куб $P(x; \delta)$ такой, что $P(x; \delta) \supset U(x; \varepsilon)$, и, наоборот каков бы ни был куб $P(x; \delta)$, существует шар $U(x; \varepsilon)$ такой, что $U(x; \varepsilon) \supset P(x; \delta)$. Отсюда следует, что можно дать еще одно эквивалентное предыдущему определение ограниченного множества.

Определение 9'. *Множество $E \subset R^n$ называется ограниченным, если существует n-мерный шар $U(O; \varepsilon)$ такой, что $E \subset U(O; \varepsilon)$.*

Определение 10. *Последовательность точек $x^{(m)} \in R^n$, $m = 1, 2, \ldots$, называется ограниченной, если множество ее значений, т. е. $\{x^{(m)} : m = 1, 2, \ldots\}$, ограничено в пространстве R^n.*

Если последовательность $x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right)$, $m = 1, 2, \ldots$, сходится, то она ограничена, ибо каждая из координатных последовательностей $x_i^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$, i — фиксировано ($i = 1, 2, \ldots \ldots, n$), в этом случае также сходится и, значит, ограничена.

Теорема 2. *Из любой ограниченной последовательности точек пространства R^n можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Эта теорема, как и в одномерном случае, обычно называется *теоремой Больцано — Вейерштрасса.*

Доказательство. Пусть задана ограниченная последовательность точек $x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right)$, $m = 1, 2, \ldots$, пространства R^n. Очевидно, что каждая из n последовательностей $\left\{x_i^{(m)}\right\}$,

$i=1, 2, \ldots, n$, также ограничена. Поэтому, согласно теореме Больцано — Вейерштрасса (см. п. 3.6), последовательность $\{x_1^{(m)}\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность; пусть это будет последовательность $x_1^{(m_{k_1})}$, $k_1=1, 2, \ldots$. Последовательность $\{x_2^{(m_{k_1})}\}$, как подпоследовательность последовательности $\{x_2^{(m)}\}$, также ограничена и, значит, содержит сходящуюся подпоследовательность. Пусть ею будет последовательность $x_2^{(m_{k_2})}$, $k_2=1$, $2, \ldots$. Последовательность $\{x_1^{(m_{k_2})}\}$, как подпоследовательность сходящейся последовательности $\{x_1^{(m_{k_1})}\}$, очевидно, также будет сходящейся. Продолжив это рассуждение, через n шагов получим n сходящихся последовательностей $\{x_i^{(m_{k_n})}\}$, $i=1, 2, \ldots, n$, каждая из которых является подпоследовательностью, соответственно последовательности $\{x_i^{(m)}\}$. Тогда, согласно теореме 1 последовательность точек $\{x^{(m_{k_n})}\}$ пространства R^n будет также сходящейся. $\square$

Иногда бывает удобно рассматривать последовательности точек, стремящиеся к бесконечности.

Определение 11. *Последовательность точек* $x^{(m)} \in R^n$, $m=1$, $2 \ldots$, *называется стремящейся к бесконечности, если расстояние ее членов от начала координат* $O=(0, 0, \ldots, 0)$ *стремится к бесконечности, т. е. если*

$$\lim_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, O) = +\infty \tag{18.15}$$

В этом случае пишут

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$$

Поскольку для любой точки $a \in R^n$ в силу неравенства треугольника

$$\rho(x^{(m)}, O) \leqslant \rho(x^{(m)}, a) + \rho(a, O)$$

справедливо неравенство

$$\rho(x^{(m)}, a) \geqslant \rho(x^{(m)}, O) - \rho(a, O),$$

то при выполнении условия (18.15) имеем: $\lim\limits_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, a) = +\infty$, т. е. если $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$, то расстояния от точек последовательности $\{x^{(m)}\}$ до любой фиксированной точки $a \in R^n$ стремятся к бесконечности.

Отметим, что, если $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$, то у точек $x^{(m)}$ существует по крайней мере одна координата, которая также стремится к бесконечности при $m \to \infty$. Действительно, если $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$, то например для каждого $p=1, 2, \ldots$ существует такой номер m_p, что для всех $m \geqslant m_p$ выполняется неравенство

$$\rho(x^{(m)}, O)=\sqrt{x_1^{(m)2}+\ldots+x_n^{(m)2}}>p,$$

откуда в силу (18.11) следует, что

$$|x_1^{(m)}|+\ldots+|x_n^{(m)}|>p. \tag{18.16}$$

Поэтому при данном p найдется такая i-ая координата, $i=1, 2, \ldots, n$, что для нее будем иметь

$$|x_i^{(m)}| \geqslant \frac{p}{n}.$$

В противном случае, т. е. если для всех $i=1, 2, \ldots, n$ имело бы место неравенство

$$|x_i^{(m)}|<\frac{p}{n},$$

то не выполнялось бы неравенство (18.16). Номеров координат конечное число, а поэтому один из них, обозначим его через i_0, при $p=1, 2, \ldots$ будет повторяться бесконечно много раз, т. е. найдется такая подпоследовательность p_k натуральных чисел, что при всех $m \geqslant p_k$, $k=1, 2, \ldots$, будем иметь: $|x_{i_0}^{(m)}| \geqslant p_k/n$. Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty}(p_k/n)=+\infty$, то для указанного i_0 получим

$$\lim_{m\to\infty} x_{i_0}^{(m)}=\infty.$$

18.2. РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ МНОЖЕСТВ

В настоящем пункте рассматриваются вопросы, вспомогательные для дальнейшего изложения математического анализа и связанные с геометрией n-мерного пространства.

Определение 12. *Пусть E — некоторое множество точек евклидова пространства R^n. Точка $x \in E$ называется внутренней точкой множества (относительно пространства R^n), если существует ε-окрестность этой точки, содержащаяся во множестве E, т. е. существует такое $\varepsilon>0$, что $U(x; \varepsilon) \subset E$.*

Определение 13. *Множество, каждая точка которого является его внутренней точкой (относительно рассматриваемого пространства R^n), называется открытым множеством.*

Следует иметь в виду, что одна и та же точка одного и того же множества может быть его внутренней точкой относительно одного пространства, содержащего это множество, и не быть внутренней точкой рассматриваемого множества относительно другого пространства, также содержащего это множество. Рассмотрим, например, пространство R^2_{xy}, т. е. плоскость с некоторой фиксированной системой декартовых координат, которые будем обозначать x и y. Ось x-ов этой плоскости, как всякая числовая ось, является евклидовым пространством R^1_x. Каждая точка какого-либо интервала (a, b) этой оси, т. е. множество точек

$$\{(x, y): a < x < b,\ y = 0\}$$

плоскости R^2_{xy}, является внутренней точкой этого интервала относительно указанного пространства R^1_x (оси x-ов) и не является внутренней точкой этого интервала относительно всей плоскости R^2_{xy}. Тем самым интервал (a, b) является открытым множеством пространства R^1_x и не является открытым множеством пространства R^2_{xy}.

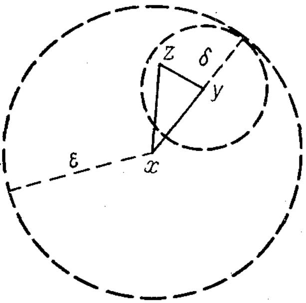

Рис. 82

Важный класс открытых множеств устанавливается следующей леммой.

Лемма 3. *Всякая ε-окрестность $U(x;\ \varepsilon)$ любой точки $x \in R^n$ является открытым множеством.*

Доказательство. Пусть задана некоторая окрестность $U(x;\ \varepsilon)$ и пусть $y \in U(x;\ \varepsilon)$. Положим

$$\delta = \varepsilon - \rho(y, x) \tag{18.17}$$

и покажем, что $U(y;\ \delta) \subset U(x;\ \varepsilon)$ (рис. 82).

Если $z \in U(y;\ \delta)$ и, значит, $\rho(z;\ y) < \delta$, то, применив неравенство треугольника и (18.17), получим

$$\rho(z, x) \leqslant \rho(z, y) + \rho(y, x) < \delta + \rho(y, x) = \varepsilon,$$

т. е. $z \in U(x;\ \varepsilon)$. В силу того что z — произвольная точка множества $U(y;\ \delta)$, это означает, что $U(y;\ \delta) \subset U(x;\ \varepsilon)$. ☐

Открытые множества пространства R^n будем обозначать большей частью буквой G.

Упражнение 3. Доказать, что множество внутренних точек всякого множества является открытым множеством.

Лемма 4. *Пересечение конечного числа, так же как и объединение любой совокупности открытых множеств являются открытыми множествами.*

Доказательство. Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_k$ — открытые множества пространства R^n. Если их пересечение $\bigcap\limits_{j=1}^{k} G_j$ — пустое множество, то оно является открытым ибо его множество внутренних точек пусто и, следовательно, совпадает с самим пересечением. Если же указанное пересечение не пусто и $x \in \bigcap\limits_{j=1}^{k} G_j$, то, в силу открытости множеств G_j, для каждого $j=1, 2, \ldots, k$ существует такое $\varepsilon_j > 0$, что $U(x; \varepsilon_j) \subset G_j$. Полагая $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$, получим, что для каждого j справедливо включение $U(x, \varepsilon) \subset G_j$ $(j=1, 2, \ldots, k)$. Следовательно, $U(x, \varepsilon) \subset \bigcap\limits_{j=1}^{k} G_j$, т. е. точка x является внутренней для пересечения $\bigcap\limits_{j=1}^{k} G_j$. Поскольку x — произвольная точка этого пересечения, оно является открытым множеством.

Пусть теперь дана произвольная система открытых множеств $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов, и $G = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} G_\alpha$. Покажем, что G — открытое множество. Действительно, какова бы ни была точка $x \in G$, существует такой индекс $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, что $x \in G_{\alpha_0}$. Поскольку G_{α_0} — открытое множество, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $U(x; \varepsilon) \subset G_{\alpha_0}$. Но тогда $U(x, \varepsilon) \subset \bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} G_\alpha = G$, т. е. x — внутренняя точка множества G, и значит это множество открыто. $\square$

Очень удобным оказывается следующее определение.

Определение 14. *Всякое открытое множество, содержащее точку называется ее окрестностью.*

Окрестность точки x будет обычно обозначаться через $U = U(x)$, быть может, с теми или иными индексами.

Замечание. Во всякой окрестности $U(x)$ точки x, очевидно, содержится как сферическая, так и прямоугольная окрестность этой точки. Далее, при понимании окрестности точки в смысле определения 14 сохраняется и аналог свойства (18.12), т. е. точка x является пределом последовательности $\{x^{(m)}\}$ тогда и только тогда, когда для каждой ее окрестности $U(x)$ существует такой номер m_0, что для всех $m \geq m_0$ выполняется включение $x^{(m)} \in U(x)$.

Определение 15. *Точка $x \in R^n$ называется точкой прикосновения множества $E \subset R^n$, если любая окрестность этой точки содержит по крайней мере одну точку множества E.*

Очевидно, что каждая точка множества E является его точкой прикосновения, ибо всякая окрестность точки $x \in E$ содержит саму точку x. Вместе с тем могут, конечно, существовать и точки прикосновения данного множества, не принадлежащие ему (например, концы интервала на прямой являются его точками прикосновения).

Упражнение 4. Доказать, что для того чтобы точка $x \in R^n$ была точкой прикосновения множества $E \subset R^n$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность точек $x^{(m)} \in E$, $m=1, 2, \ldots$, такая, что $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$.

Определение 16. *Если у точки $x \in E$ существует окрестность, не содержащая никаких других точек множества E, кроме самой точки x, то эта точка называется изолированной точкой множества E.*

Определение 17. *Точка $x \in R^n$ называется предельной точкой множества E, если любая окрестность точки x содержит по крайней мере одну точку множества E, отличную от x.*

Очевидно, что предельная точка является точкой прикосновения.

У всякой точки прикосновения x_0 множества E либо существует окрестность, содержащая лишь одну точку из E (в этом случае этой точкой является сама точка x_0), либо такой окрестности нет, т. е. в каждой окрестности точки x_0 имеется по крайней мере две точки множества E (следовательно, по крайней мере одна из них отлична от x_0). Поэтому всякая точка прикосновения множества E является либо его изолированной точкой, либо его предельной точкой (в последнем случае она может как принадлежать, так и не принадлежать самому множеству).

Примеры. Пусть $n=1$, $E=(0, 1)$ — интервал. Каждая точка отрезка $[0, 1]$ является точкой прикосновения и предельной точкой множества E, при этом точки 0 и 1 не принадлежат самому множеству E. Если $E=[0, 1]$ — отрезок, то множество точек прикосновения множества E совпадает с самим множеством. Наконец, если множество E состоит из интервала $(0, 1)$ и точки 2, т. е. $E=(0, 1)\cup\{2\}$, то точка 2 является его изолированной точкой, а множеством его точек прикосновения будет $[0, 1]\cup\{2\}$.

Определение 18. *Совокупность всех точек прикосновения множества $E \subset R^n$ называется замыканием множества E и обозначается $\bar{E}$.*

Как уже отмечалось, каждая точка множества E является его точкой прикосновения, поэтому

$$E \subset \bar{E}. \tag{18.18}$$

Определение 19. *Множество E называется замкнутым, если $\bar{E}=E$, т. е. если оно содержит все свои точки прикосновения.*

Например, при $n=1$ интервал $(0, 1)$ не является замкнутым множеством, а отрезок $[0, 1]$ — замкнутое множество.

Все пространство и пустое множество являются единственными в R^n одновременно замкнутыми и открытыми множествами (проверьте это).

Поскольку всякая точка прикосновения множества является либо его предельной, либо его изолированной точкой, а изолированная точка в силу самого своего определения принадлежит множеству, то требование принадлежности каждой точки прикосновения к множеству эквивалентно требованию принадлежности к этому множеству каждой его предельной точки. Иначе говоря, *множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.*

Упражнение 5. Пусть $E \subset R^k \subset R^n$. Доказать, что $x \in R^n$ является точкой прикосновения множества E в пространстве R^n тогда и только тогда, когда она принадлежит пространству R^k и является в нем точкой прикосновения множества E.

Отсюда следует, что множество E является замкнутым множеством пространства R^k тогда и только тогда, когда оно является замкнутым множеством пространства R^n. Таким образом, свойство множества быть замкнутым в некотором пространстве R^n является его «внутренним» свойством, т. е. свойством, которое не зависит от выбора пространства R^n, в котором лежит рассматриваемое множество. Как было отмечено выше, свойство множества быть открытым не является «внутренним» свойством в указанном смысле, одно и то же множество может быть открытым в одном пространстве R^n и не быть открытым в другом.

Отметим следующее очевидное свойство замкнутых множеств. *Если A — замкнутое множество, а $\{x^{(m)}\}$ — сходящаяся последовательность, все члены которой принадлежат множеству A: $x^{(m)} \in A$, $m = 1, 2, \ldots$, то ее предел также принадлежит множеству A.*

Действительно, если $x^{(0)} = \lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)}$, то из определения предела последовательности точек следует, что в любой окрестности точки $x^{(0)}$ имеются точки данной последовательности (и, более того, там лежат почти все точки последовательности, т. е. все за исключением конечного числа их), являющиеся, по предположению, и точками множества A. Таким образом, точка $x^{(0)}$ является точкой прикосновения множества A, и поскольку A — замкнутое множество, то $x^{(0)} \in A$.

Лемма 5. *Точка прикосновения замыкания множества является и точкой прикосновения самого множества.*

Следствие. *Замыкание всякого множества является замкнутым множеством.*

Доказательство леммы. Пусть $E \subset R^n$, $\bar{\bar{E}}$ — замыкание множества E и x — точка прикосновения множества $\bar{E}$, т. е. $x \in \bar{\bar{E}}$. Покажем, что $x \in \bar{E}$.

Из условия $x \in \bar{\bar{E}}$ следует, что любой окрестности $U = U(x)$ точки x принадлежит хотя бы одна точка y множества $\bar{E}$: $y \in U \cap \bar{E}$. Поскольку U, как всякая окрестность, является открытым множеством, то она является и окрестностью содержащейся в ней точки y. Но $y \in \bar{E}$, следовательно, в любой окрестности точки y, в частности — в U, имеется точка z из множества E: $z \in U \cap E$.

Итак, в любой окрестности U точки $x \in \bar{\bar{E}}$ имеется точка из E. Это и означает, что x является точкой прикосновения множества E: $x \in \bar{E}$. $\square$

Доказательство следствия. В лемме 5 доказано, что

$$\bar{\bar{E}} \subset \bar{E},$$

и так как согласно (18.18), $\bar{E} \subset \bar{\bar{E}}$, то

$$\bar{\bar{E}} = \bar{E}. \tag{18.19}$$

Примеры. 1. Всякий n-мерный шар

$$Q^n = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 < r^2 \right\} \tag{18.20}$$

является открытым множеством (см. лемму 1), поэтому его часто называют также *n-мерным открытым шаром*. Множество же

$$\bar{Q}^n = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 \leq r^2 \right\}, \tag{18.21}$$

замкнуто, так как нестрогие неравенства сохраняются при предельном переходе. Оно является замыканием открытого шара Q^n и называется *n-мерным замкнутым шаром*. В случае $n=2$: Q^2 — открытый круг, $\bar{Q}^2$ — замкнутый круг; в случае $n=1$: Q^1 — интервал, $\bar{Q}^1$ — отрезок.

2. Замкнутый шар $\bar{Q}^n$ получается из открытого шара Q^n присоединением к нему множества

$$\left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = r^2 \right\},$$

называемого *$(n-1)$-мерной сферой радиуса r с центром в точке $a = (a_1, \ldots, a_n)$* и обозначаемого S^{n-1}. В случае $n=2$: S^1 — окружность, в случае $n=1$: S^0 — пара точек.

Сфера

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = r^2 \right\} \tag{18.22}$$

также дает пример замкнутого множества (почему?)

Заметим еще, что n-мерный шар радиуса 1 с центром в начале координат обычно называется *n-мерным единичным шаром* (замкнутым или открытым), а $(n-1)$-мерная сфера радиуса 1 с центром в начале координат — $(n-1)$-мерной единичной сферой.

Определение 20. *Для всякого множества $E \subset R^n$ множество $R^n \setminus E$ называется его дополнением в пространстве R^n* (см. п. 1.1).

Лемма 6. *Для того чтобы множество было открытым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение было замкнутым.*

Доказательство необходимости. Пусть G — открытое множество. Тогда никакая точка $x \in G$ не является точкой прикосновения его дополнения $F = R^n \setminus G$, так как множество G, будучи открытым, является окрестностью точки x и не содержит точек множества F. Следовательно, все точки прикосновения множества F содержатся в F, что и означает замкнутость множества F.

Доказательство достаточности. Пусть F является замкнутым множеством и пусть $x \in G = R^n \setminus F$. В силу замкнутости F точка x не является его точкой прикосновения, поэтому существует ее окрестность $U(x)$, не пересекающаяся с множеством F и следовательно, такая, что $U(x) \subset G$. Таким образом, любая точка множества G является внутренней, т. е. G открыто. $\square$

Следствие 1. *Множество замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.*

Это сразу следует из леммы 6, так как если множество B является дополнением множества A в R^n, т. е. $B = R^n \setminus A$, то и наоборот множество A является дополнением B в R^n: $A = R^n \setminus B$.

Следствие 2. *Пересечение любой созокупности и объединение конечного числа замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.*

В самом деле, пусть F_α — замкнутые множества, тогда по лемме 6 множества $G_\alpha = R^n \setminus F_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, являются открытыми. Согласно формуле (1.1) имеем:

$$\bigcap_\alpha F_\alpha = \bigcap_\alpha (R^n \setminus G_\alpha) = R^n \setminus \bigcup_\alpha G_\alpha.$$

Множество $\bigcup\limits_\alpha G_\alpha$ по лемме 4 открыто как объединение открытых множеств. Следовательно, его дополнение $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha = R^n \setminus \bigcup\limits_\alpha G_\alpha$, согласно лемме 6 замкнуто.

Аналогично с помощью формулы (1.2) доказывается замкнутость объединения конечного числа замкнутых множеств. $\square$

Упражнение 6. Доказать, что если G — открытое множество, а F — замкнутое, $G \subset R^n$, $F \subset R^n$, то $G \setminus F$ — открытое множество.

Лемма 7. Пусть A и B — замкнутые непересекающиеся множества из R^n и множество A ограничено; тогда существует такое число $d > 0$, что для любых двух точек $x \in A$ и $y \in B$ выполняется неравенство $\rho(x, y) \geqslant d$.

Доказательство. Допустим, что такого числа d не существует. Тогда для любого $m = 1, 2, \ldots$ существует пара точек $x^{(m)} \in A$ и $y^{(m)} \in B$ таких, что $\rho(x^{(m)}, y^{(m)}) < 1/m$. Поскольку A — ограниченное множество, то из последовательности $\{x^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$. Пусть $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(m_k)} = x^{(0)}$. В силу замкнутости множества A имеем $x^{(0)} \in A$. Из неравенства

$$\rho(x^{(0)}, y^{(m_k)}) \leqslant \rho(x^{(0)}, x^{(m_k)}) + \rho(x^{(m_k)}, y^{(m_k)}) < \rho(x^{(0)}, x^{(m_k)}) + \frac{1}{m}$$

следует, что $\lim\limits_{k \to \infty} \rho(x^{(0)}, y^{(m_k)}) = 0$. Поэтому точка $x^{(0)}$ является точкой прикосновения множества B и в силу его замкнутости $x^{(0)} \in B$. Таким образом, $x^{(0)} \in A$ и $x^{(0)} \in B$, а это противоречит тому, что A и B не пересекаются. $\square$

Определение 21. *Для двух множеств* E_1 и E_2 величина

$$\rho(E_1, E_2) = \inf_{x \in E_1,\ y \in E_2} \rho(x, y)$$

называется расстоянием между E_1 и E_2. В частности, *если* E_1 *состоит из одной точки* x, то $\rho(E_1, E_2) = \rho(x, E_2)$ *называется расстоянием от точки* x *до множества* E_2.

Применяя этот термин, лемму 7 можно сформулировать следующим образом.

Если два замкнутых множества не пересекаются и по крайней мере одно из них ограничено, то расстояние между ними положительно.

Упражнение 7. Привести пример двух непересекающихся замкнутых множеств, расстояние между которыми равно нулю.

Лемма 8. *Если* A — *замкнутое множество,* $A \subset R^n$, $x \in \boldsymbol{R}^n$ и $\rho(x, A) = d$, то существует такая точка $y \in A$, что $\rho(x, y) = d$.

Доказательство. Если $\rho(x, A) = \inf\limits_{y \in A} \rho(x, y) = d$, то для любого $m = 1, 2, \ldots$ найдется такая точка $y^{(m)} \in A$, что $\rho(x, y^{(m)}) < d + \frac{1}{m}$. Очевидно, для каждого m справедливо включение $y^{(m)} \in U(x, d+1)$, а поэтому последовательность $\{y^{(m)}\}$ ограничена и, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{y^{(m_k)}\}$. Пусть $\lim\limits_{k \to \infty} y^{(m_k)} = y^{(0)}$. В силу замкнутости множества A имеем $y^{(0)} \in A$; далее

$$\rho(x, y^{(0)}) \leqslant \rho(x, y^{(m_k)}) + \rho(y^{(m_k)}, y^{(0)}) < d + \frac{1}{m_k} + \rho(y^{(m_k)}, y^{(0)}).$$

Переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, получим $\rho(x, y^{(0)}) \leqslant d$. С другой стороны, $\rho(x, y^{(0)}) \geqslant \rho(x, A) = d$, следовательно, $\rho(x, y^{(0)}) = d$. $\square$

Определение 22. *Точка* $x \in R^n$ *называется граничной точкой множества* $E \subset \boldsymbol{R}^n$, *если в любой ее окрестности существуют точки, как принадлежащие множеству* E, *так и не принадлежащие ему. Совокупность всех граничных точек множества* E *называется его границей и обозначается* ∂E.

Очевидно, что $\partial E \subset \bar{E}$. При этом каждая точка прикосновения множества E является либо его граничной точкой, либо его внутренней точкой — других возможностей нет, поэтому $\bar{E} = E \cup \partial E$.

Если G — открытое множество, то в объединении $\bar{G} = G \cup \partial G$ G и ∂G не пересекаются.

Действительно, поскольку множество G открыто, всякая его точка является внутренней и тем самым не принадлежит его границе.

Примеры. Пусть $n = 2$, $Q^2 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ — открытый круг. Если $E = Q^2$, то любая точка окружности $S^1 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 +$

$+x_2^2=1\}$ является граничной точкой множества E и других граничных точек нет, т. е. $S^1=\partial E$. В этом случае граница множества E не принадлежит ему.

Пусть $E=\bar{Q}^2$ — замкнутый круг, и в этом случае окружность S^1 является границей для E, причем теперь $\partial E\subset E$.

Наконец, если $E=S^1$ — окружность, то каждая точка множества E является его граничной точкой и других граничных точек нет, т. е. $E=\partial E$.

Вообще, $(n-1)$-мерная сфера (18.22) является границей как n-мерного открытого шара (18.20), так и замкнутого (18.21), а также совпадает со своей собственной границей (почему?)

Упражнения. 8. Доказать, что для того чтобы множество $A\subset \boldsymbol{R}^n$ было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы $\partial A\subset A$.

9. Доказать, что $\overline{\partial E}=\partial E$.

Для дальнейшего нам понадобится еще понятие кривой в n-мерном пространстве. Для этой цели обобщим данное выше определение кривой в трехмерном пространстве, не касаясь вопроса о преобразовании параметра.

Определение 23. *Множество точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$ пространства $\boldsymbol{R}^n$, координаты которых заданы как непрерывные функции $x_i=x_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, определенные на некотором отрезке $[a, b]$, называется непрерывной кривой в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Аргумент t называется параметром кривой. Точка $x(a)=(x_1(a), \ldots$ $\ldots, x_n(a))$ называется началом, а точка $x(b)=(x_1(b), \ldots, x_n(b))$ — концом данной кривой.*

Все сказанное в п. 16.1 и 16.2 о кривой в трехмерном пространстве можно естественным образом перенести и на общий n-мерный случай, но мы не будем на этом останавливаться. Важным для дальнейшего является понятие прямой в n-мерном пространстве.

Определение 24. *Пусть $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})\in R^n$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — некоторые фиксированные числа $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2>0$. Множество точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$ пространства R^n, координаты которых представимы в виде*

$$x_i=x_i^{(0)}+\alpha_i t, \quad i=1, 2, \ldots, n, \quad -\infty<t<+\infty,$$

называется прямой в пространстве R^n, проходящей через точку $x^{(0)}$.

Часть прямой, соответствующая изменению параметра t в некотором отрезке $[a, b]$, называется *прямолинейным отрезком* (прямой), а ее часть, соответствующая изменению параметра в бесконечном промежутке $t\geqslant a$, — *лучом*. Очевидно, что в случае $n=3$ получается прямая, соответственно отрезок или луч, в обычном трехмерном пространстве, а $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ является направляющим вектором этой прямой. Если даны две различные точки $(x_1', \ldots, x_n')$

и $(x_1'', \ldots, x_n'')$, то уравнение прямой, проходящей через эти точки, имеет вид

$$x_i = x_i' + (x_i'' - x_i')\,t;\quad i = 1, 2, \ldots, n;\quad -\infty < t < +\infty.$$

Определение 25. *Множество $E \subset R^n$, любые две точки которого можно соединить целиком лежащей в нем непрерывной кривой, называется линейно связным* *).

Иначе говоря, множество E называется линейно связным, если, каковы бы ни были точки $x^{(1)} \in E$ и $x^{(2)} \in E$, существует непрерывная кривая $x(t) = \{x_i(t);\ a \leq t \leq b\}$ такая, что ее началом является точка $x^{(1)}$, т. е. $x(a) = x^{(1)}$, концом — точка $x^{(2)}$, т. е. $x(b) = x^{(2)}$, и все точки этой кривой принадлежат множеству E, т. е. $x(t) \in E$ для всех $t \in [a, b]$.

Примерами линейно связных множеств являются точка, отрезок, а примером линейно несвязного множества — пара различных точек.

Лемма 9. *Если линейно связное множество пересекается с некоторым множеством и с его дополнением в R^n, то оно пересекается и с границей этого множества.*

Доказательство. Пусть A — линейно связное множество $A \subset R^n$, B — некоторое множество, $B \subset R^n$, и пусть пересечения $A \cap B$ и $A \cap (R^n \setminus B)$ не пусты. Пусть $x^{(1)} \in A \cap B$ и $x^{(2)} \in A \cap (R^n \setminus B)$. Поскольку A — линейно связное множество, то существует такая непрерывная кривая $x(t)$, $a \leq t \leq b$, что $x(a) = x^{(1)}$, $x(b) = x^{(2)}$ и $x(t) \in A$ для всех $t \in [a; b]$. Обозначим через τ верхнюю грань тех $t \in [a, b]$, для которых $x(t) \in B$. Очевидно, $a \leq \tau \leq b$. В любой окрестности точки $x(\tau)$ содержатся как точки, принадлежащие B, так и не принадлежащие B (почему?). Следовательно, $x(\tau) \in \partial B$. Поскольку $x(\tau) \in A$, пересечение $\partial B \cap A$ не пусто. $\square$

Определение 26. *Открытое линейно связное множество называется областью.* **)

Примеры. В случае $n = 1$ всякий интервал является областью, а множество, состоящее из двух или более непересекающихся интервалов (рис. 83), хотя и представляет собой открытое множество, но не является областью.

Рис. 83

В случае $n = 2$ всякий открытый круг есть область, а множество, состоящее из двух или более непересекающихся открытых кругов (рис. 84), хотя и открыто, но не является областью, так как две точки x и y,

*) Кроме понятия линейной связности в математике существует понятие связности множества, которое в нашем курсе не рассматривается.

**) Не следует смешивать понятие области определения функции и понятие области в смысле этого определения.

принадлежащие разным кругам, нельзя соединить непрерывной кривой, лежащей целиком внутри рассматриваемого множества.

Всякий n-мерный открытый шар является областью.

Определение 27. *Область, любые две точки которой можно соединить отрезком, целиком в ней лежащим, называется выпуклой областью.*

Всякий n-мерный открытый шар является выпуклой областью.

Определение 28. *Множество, лежащее в пространстве R^n и являющееся замыканием некоторой области, называется замкнутой областью.*

Замкнутый n-мерный шар является замкнутой областью.

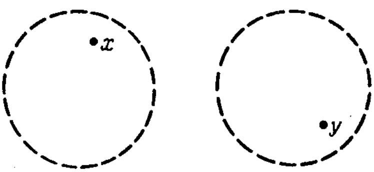

Рис. 84

Упражнение 10. Построить пример невыпуклой области.

Задача 15 (теорема Жордана *)). Доказать, что всякий простой контур (см. п. 16.1) на плоскости разбивает плоскость на две области (ограниченную и неограниченную); это означает, во-первых, что он является границей каждой из этих областей, во-вторых, что никакие две точки, принадлежащие различным указанным областям, нельзя соединить кривой, не пересекающей данный контур.

18.3 КОМПАКТЫ

В этом пункте будут рассмотрены некоторые свойства множеств, называемых *компактами* и играющих важную роль в анализе.

Определение 29. *Множество $A \subset R^n$ называется компактом, если из любой последовательности его точек можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит множеству A.*

Важное свойство, характеризующее компакты в R^n, устанавливается следующей теоремой.

Теорема 3. *Для того, чтобы множество $E \subset \boldsymbol{R}^n$ было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и замкнутым.*

Доказательство необходимости. Пусть $A \subset R^n$ и A — компакт. Если множество A было бы неограниченным, то для любого натурального числа m нашлась бы такая точка $x^{(m)} \in A$, что $\rho(O, x^{(m)}) > m$ ($m = 1, 2, \ldots$). Здесь, как всегда, $O = (0, 0, \ldots, 0)$. Очевидно, $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$. Поэтому любая подпоследовательность последовательности $\{x^{(m)}\}$ также имеет пределом ∞, и, следовательно, из $\{x^{(m)}\}$ нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность, что противоречит тому, что A — компакт. Итак, A — ограниченное множество.

*) К. Жордан (1838—1922) — французский математик.

Если множество A не было бы замкнутым, то существовала бы его точка прикосновения x, которая ему не принадлежала бы $x \notin A$. Для этой точки нашлась бы такая последовательность $x^{(m)} \subset A$, $m = 1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x$. Поэтому любая ее подпоследовательность также имела бы своим пределом точку $x \notin A$, т. е. множество A снова не было бы компактом. Следовательно, A — замкнутое множество.

Доказательство достаточности. Пусть E — ограниченное замкнутое множество и $\{x^{(m)}\}$ — какая-либо последовательность его точек: $x^{(m)} \in E$ ($m = 1, 2, \ldots$). В силу ограниченности множества E эта последовательность также ограничена. Следовательно, по теореме 2 п. 18.1, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$. Обозначим ее предел через x: $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(m_k)} = x$. Очевидно x — точка прикосновения множества E, ибо $x^{(m_k)} \in E$, а поскольку E — замкнутое множество, то $x \in E$, т. е. E действительно компакт. $\square$

Доказанная теорема позволяет легко устанавливать компактность многих часто встречающихся множеств, например, отрезков, замкнутых шаров и параллелепипедов, сфер в пространствах $\boldsymbol{R}^n$ любой размерности — все перечисленные множества, будучи ограниченными и замкнутыми, являются компактами. Так же легко с помощью теоремы 3 устанавливается и некомпактность многих множеств. Например, конечные интервалы, не будучи замкнутыми, а бесконечные, не будучи ограниченными множествами, не являются компактами.

Отметим, что в силу той же теоремы 3, лемму 7 из п. 18.2 можно сформулировать следующим образом: *если два замкнутых множества не пересекаются и по крайней мере одно из них является компактом, то расстояние между ними больше нуля.*

Прежде чем перейти к другим характеристическим свойствам компактов, введем ряд определений и докажем одно вспомогательное утверждение.

Последовательность n-мерных кубов $\{Q_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, называется последовательностью *вложенных кубов*, если

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_k \supset Q_{k+1} \supset \ldots$$

Лемма 10. *Для последовательности замкнутых вложенных кубов $\{Q_k\}$, длины ребер которых стремятся к нулю при $k \to \infty$, существует одна и только одна точка, принадлежащая всем кубам рассматриваемой последовательности.*

Доказательство. Пусть кубы

$$Q_k = \{x = (x_i) : a_i^{(k)} \leqslant x_i \leqslant a_i^{(k)} + d^{(k)}; \quad i = 1, 2, \ldots, n\} \tag{18.23}$$

с ребрами длин $d^{(k)}$ образуют последовательность вложенных кубов *) и пусть $\lim\limits_{k\to\infty} d^{(k)}=0$. Тогда отрезки $[a_i^{(k)}, a_i^{(k)}+d_i^{(k)}]$, $k=1, 2, \ldots$, образуют систему вложенных отрезков, длины $d_i^{(k)}$ которых стремятся к нулю при $k\to\infty$. Поэтому существуют и притом единственные числа ξ_i, такие, что при фиксированном $i=1, 2, \ldots, n$ и любом $k=1, 2, \ldots$ имеет место включение $\xi_i \in [a_i^{(k)}, a_i^{(k)}+d^{(k)}]$. Отсюда следует, что точка $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ принадлежит всем кубам рассматриваемой последовательности $\xi\in Q_k$, $k=1, 2, \ldots$, и эта точка единственна.

Определение 30. Пусть $E\subset \boldsymbol{R}^n$. Система

$$\Omega=\{E_\alpha\},\ \alpha\in\mathfrak{A} \tag{18.24}$$

множеств $E_\alpha\subset \boldsymbol{R}^n$ ($\mathfrak{A}=\{\alpha\}$ — некоторая совокупность индексов α) называется *покрытием множества* E, если

$$E\subset\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} E_\alpha.$$

Таким образом, система (18.24) называется покрытием множества E, если каждая точка этого множества принадлежит хотя бы одному множеству E_α системы Ω.

Покрытие (18.24) множества E, состоящее из конечного числа множеств E_α, называется *конечным покрытием* этого *множества*.

В случае, когда все множества системы Ω открытые, покрытие Ω называется *открытым покрытием множества* E.

Теорема 4. *Для того чтобы множество $E\subset \boldsymbol{R}^n$ было компактом, необходимо и достаточно, чтобы из любого его открытого покрытия можно было выделить конечное покрытие.*

Доказательство необходимости. Пусть A — компакт и пусть система

$$\Omega=\{G_\alpha\},\quad \alpha\in\mathfrak{A} \tag{18.25}$$

— его открытое покрытие. Допустим, что из этого покрытия нельзя выделить конечного покрытия компакта A. Согласно теореме 3 из того, что множество A является компактом, следует, что оно ограничено. Поэтому существует замкнутый куб Q, содержащий множество A.

Пусть

$$Q=\{x=(x_i): a_i\leqslant x_i\leqslant a_i+d,\quad i=1, 2, \ldots, n\}.$$

Разобьем куб Q на 2^n равных замкнутых кубов Q_j, определяемых набором n неравенств вида

$$a_i+\frac{d}{2}\leqslant x_i\leqslant a_i+d \quad \text{или} \quad a_i\leqslant x_i\leqslant a_i+\frac{d}{2}$$

*) Напомним, что мы договорились (см. п. 18.1) под кубом всегда понимать лишь кубы, задаваемые неравенствами вида (18.23) при данной фиксированной системе координат.

(на рис. 85 изображен случай, когда $n=2$), тогда

$$Q=\bigcup_{j=1}^{2^n} Q_j. \tag{18.26}$$

Система (18.25) образует открытое покрытие каждого из множеств $A\cap Q_j$ ($j=1, 2, \ldots, 2^n$). Среди этих множеств существует такое непустое множество — обозначим его через $A\cap Q_{j_1}$ —, что из покрытия (18.25) нельзя выделить конечное покрытие этого множества — в противном случае из системы (18.25) можно было бы в силу равенства (18.26) выделить конечное покрытие и всего множества A, что противоречило бы сделанному предположению.

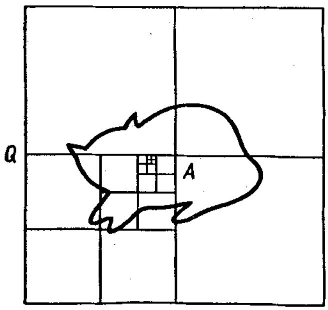

Рис. 85

Разобьем куб Q_{j_1} снова на 2^n равных замкнутых кубов $Q_{j_1 j}$ ($j=1, 2, \ldots, 2^n$). Обозначим через $Q_{j_1 j_2}$ тот из кубов $Q_{j_1 j}$, пересечение которого с компактом A нельзя покрыть конечным числом множеств системы Ω и т. д. В результате получим последовательность вложенных замкнутых кубов

$$Q_{j_1}\supset Q_{j_1 j_2}\supset\ldots\supset Q_{j_1 j_2 \ldots j_k}\supset\ldots, \tag{18.27}$$

длины ребер которых равны, соответственно, $d/2, d/4, \ldots, d/2^k, \ldots$, и, следовательно, стремятся к нулю при $k\to\infty$.

Каждый из кубов $Q_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ последовательности (18.27) обладает тем свойством, что из системы (18.25) нельзя выделить конечное покрытие непустого множества

$$A\cap Q_{j_1 j_2 \ldots j_k},$$

j_ν принимает одно из значений $1, 2, 3, \ldots, 2^n$; $\nu=1, 2, \ldots, k$; $k=1, 2, \ldots$. Согласно лемме 10 существует, и притом единственная, точка ξ, принадлежащая всем кубам системы (18.27). Поскольку ребра кубов этой системы стремятся к нулю и каждый куб имеет непустое пересечение с множеством A, то в любой окрестности точки ξ имеются точки множества A. Действительно, заметим, что диагональ куба $Q_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ равна $d\sqrt{n}/2^k$. Далее, каково бы ни было $\varepsilon>0$ выберем k_0 так, что

$$d\sqrt{n}/2^{k_0}<\varepsilon. \tag{18.28}$$

Это возможно, ибо $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{d\sqrt{n}}{2^k}=0$. Теперь, замечая, что любая точка $x\in Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$ находится от точки $\xi\in Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$ на расстоянии, не превышающем диагонали куба $Q_{j_1 j_2 \dots j_{k_0}}$, будем иметь

$$\rho(x, \xi) \leqslant \frac{d\sqrt{n}}{2^{k_0}} < \varepsilon.$$

Это означает, что x лежит в ε-окрестности точки ξ. Следовательно, весь куб $Q_{j_1 j_2 \dots j_{k_0}}$, в том числе и его точки, принадлежащие множеству A, содержатся в рассматриваемой ε-окрестности точки ξ. Таким образом, ξ является точкой прикосновения множества A. Согласно же теореме 3, множество A, будучи компактом, замкнуто, и поэтому $\xi \in A$.

Построенная вспомогательная последовательность кубов (18.27) легко позволяет доказать невозможность выполнения сделанного предположения о том, что из покрытия (18.25) компакта A нельзя выделить конечного покрытия этого компакта. В самом деле, поскольку система (18.25) является покрытием множества A, то существует такой индекс $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, что $\xi \in G_{\alpha_0}$. Множество G_{α_0} открыто, следовательно, найдется такое число $\varepsilon > 0$, что ε-окрестность $U(\xi; \varepsilon)$ точки ξ будет целиком содержаться в G_{α_0}:

$$U(\xi; \varepsilon) \subset G_{\alpha_0}. \tag{18.29}$$

Заметим теперь, что для любого $\varepsilon > 0$, в частности для ε, удовлетворяющего условию (18.29), найдется, как показано выше, такой номер k_0, что будет выполнено включение

$$Q_{j_1 j_2 \dots j_{k_0}} \subset U(\xi; \varepsilon). \tag{18.30}$$

Из (18.29) и (18.30) имеем

$$A \cap Q_{j_1, j_2 \dots j_{k_0}} \subset Q_{j_1 j_2 \dots j_{k_0}} \subset U(\xi, \varepsilon) \subset G_{\alpha_0},$$

и, следовательно, из системы (18.25) можно выделить конечное покрытие множества $A \cap Q_{j_1 j_2 \dots j_{k_0}}$, а именно покрытие, состоящее только из одного множества G_{α_0}. Это противоречит допущению в соответствии с которым выбраны кубы $Q_{j_1 j_2 \dots j_k}$. Таким образом предположив, что из системы (18.25) нельзя выделить конечного покрытия компакта, мы пришли к противоречию. Тем самым необходимость условия доказана.

Доказательство достаточности. Пусть $E \subset R^n$ и пусть из любого открытого покрытия множества E можно выделить конечное покрытие. Допустим, что E не является компактом. Это согласно определению 29 означает, что существует последовательность $\{x^{(m)}\} \subset E$, $m = 1, 2, \dots$, из которой нельзя выделить сходящуюся к некоторой точке из E подпоследовательность. Следовательно, какова бы ни была точка $x \in E$, она не является частичным пределом последовательности $\{x^{(m)}\}$. Поэтому у каждой точки $x \in E$ найдется окрестность — обозначим ее через G_x, содержащая лишь конечное число элементов последовательности $\{x^{(m)}\}$;

в противном случае из последовательности $\{x^{(m)}\}$ можно было бы выделить сходящуюся к x подпоследовательность (если все элементы последовательности $\{x^{(m)}\}$, лежащие в G_x, таковы, что $x^{(m)} \neq x$, то из того, что этих элементов лишь конечное число, очевидно, следует, что у точки x можно выбрать даже такую окрестность, которая вовсе не будет содержать элементов последовательности $\{x^{(m)}\}$).

В силу выбора окрестностей G_x, каждая точка x множества E принадлежит соответствующей окрестности: $x \in G_x$. Поэтому совокупность $\Omega = \{G_x\}$, $x \in E$, всех таких окрестностей образует открытое покрытие множества E. Согласно условию теоремы, из него можно выделить конечное покрытие. Пусть им будет

$$\Omega_0 = \{G_{x_1}, G_{x_2}, \ldots, G_{x_k}\}.$$

Каждый элемент этого покрытия содержит лишь конечное число членов последовательности $\{x^{(m)}\}$. Следовательно, все элементы покрытия Ω_0 также содержат лишь конечное число членов последовательности $\{x^{(m)}\}$. Это, однако, невозможно, так как покрывая все множество E, элементы конечного покрытия Ω_0 должны содержать все члены последовательности $\{x^{(m)}\}$, которых бесконечно много. Полученное противоречие доказывает достаточность условий теоремы. $\square$

Замечание. Необходимость условий теоремы, т. е. утверждение, что из всякого открытого покрытия компакта можно выделить конечное покрытие, обычно называют леммой Гейне—Бореля*).

Подчеркнем, что в теореме 4 существенным является то, что рассматриваются покрытия, состоящие именно из открытых множеств. Так, например, из покрытия отрезка $[0, 1]$ (который, как уже отмечалось, будучи ограниченным замкнутым множеством, является компактом) отрезками $[1/(n+1), 1/n]$, $n = 1, 2, \ldots$, и отрезком $[-1, 0]$ нельзя выделить конечного покрытия. Это объясняется тем, что здесь покрытие состоит не из открытых, а из замкнутых множеств.

Упражнение 11. Доказать, что для любого конечного открытого покрытия $\Omega = \{G_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ компакта $A \subset R^n$ существует такое число $l > 0$, что каково бы ни было множество $E \subset A$, для которого $\sup\limits_{x, y \in E} \rho(x, y) \leqslant l$, существует такой элемент G_{k_0} покрытия Ω, что $E \subset G_{k_0}$.

В заключение этого пункта докажем еще одно вспомогательное утверждение. Предварительно введем следующее обозначение: для всякого множества $E \subset R^n$ обозначим через E_η, где $\eta > 0$, совокупность всех точек, расстояния которых от E не превосходят

*) Э. Борель (1871—1956) — французский математик.

числа η, т. е. положим

$$E_\eta \overset{\text{def}}{=} \{x\colon \rho(x, E) \leqslant \eta\}.$$

Лемма 11. *Если A — компакт, $A \subset R^n$, то при любом $\eta > 0$ множество A_η также является компактом.*

Доказательство. Согласно теореме 3, множество A, будучи компактом, ограничено и замкнуто. Ограниченность множества A означает, что существует такое $a > 0$, что A содержится в шаре $U(O, a)$.

Покажем, что $A_\eta \subset U(O, a+\eta)$. Если $x \in A_\eta$, то согласно лемме 8 найдется такая точка $y \in A$, что $\rho(x, y) = \rho(x, A) \leqslant \eta$. Из условия же $A \subset U(O, a)$ следует, что $\rho(O, y) < a$, поэтому

$$\rho(O, x) \leqslant \rho(O, y) + \rho(y, x) < a + \eta.$$

Таким образом, $x \in U(O, a+\eta)$. Точка x является произвольной точкой множества A_η. Следовательно, $A_\eta \subset U(O, a+\eta)$ и поэтому множество A_η ограничено.

Покажем теперь, что A_η — замкнутое множество. Если x — точка прикосновения множества A_η: $x \in \bar{A}_\eta$ то для любого $\varepsilon > 0$ существует такая точка $y \in A_\eta$, что $\rho(x, y) < \varepsilon$. Из определения множества A_η и леммы 8 следует, что существует такая точка $z_0 \in A$, что $\rho(y, z_0) = \rho(y, A) \leqslant \eta$; поэтому

$$\rho(x, A) = \inf_{z \in A} \rho(x, z) \leqslant \rho(x, z_0) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z_0) < \varepsilon + \eta.$$

Это неравенство верно для любого $\varepsilon > 0$. Устремляя ε к нулю, получаем $\rho(x, A) \leqslant \eta$, т. е. $x \in A_\eta$, что и доказывает замкнутость множества A_η.

Итак, множество A_η ограничено и замкнуто, а следовательно, в силу той же теоремы 3 является компактом. □

18.4. МНОГОМЕРНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В п. 15.1 отмечалось, что при фиксированной системе координат в трехмерном пространстве задание вектора равносильно заданию трех его координат. При сложении векторов и их умножении на числа те же действия выполняются и с их координатами. В n-мерном случае вектор можно определить при помощи его координат.

Определение 31. *Упорядоченная система n действительных чисел*

$$(x_1, \ldots, x_n); \quad x_i \in \boldsymbol{R}; \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

называется n-мерным действительным вектором $\boldsymbol{x}$, а числа $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ — его координатами. Число n называется размерностью вектора.

Суммой $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ *векторов* $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $\boldsymbol{y}=(y_1, \ldots, y_n)$ *называется вектор* $(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$, т. е.

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \overset{\text{def}}{=} (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n),$$

а произведением вектора $\boldsymbol{x}$ *на число* $\lambda \in \boldsymbol{R}$ *называется вектор*

$$\lambda x \overset{\text{def}}{=} x\lambda \overset{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Множество всех n-мерных векторов, в котором введены операции сложения векторов и умножения вектора на действительное число, называется *n-мерным действительным векторным пространством, или, более полно, n-мерным арифметическим векторным пространством над полем действительных чисел.*

Вектор $0=(0, 0, \ldots, 0)$ называется *нулевым вектором* или *нулем n-мерного векторного пространства.*

По определению вектор $-\boldsymbol{x} \overset{\text{def}}{=} (-1)\boldsymbol{x}$ называют противоположным вектору $\boldsymbol{x}$.

Упражнение 12. Доказать, что если $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ — любые векторы, а числа $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ произвольны, то 1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$; 2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$; 3) $\boldsymbol{x}+0=\boldsymbol{x}$; 4) $1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$; 5) $\lambda(\mu\boldsymbol{x})=(\lambda\mu)\boldsymbol{x}$; 6) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}$; 7) $\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$.

Таким образом, n-мерное арифметическое пространство (см. определение 1 в п. 18.1) превращается в n-мерное арифметическое векторное пространство, если в нем ввести сложение его элементов и умножение их на число согласно определению 31.

В трехмерном случае связь между точками пространства и векторами в нем можно установить (как всегда, считая систему координат фиксированной), сопоставляя каждой точке $M=(x_1, x_2, x_3)$ этого пространства ее радиус-вектор, т. е. вектор $\overrightarrow{OM}=(x_1, x_2, x_3)$. Это сопоставление является взаимно однозначным соответствием между точками трехмерного пространства и векторами в нем.

Иногда n-мерное арифметическое пространство, введенное в определении 1 п. 18.1 в отличие от n-мерного векторного пространства называют *точечным пространством.*

Итак, как n-мерное точечное, так и n-мерное векторное пространство состоят из одних и тех же элементов — из упорядоченных совокупностей n действительных чисел. Поэтому как то, так и другое пространство будет обозначаться одним и тем же символом R^n. Они отличаются друг от друга тем, что в арифметическом n-мерном пространстве вводится понятие расстояния между его элементами (см. определение 1 в п. 18.1), а в n-мерном векторном — определяются операции сложения векторов и умножения их на действительные числа (см. определение 31 этого пункта).

Если через e_k обозначить n-мерный вектор, все координаты которого равны нулю, кроме k-й, равной единице, k — фиксированное натуральное число ($k \in \{1, 2, \ldots, n\}$), то для любого n-мерного вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ справедливо равенство

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n, \tag{18.31}$$

правая часть которого называется разложением вектора $\boldsymbol{x}$ по векторам $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. При этом коэффициенты $x_1, \ldots, x_n$ этого разложения единственны, т. е. однозначно определяются самим вектором $\boldsymbol{x}$, и, следовательно, в силу равенства (18.31) совпадают с его координатами $x_1, \ldots, x_n$.

Векторы $\boldsymbol{e}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ называются *координатными* или *базисными векторами, а их совокупность* $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — *стандартным базисом* пространства R^n (общее определение базиса будет дано в п. 57.2).

Подмножество L векторного пространства R^n называется *подпространством* пространства R^n, если для любых векторов $\boldsymbol{x} \in L$, $\boldsymbol{y} \in L$ и любых чисел $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\mu \in \boldsymbol{R}$ имеет место включение

$$\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y} \in L$$

Определение 32. *Скалярным произведением векторов* $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *и* $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $n > 3$, *называется число, обозначаемое через* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *и определяемое по формуле*

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n. \tag{18.32}$$

Из элементарной математики известно, что формула (18.32) справедлива и при обычном определении скалярного произведения векторов, т. е. и для $n \leqslant 3$.

Всякое n-мерное векторное пространство, в котором введено скалярное произведение, называется *евклидовым*.

Число $\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ называется *длиной вектора* $\boldsymbol{x}$ и обозначается через $|\boldsymbol{x}|$:

$$|\boldsymbol{x}| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{18.33}$$

Очевидно, что для любого вектора $\boldsymbol{x} \in R^n$ и любого числа $\lambda \in \boldsymbol{R}$ имеет место равенство

$$|\lambda\boldsymbol{x}| = |\lambda|\,|\boldsymbol{x}|, \tag{18.34}$$

а из неравенства (18.3) (см. п. 18.1) следует, что для любых $\boldsymbol{x} \in R^n$, $\boldsymbol{y} \in R^n$ выполняется неравенство

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|, \tag{18.35}$$

называемое *неравенством треугольника*.

Из (18.35) следует, что

$$||\boldsymbol{x}| - |\boldsymbol{y}|| \leqslant |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|. \tag{18.36}$$

Действительно, $|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y}|$, поэтому

$$|\boldsymbol{x}| - |\boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|.$$

В силу равноправия $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ имеем также

$$|\boldsymbol{y}|-|\boldsymbol{x}|\leqslant|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|.$$

Из двух последних неравенств и следует (18.36). □

Если $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y}=(x_1, \ldots, y_n)$, то $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=(x_1-y_1, \ldots$ $\ldots, x_n-y_n)$ и поэтому

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}=\rho(x, y), \qquad (18.37)$$

где x и y — точки точечного n-мерного пространства с теми же координатами, что и векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Таким образом, в n-мерном векторном пространстве со скалярным произведением определено расстояние $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ между его элементами, совпадающее с расстоянием $\rho(x, y)$, определенным в п. 18.1. Поэтому все понятия, введенные в п. 18.1 — 18.3 для точечных пространств имеют смысл и для векторных пространств со скалярным произведением.

В качестве примера использования векторной символики отметим, что замкнутый шар $Q^n(x_0, r)$ радиуса r с центром в точке x_0 в векторных обозначениях определяется равенством

$$Q^n(x_0, r)=\{\boldsymbol{x}: |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\leqslant r\},$$

а ограничивающая его $(n-1)$-мерная сфера $S^{n-1}(x_0, r)$ — равенством

$$S^{n-1}(x_0, r)=\{\boldsymbol{x}: |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|=r\}.$$

Скалярное произведение обладает следующими непосредственно проверяемыми свойствами:

1^0. Коммутативность. Для любых $\boldsymbol{x}\in R^n$, $y\in R^n$: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

2^0. Дистрибутивность. Для любых $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{y}\in R^n$, $\boldsymbol{z}\in R^n$: $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

3^0 Однородность. Для любого $\boldsymbol{x}\in R^n$ и любого числа $\lambda\in \boldsymbol{R}: (\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

4^0. Невырожденность. Для любого $\boldsymbol{x}\in R^n$: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\geqslant 0$, причем

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=0.$$

Дистрибутивность и однородность скалярного произведения составляют вместе свойство, называемое *линейностью скалярного произведения*.

Если $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — координатные векторы в R^n, то согласно (18.32)

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)=\begin{cases} 1 \text{ при } i=j, \\ 0 \text{ при } i\neq j, \end{cases} \quad i, j=1, 2, \ldots, n.$$

Поэтому для любого вектора $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ в силу свойств скалярного произведения получим:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)=(x_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+x_n\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_i)=x_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_i)+\ldots+x_n(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_i)=$$
$$=x_i(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i)=x_i, \qquad (18.38)$$

т. е. i-ая координата вектора $\boldsymbol{x}$ равна скалярному произведению $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)$.

Используя обозначение скалярного произведения и длины вектора, неравенство Коши — Шварца (см. (18.2) в п. 18.1) для векторов $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y}=(y_1, \ldots, y_n)$ можно записать в виде

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqslant |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|. \qquad (18.39)$$

Углом φ между векторами $\boldsymbol{x} \in R^n$ и $\boldsymbol{y} \in R^n$, $n > 3$, называется угол φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, определяемый равенством

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}. \qquad (18.40)$$

В силу неравенства Коши — Шварца (18.39) это определение корректно, ибо в силу (18.39) для φ, определяемого формулой (18.40), имеет место неравенство $|\cos\varphi| \leqslant 1$.

Здесь снова, как и в случае определения скалярного произведения за исходное определение принимается высказывание, аналогичное которому в пространстве R^n, $n \leqslant 3$, является доказываемым утверждением. Благодаря этому формулы (18.32) и (18.40) оказываются справедливыми во всех пространствах $\boldsymbol{R}^n$, $n=1, 2, \ldots$

Векторы, скалярное произведение которых равно нулю, называются *ортогональными*.

Вектор единичной длины кратко называют *единичным вектором*.

Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — единичные векторы, то для косинуса угла между ними из формулы (18.40) получаем

$$\cos\varphi = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \quad |\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = 1. \qquad (18.41)$$

Если $\boldsymbol{a}=(a_1, \ldots, a_n)$ — единичный вектор, то обозначая через α_i угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{e}_i$ согласно (18.38) и (18.41) имеем:

$$a_i = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_i) = \cos\alpha_i, \text{ т. е. } \boldsymbol{a} = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n).$$

Косинусы $\cos\alpha_i$, $i=1, \ldots, n$, называются *направляющими косинусами вектора* $\boldsymbol{a}$.

Поскольку $|\boldsymbol{a}|=1$, то в силу (18.33)

$$\cos^2\alpha_1 + \ldots + \cos^2\alpha_n = 1. \qquad (18.42)$$

Если $\boldsymbol{a}$ — не единичный вектор и $\boldsymbol{a} \neq 0$, то, очевидно, вектор $\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ уже единичный, и его направляющие косинусы называются также и направляющими косинусами вектора $\boldsymbol{a}$.

Уравнение прямой в пространстве R^n (см. определение 24 в п. 18.2) в векторной записи имеет вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(0)} + t\boldsymbol{a}, \quad -\infty < t < +\infty, \qquad (18.43)$$
$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \ \boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}), \ \boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$$

(при сложении координат векторов сами векторы также складываются, а при умножении их координат на число они сами умножаются на то же число). Прямая (18.43) называется *прямой, проходящей через* точку $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ точечного пространства в направлении вектора $\boldsymbol{a}$.

Если $\boldsymbol{a}$ — единичный вектор $|\boldsymbol{a}|=1$ и, следовательно, $\boldsymbol{a}= (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$ ($\cos\alpha_i$ — направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a}$; $i=1, 2, \ldots, n$), то прямая (18.43) в координатной записи имеет вид

$$x_i=x_i^{(0)}+t\cos\alpha_i; \quad i=1, 2, \ldots, n; \quad -\infty<t<+\infty. \tag{18.44}$$

Пусть заданы две точки $x'=(x_1', \ldots, x_n')$ и $x''=(x_1'', \ldots, x_n'')$ точечного пространства; обозначим через $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}''$ векторы с теми же координатами. Тогда уравнением прямой, проходящей через точки x' и x'' (см. п. 18.2), в векторной записи будет

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'+(\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}')\,t, \quad -\infty<t<+\infty. \tag{18.45}$$

По аналогии с § 15 можно рассмотреть n-мерную вектор-функцию

$$\boldsymbol{r}(t)=(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad t\in E\subset \boldsymbol{R}$$

($\boldsymbol{R}$ — как всегда, множество всех действительных чисел). Совершенно аналогично тому, как это было сделано в § 15, при любом натуральном n определяются понятия предела, непрерывности и производной вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)\in \boldsymbol{R}^n$. Как и для $n\leqslant 3$ при дифференцировании вектор-функции дифференцируются ее координаты: $\boldsymbol{r}'(t)=(x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$, и утверждение $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=0$ равносильно тому, что $\lim\limits_{t\to t_0}|\boldsymbol{r}(t)|=0$.

§ 19. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

19.1. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В этом параграфе рассматриваются функции, которые определены на множествах n-мерного арифметическвго евклидова пространства R^n и значениями которых являются действительные числа. Таким образом, все функции будут являться функциями точек пространства. Это означает, что если имеется какая-либо функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ и в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ задана система координат $x_1, \ldots, x_n$, то в другой системе координат $\xi_1, \ldots, \xi_n$, связанной с исходной преобразованием

$$x_i=x_i(\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

под той же функцией понимается не $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, а функция

$$f[x_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, x_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)].$$