жаются на то же число). Прямая (18.43) называется *прямой, проходящей через* точку $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ точечного пространства в направлении вектора $\boldsymbol{a}$.

Если $\boldsymbol{a}$ — единичный вектор $|\boldsymbol{a}|=1$ и, следовательно, $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$ ($\cos\alpha_i$ — направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a}$; $i=1, 2, \ldots, n$), то прямая (18.43) в координатной записи имеет вид

$$x_i=x_i^{(0)}+t\cos\alpha_i; \quad i=1, 2, \ldots, n; \quad -\infty<t<+\infty. \tag{18.44}$$

Пусть заданы две точки $x'=(x_1', \ldots, x_n')$ и $x''=(x_1'', \ldots, x_n'')$ точечного пространства; обозначим через $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}''$ векторы с теми же координатами. Тогда уравнением прямой, проходящей через точки x' и x'' (см. п. 18.2), в векторной записи будет

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'+(\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}')\,t, \quad -\infty<t<+\infty. \tag{18.45}$$

По аналогии с § 15 можно рассмотреть n-мерную вектор-функцию

$$\boldsymbol{r}(t)=(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad t\in E\subset \boldsymbol{R}$$

($\boldsymbol{R}$ — как всегда, множество всех действительных чисел). Совершенно аналогично тому, как это было сделано в § 15, при любом натуральном n определяются понятия предела, непрерывности и производной вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)\in \boldsymbol{R}^n$. Как и для $n\leqslant 3$ при дифференцировании вектор-функции дифференцируются ее координаты: $\boldsymbol{r}'(t)=(x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$, и утверждение $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=0$ равносильно тому, что $\lim\limits_{t\to t_0}|\boldsymbol{r}(t)|=0$.

§ 19. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

19.1. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В этом параграфе рассматриваются функции, которые определены на множествах n-мерного арифметическвго евклидова пространства R^n и значениями которых являются действительные числа. Таким образом, все функции будут являться функциями точек пространства. Это означает, что если имеется какая-либо функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ и в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ задана система координат $x_1, \ldots, x_n$, то в другой системе координат $\xi_1, \ldots, \xi_n$, связанной с исходной преобразованием

$$x_i=x_i(\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

под *той же функцией* понимается не $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, а функция

$$f[x_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, x_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)].$$

Рассматриваемые функции будут обозначаться либо одной буквой, например f, либо более подробно, с указанием аргумента, через $f(x)$ или $f(x_1, \dots, x_n)$. При $n > 1$ они называются *функциями многих переменных*. В случае $n = 2$ вместо $f(x_1, x_2)$ будем писать также $f(x, y)$, в случае $n = 3$ вместо $f(x_1, x_2, x_3)$ — также $f(x, y, z)$.

Каждой функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n переменных $x_1, x_2, \dots$ $\dots, x_n$ соответствует ее график в n-мерном пространстве точек $(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$. Определим это понятие для рассматриваемого здесь случая.

Определение 1. *Пусть на множестве E евклидова пространства R^n определена функция $y = f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$, и пусть R_{xy}^{n+1} — $(n+1)$-мерное евклидово пространство точек $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y)$. Множество точек пространства R_{xy}^{n+1} вида $(x, f(x)) = (x_1, \dots, x_n, f(x))$, где $x \in E$, называется графиком функции f.*

График функции многих переменных, так же как и график функции одной переменной, удобно использовать для геометрической интерпретации вводимых понятий и доказываемых утверждений. Конечно изображение графика на чертеже в случае, когда число независимых переменных больше единицы, сложнее, чем в одномерном случае. На рис. 86 изображен вид графика функции двух переменных $y = f(x_1, x_2)$.

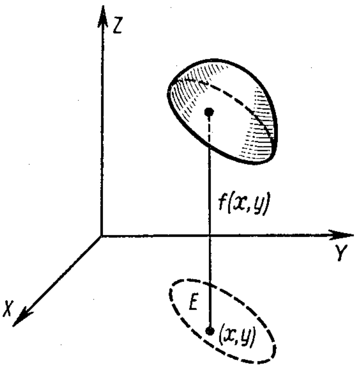

Рис. 86

Сформулированное здесь определение графика функции n переменных является частным случаем общего определения графика функции, сформулированного в п. 1.2*.

Пусть снова функция f определена на множестве $E \subset R^n$. Множество точек $x = (x_1, \dots, x_n)$ пространства R^n удовлетворяющих уравнению

$$f(x_1, \dots, x_n) = c,$$

где c — некоторая постоянная, называется *множеством уровня* функции f, соответствующим данному значению c.

В случае $n = 2$ множество уровня называется также *линией уровня*, в случае $n = 3$ — *поверхностью уровня*, а при $n > 3$ — *гиперповерхностью уровня*.

19.2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определим понятие предела функции многих переменных.

Определение 2. *Пусть функция f определена на множестве $X_f \subset R^n$, E — некоторое подмножество множества X_f и $x^{(0)}$ — предельная точка множества E.*

Число a называется пределом функции f по множеству E в точке $x^{(0)}$ (или при x, стремящемся к $x^{(0)}$), если для любой последовательности точек

$$x^{(m)} \in E, \quad x^{(m)} \neq x^{(0)}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

такой, что $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x^{(0)}$ числовая последовательность $\{f(x^{(m)})\}$ сходится к числу a,

$$\lim_{m \to \infty} f(x^{(m)}) = a.$$

В этом случае будем писать

$$\lim_{x \to x^{(0)},\ x \in E} f(x) = a.$$

При сделанных предположениях можно дать и другое, эквивалентное предыдущему определение предела функции многих переменных по аналогии с тем, как это было сделано раньше для функции одной переменной (см. п. 4.4 и п. 4.5).

Определение 3. *Пусть $x^{(0)}$ является предельной точкой множества E содержащегося в области определения X_f функции f.*

Число a называется пределом функции f по множеству E в точке $x^{(0)}$ (или, что то же, при x, стремящемся к $x^{(0)}$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой точки $x \in E$, $x \neq x^{(0)}$, $\rho(x_1, x^{(0)}) < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Совершенно аналогично случаю функции одной переменной доказывается эквивалентность определений 2 и 3.

Иногда наряду с обозначением $\lim\limits_{x \to x^{(0)},\ x \in E} f(x)$ применяется равносильное обозначение $\lim\limits_{\rho(x,\ x^{(0)}) \to 0,\ x \in E} f(x)$

Упражнения. 1. Доказать эквивалентность двух приведенных определений предела функции многих переменных по множеству.

2. По аналогии со случаем функции одной переменной сформулировать и доказать критерий Коши существования предела функции многих переменных.

Употребляя термин сужения функции (см. п. 4.1), можно сказать, что существование предела функции и его значение в точке $x^{(0)}$ не зависят от выбора сужения функции на пересечении какой-либо окрестности точки $x^{(0)}$ с областью определения данной функции, т. е. в конечном итоге не зависят от выбора указанной окрестности. Точная формулировка этого утверждения состоит в следующем: если функция f, определенная на множестве X_f, имеет предел по множеству $E \subset X_f$ в предельной точке $x^{(0)}$ этого множества, то для любой окрестности $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$ функция f имеет предел в точке $x^{(0)}$ по множеству $E \cap U(x^{(0)})$; при этом, если указанные пределы существуют, то они совпадают

$$\lim_{x \to x^{(0)},\ x \in E} f(x) = \lim_{x \to x^{(0)},\ x \in E \cap U(x^{(0)})} f(x);$$

если же функция f имеет предел в точке $x^{(0)}$ по множеству $E \cap U(x_0)$ хотя бы для одной окрестности $U(x_0)$, то она имеет предел в этой точке и по множеству E. Все это совсем легко проверить и поэтому может быть самостоятельно проделано читателем.

Свойство функции, не зависящее от выбора достаточно малой окрестности, содержащей данную точку, называется *локальным свойством функции* в этой точке. Очевидно, существование предела функции и его значение в некоторой точке (если он, конечно, существует) являются локальными свойствами функции в этой точке.

Из определения предела функции следует также, что существование предела функции в точке $x^{(0)}$ (по некоторому множеству), а если он существует, то и его значение, не зависят от значения самой функции в точке $x^{(0)}$ (если она определена в этой точке).

При определении предела функции многих переменных так же, как и в случае одной переменной, удобно использовать понятие проколотой окрестности, т. е. окрестности точки, из которой удалена сама эта точка: если $U(x^{(0)})$ — окрестность точки $x^{(0)}$, то множество

$$\mathring{U}(x^{(0)}) \stackrel{\text{def}}{=} U(x^{(0)}) \setminus \{x^{(0)}\}$$

называется *проколотой окрестностью* точки $x^{(0)}$.

Определение 4. *Если функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, то предел функции f в точке $x^{(0)}$ по этой проколотой окрестности называется просто пределом функции в точке f и обозначается через* $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$.

Определение 5. *Пусть через точку $x^{(0)}$ проведена прямая l* (см. определение 24 в п. 18.2) *и $\mathring{U}(x^{(0)})$ — некоторая проколотая окрестность точки $x^{(0)}$. Предел функции f в точке $x^{(0)}$ по пересечению $\mathring{U}(x^{(0)}) \cap l$ называется пределом функции f в точке $x^{(0)}$ в направлении прямой l.*

Определение 6. *Если множество E* (см. определение 2) *является множеством точек некоторой кривой, проходящей через $x^{(0)}$, то в этом случае предел функции f по множеству E при x, стремящемся к $x^{(0)}$, называется пределом функции по данной кривой в точке $x^{(0)}$.*

Очевидно, что если у функции f существует предел в точке x_0, то он существует в этой точке и по любому направлению и по любой кривой, причем все эти пределы совпадают.

Пример. Пусть $f(x, y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$. Эта формула задает функцию во всех точках плоскости, кроме начала координат (0, 0). Исследуем пределы этой функции по различным направлениям в точке (0, 0). Уравнение прямой, проходящей через начало координат (0, 0) в направлении вектора (α, β), имеет вид $x=\alpha t$, $y=\beta t$, $\alpha^2+\beta^2>0$. Имеем: $f(\alpha t, \beta t)=\frac{\alpha^2\beta t}{\alpha^4t^2+\beta}\to 0$ при $t\to 0$, т. е. предел по любому направлению существует и равен нулю. Если же $y=x^2$, то $f(x, x^2)\equiv\frac{1}{2}$, и, значит, предел вдоль параболы $y=x^2$ также существует, но равен 1/2.

Таким образом, для рассмотренной функции существует один и тот же предел по любому направлению, а предел по указанной параболе, хотя и существует, отличен от общего значения пределов по направлениям, тем самым просто предел в точке (0, 0) не существует.

Упражнение 3. Исследовать пределы по направлению в точке (0, 0) функции $f(x, y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$.

Аналогично случаю функций одного переменного для пределов функций многих переменных по множеству имеют место соответствующие теоремы о пределах суммы, произведения и частного, так как в силу приведенного выше определения, предел функции n переменных по множеству также сводится к понятию предела последовательности (см. п. 4.7).

Наряду с указанными пределами у функций многих переменных можно рассматривать и пределы других видов, связанные с последовательным переходом к пределу, например по различным координатам, т. е. пределы вида

$$\lim_{x_{i_1}\to x_{i_1}^{(0)}}\ \lim_{x_{i_2}\to x_{i_2}^{(0)}}\ \ldots \lim_{x_{i_n}\to x_{i_n}^{(0)}} f(x_1, \ldots, x_n),$$

где $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$, $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, а функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки $x^{(0)}$.

Пределы указанного вида называются *повторными пределами*. Они представляют собой специфику функций многих переменных.

Рассмотрим определенную на всей плоскости функцию

$$f(x, y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0 \text{ и } y\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0 \text{ или } y=0.\end{cases}$$

Исследуем различные ее пределы в точке (0, 0).

Очевидно, $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y)=0$. Что же касается повторных пределов

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y}+\lim_{x\to 0} y\sin\frac{1}{x}\right] \text{ и } \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}+\lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{x}\right],$$

то они не существуют, так как не существуют даже пределы

$$\lim_{x\to 0} y\sin\frac{1}{x}\ (y\neq 0) \quad \text{и} \quad \lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y} \qquad (x\neq 0).$$

Для функции же $f(x,\ y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, определенной этой формулой на всей плоскости, кроме начала координат, оба повторных предела в точке $(0, 0)$, существуют, и $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,\ y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,\ y)=0$. Однако предела функции f в точке $(0,\ 0)$ не существует, ибо, как легко видеть, предел вдоль координатных осей равен нулю, а вдоль прямой $y=x$ он равен $1/2$.

Таким образом, из одного лишь существования предела функции в данной точке не следует существования повторных пределов в этой точке, и наоборот, из существования повторных пределов не следует существования предела в соответствующей точке. Тем не менее определенная связь между этими понятиями может быть установлена.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,\ y)$ определена на множестве E, содержащем все точки некоторой прямоугольной окрестности $P((x_0,\ y_0);\ \delta_1,\ \delta_2)$ точки $(x_0,\ y_0)$, кроме, быть может, точек прямых $x=x_0$ и $y=y_0$. Если существует предел функции f в точке $(x_0,\ y_0)$ по множеству E и при любом $y\in(y_0-\delta_2,\ y_0+\delta_2)$, $y\neq y_0$, существует предел* *)

$$\lim_{x\to x_0} f(x,\ y)=g(y), \tag{19.1}$$

то повторный предел $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\ y)$ существует, и

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,\ y)=\lim_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0),\ (x,\ y)\in E} f(x,\ y). \tag{19.2}$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0),\ (x,\ y)\in E} f(x,\ y)=A$ и пусть фиксировано произвольное $\varepsilon>0$. Существует прямоугольная окрестность $P=P((x_0,\ y_0);\ \eta_1,\ \eta_2)$, $0<\eta_1<\delta_1$, $0<\eta_2<\delta_2$, такая, что если $0<|x-x_0|<\eta_1$, $0<|y-y_0|<\eta_2$, то

$$|f(x,\ y)-A|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{19.3}$$

---

*) Как всегда, под пределами, если не оговорено что-либо другое, понимаются конечные пределы.

В силу существования предела (19.1) для любого числа y, такого, что $0<|y-y_0|<\eta_2$, из (19.3) следует, что

$$|g(y)-A|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

(для этого достаточно перейти к пределу при $x\to x^{(0)}$ в равенстве (19.3)), а это и означает, что $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=A$. $\square$

Пример. Рассмотрим функцию $f(x, y)=x\sin\frac{1}{y}$, $y\neq 0$. Эта функция определена во всей плоскости, кроме точек оси x-ов. Обозначим ее область определения через E. Очевидно, существуют пределы

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0),\ x\in E} f(x,\ y)=0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0} f(x,\ y)=0, \qquad y\neq 0;$$

поэтому, согласно доказанной теореме, существует и повторный предел $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,\ y)=0$. Это конечно, ясно и непосредственно. Заметим, что другой повторный предел $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,\ y)$ в этом случае не существует.

Как и для случая функций одной переменной, для функций $f(x)$ многих переменных можно определить предел $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, т. е. предел, когда точка $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ неограниченно удаляется от начала координат, иначе говоря, когда $\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\to+\infty$, а также повторный предел по переменным $x_i\to\infty$ и $x_j\to\infty$ ($i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$). Отметим, что и в этом случае имеет место утверждение, аналогичное теореме 1. Можно ввести и понятие бесконечных пределов. Мы всего этого делать не будем, предоставляя это проделывать читателю по мере потребности.

Замечание 1. В дальнейшем будут рассматриваться композиции функций многих переменных. Для сложных функций многих переменных справедлив аналог правила замены переменного для пределов функций, установленного ранее для функций одного переменного (см. п. 4.8*). Его формулировку и доказательство (также аналогичное одномерному случаю) предоставляем читателю.

Замечание 2. Данное в настоящем параграфе определение предела функции расширяет это понятие и для функций одного переменного. Определение предела функции, сформулированное в п. 4.4 и в п. 4.5, является определением предела по интервалу (т. е. когда множество E в определении 2 этого пункта является интервалом). Конечно, и в случае функций одной переменной можно рассматривать пределы по произвольным множествам. В качестве примера рассмотрим функцию Дирихле (см. п. 4.2).

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рациональное,}\\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное.}\end{cases}$$

Для предела в нуле по множеству рациональных чисел и по множеству иррациональных чисел имеем соответственно

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1, \quad \lim_{x\to 0} f(x)=0.$$

Замечание 3. Если множество $X\subset R^2$, на котором определена функция $f: X\to R$, состоит только из точек x, координаты которых суть натуральные числа: $x=(m, n)$, $m\in \mathbf{N}$, $n\in \mathbf{N}$, то функция f называется *двойной последовательностью* и ее значение $y=f(m, n)$ обозначается через y_{mn}, а сама последовательность — через $\{y_{mn}\}$.

Для двойных последовательностей $\{y_{mn}\}$ можно рассматривать предел $\lim\limits_{(m,\, n)\to\infty} y_{mn}$ (см. п. 38.1) и повторные пределы

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} y_{mn}, \quad \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty} y_{mn}.$$

Пример. Пусть $y_{mn}=\cos^m 2\pi n!x$, $m\in \mathbf{N}$, $n\in \mathbf{N}$, $x\in \mathbf{R}$; тогда

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\cos^m 2\pi n!x = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное число.}\end{cases}$$

Действительно, если $x=p/q$, $p\in \mathbf{Z}$, $q\in \mathbf{Z}$, $q>0$, то при $n\in \mathbf{N}$, $n\geqslant q$, имеет место равенство $\cos 2\pi n!\,x=1$ и, следовательно, $\lim\limits_{m\to+\infty}\cos^m 2\pi n!\,x=1$, $n\geqslant q$, а поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{m\to+\infty}\cos^m 2\pi n!\,x=1$. Если же число x иррационально, то при любом натуральном n справедливо неравенство $|\cos 2\pi n!\,x|<1$, из которого и вытекает, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{m\to+\infty}\cos^m 2\pi n!\,x=0$. □

В результате нами получено аналитическое задание функции Дирихле (см. замечание 2):

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\cos^m 2\pi n!x, \qquad x\in \mathbf{R}.$$

19.3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Определение 7. *Функция f, определенная на множестве $E\subset R^n$, называется непрерывной в точке $x^{(0)}\in E$ по множеству E, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех $x\in E$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x^{(0)})<\delta$, выполняется неравенство*

$$|f(x)-f(x^{(0)})|<\varepsilon. \tag{19.4}$$

Заметим, что это определение в случае $n=1$ шире соответствующего определения непрерывности, данного в п. 5.1, так как мы здесь не предполагаем, что функция f определена обязательно в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$.

Определение непрерывности, данное здесь (в отличие от сформулированного в п. 19.2 определения предела), не предполагает и того, что точка $x^{(0)}$ является предельной для множества E. Точка $x^{(0)}$ может быть и изолированной; при этом в изолированной точке множества E функция f всегда непрерывна, ибо в этом случае в качестве $\delta > 0$, участвующего в определении непрерывности, всегда можно взять такое δ, что окрестность $U(x^{(0)}; \delta)$ не содержит других точек множества E, кроме самой точки $x^{(0)}$, а для точки $x = x^{(0)}$ условие (19.4), очевидно, выполняется при любом $\varepsilon > 0$.

Например, раньше для элементарной функции $y = \sqrt{\ln \cos 2\pi x}$, определенной лишь для целочисленных значений $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, мы не могли говорить о ее непрерывности, так как множество, на котором она определена, состоит только из изолированных точек. В смысле же определения 7 эта функция непрерывна во всех точках ее области задания.

Если же точка $x^{(0)}$ является предельной для множества E, то данное определение непрерывности функции f в точке $x^{(0)}$ по множеству E эквивалентно условию

$$\lim_{x \to x^{(0)},\ x \in E} f(x) = f(x^{(0)}). \tag{19.5}$$

Из сказанного следует, что если функция f, определенная на множестве E, непрерывна в точке $x^{(0)} \in E$ по множеству E, то либо $x^{(0)}$ является предельной точкой множества E и тогда выполняется условие (19.5), либо $x^{(0)}$ является изолированной точкой.

Если в равенстве (19.5) перенести $f(x^{(0)})$ в левую часть и положить $\Delta y = f(x) - f(x^{(0)})$, то условие (19.5) перепишется в виде

$$\lim_{\rho(x,\ x^{(0)}) \to 0,\ x \in E} \Delta y = 0.$$

Число Δy называется приращением функции в точке $x^{(0)}$, соответствующим изменению аргумента от точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ до точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Так как $\rho(x, x^{(0)}) = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$, где $\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \ldots n$, то непрерывность функции f в точке $x^{(0)}$ по множеству E означает, что ее приращение Δy в этой точке стремится к нулю, когда приращения Δx_i всех ее аргументов одновременно стремятся к нулю, (т. е. таким образом, когда $\rho(x, x^{(0)}) \to 0$).

Можно, конечно, сформулировать понятие непрерывности функции и на языке последовательностей.

Функция $f(x)$, определенная на множестве E, непрерывна по этому множеству в точке $x^{(0)} \in E$ в том и только в том случае, когда для любой последовательности точек $x^{(k)} \in E$, $k = 1, 2, \ldots,$

$$\lim_{x \to \infty} f(x^{(k)}) = f(x^{(0)}). \tag{19.6}$$

Действительно, точка $x^{(0)}$ является либо предельной точкой множества E, либо его изолированной точкой. В случае, когда $x^{(0)}$ — предельная точка множества E, равенство (19.6) равносильно равенству (19.5) в силу определения предела функции. Если же $x^{(0)}$ является изолированной точкой, то, как это отмечалось выше, в этой точке функция $f(x)$ всегда непрерывна. С другой стороны, поскольку в этом случае существует окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, в которой не содержится точек множества E, кроме самой точки $x^{(0)}$, и поскольку последовательность точек $x^{(k)} \in E$, $k=1, 2, \ldots$ сходится к точке $x^{(0)}$, то в указанной окрестности содержатся все точки этой последовательности, начиная с некоторого номера $k_0: x^{(k)} \in U(x^{(0)})$, $k \geqslant k_0$, что возможно лишь когда $x^{(k)} = x^{(0)}$, $k \geqslant k_0$. Очевидно, что в этом случае равенство (19.6) также справедливо. $\square$

Когда говорят, что функция f определена на множестве E, это означает, что она заведомо определена во всех точках этого множества, но не исключает того, что она может быть определена и на некотором большем множестве $D \supset E$. Может, конечно, случиться, что функция f будет непрерывной в какой-то точке $x^{(0)} \in E$ по множеству E и не будет непрерывной в этой точке по множеству D (например, функция Дирихле, см. п. 4.2 и 19.2, непрерывна в точке $x=0$ по множеству рациональных чисел и не является непрерывной в этой точке по множеству всех действительных чисел). Поэтому слова «по множеству E» в определении непрерывности существенны. Впрочем, иногда в случаях, когда это не может привести к недоразумениям, они опускаются.

Лемма 1. *Если функция f определена на множестве $E \subset R^n$ и непрерывна в точке $x^{(0)} \in E$ по этому множеству, причем $f(x^{(0)}) \neq 0$, то существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что для всех $x \in U(x^{(0)}) \cap E$ справедливы неравенства*

$$f(x) > \frac{f(x^{(0)})}{2}, \quad \text{если} \quad f(x^{(0)}) > 0,$$

и

$$f(x) < \frac{f(x^{(0)})}{2}, \quad \text{если} \quad f(x^{(0)}) < 0,$$

в частности, во всех точках множества $U(x^{(0)}) \cap E$ значения функции $f(x)$ имеют тот же знак, что и $f(x_0)$.

Следствие. *Если функция f непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству $E \subset R^n$ и $f(x^{(0)}) > c$ (соответственно, $f(x^{(0)}) < c$), то существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что для любых $x \in U(x^{(0)}) \cap E$ выполняется неравенство $f(x) > c$ (соответственно $f(x) < c$).*

Доказательство леммы. Пусть $\varepsilon = \frac{|f(x^{(0)})|}{2}$, тогда в силу непрерывности функции f в точке $x^{(0)}$ по множеству E существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in U(x^{(0)}; \delta) \cap E$ справедливо неравенство $|f(x)-f(x^{(0)})|<\varepsilon=\frac{|f(x^{(0)})|}{2}$, и поэтому

$$f(x^{(0)})-\frac{|f(x^{(0)})|}{2}<f(x)<f(x^{(0)})+\frac{|f(x^{(0)})|}{2}.$$

Если $f(x^{(0)})>0$, то $f(x^{(0)})-\frac{|f(x^{(0)})|}{2}=\frac{f(x^{(0)})}{2}$ и, следовательно, $f(x)>\frac{f(x^{(0)})}{2}$; если же $f(x^{(0)})<0$, то

$$f(x^{(0)})+\frac{|f(x^{(0)})|}{2}=\frac{f(x^{(0)})}{2} \text{ и, следовательно } f(x)<\frac{f(x^{(0)})}{2}. \ \square$$

Чтобы получить утверждение следствия достаточно применить лемму к функции $g(x)\overset{\text{def}}{=}f(x)-c$.

Совершенно аналогично случаю $n=1$ доказывается, что, *если функции f и g непрерывны в точке $x^{(0)}$ множества E, то функции $f+g$, cf (c — постоянная), fg, а если $g(x^{(0)})\neq 0$, то и f/g также непрерывны в точке $x^{(0)}$.*

Для функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n>1$, наряду с их непрерывностью в вышеопределенном смысле, которую называют также *непрерывностью по совокупности переменных* $x_1, \ldots, x_n$, можно рассматривать и непрерывность по отдельным переменным x_i.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенная в некоторой окрестности точки $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, называется *непрерывной в точке $x^{(0)}$ по переменной x_i*, если функция

$$\varphi(x_i)\overset{\text{def}}{=}f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$$

одной переменной x_i непрерывна в точке $x_i^{(0)}$.

Отметим, что из непрерывности функции по всем переменным в отдельности не следует ее непрерывность по совокупности. Например, функция

$$f(x, y)=\begin{cases} xy/(x^2+y^2), & \text{если } x^2+y^2>0, \\ 0, & \text{если } x=y=0 \end{cases}$$

непрерывна по каждой переменной x и y в отдельности в каждой точке плоскости, но не непрерывна по их совокупности в точке $(0, 0)$, так как не имеет в этой точке даже предела (проверьте это).

19.4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ КОМПОЗИЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть на некотором множестве $E_t\subset R^k$ задана система n функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\ldots$, $\varphi_n(t)$, $t=(t_1, \ldots, t_k)\in E_t$ и пусть на некотором множестве $E_x\subset R^n$ задана функция $f(x)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)\in E_x$.

Если $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))\in E_x$ для любой точки $t\in E_t$, то имеет смысл говорить о сложной функции $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, т. е. функции, ставящей в соответствие каждой точке $t\in E_t$

число $f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$. Функция $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ называется также *композицией* функций f и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Теорема 2. *Пусть имеет смысл сложная функция $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Если функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ непрерывны в точке $t^{(0)} \in E_t \subset R^k$ по множеству E_t, а функция f непрерывна в точке $x^{(0)} = (\varphi_1(t^{(0)}), \ldots, \varphi_n(t^{(0)})) \in E_x \subset R^n$ по множеству E_x, то сложная функция $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ непрерывна в точке $t^{(0)}$ по множеству E_t.*

Доказательство. В силу непрерывности функции f в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ по множеству E_x для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon \tag{19.7}$$

для всех точек $x \in P(x^{(0)}; \eta) \cap E_x$ *), т. е. для всех точек $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_x$, для которых

$$|x_i - x_i^{(0)}| < \eta, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{19.8}$$

В силу же непрерывности по множеству E_t в точке $t^{(0)}$ каждой из функций φ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, для указанного $\eta > 0$ существуют такие $\delta_i = \delta_i(\eta) > 0$, что для всех $t \in E_t \cap U(t^{(0)}; \delta_i)$ выполняется неравенство

$$|\varphi_i(t) - \varphi_i(t^{(0)})| < \eta. \tag{19.9}$$

Обозначим через δ наименьшее из чисел δ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для всех $t \in E_t \cap U(t^{(0)}; \delta)$ и всех $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняется неравенство (19.9), т. е. неравенство (19.8), где

$$x_i = \varphi_i(t), \quad x_i^{(0)} = \varphi_i(t^{(0)}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

По условиям теоремы имеет смысл сложная функция $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, т. е. при $t \in E_t$ выполняется включение $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in E_x$, а следовательно, в силу (19.9) при $t \in E_t \cap U(t^{(0)}; \delta)$ — включение $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in P(x^{(0)}; \eta) \cap E_x$. Поэтому для всех $t \in E_t \cap U(t^{(0)}; \delta)$ выполняется условие

$$|f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon,$$

где $x = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $x^{(0)} = (\varphi_1(t^{(0)}), \ldots, \varphi_n(t^{(0)}))$. Это и означает непрерывность сложной функции $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ в точке $t^{(0)}$. $\square$

Как видно из проведенных рассуждений, доказательство теоремы 2 по идее повторяет доказательство соответствующей теоремы для $n = 1$ (см. п. 5.2).

Замечание. Если функции $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, определенные на множестве $E_t \subset R^k$, непрерывны по этому множеству E_t в точке $t^{(0)} \in E_t \subset R^k$, а функция f определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (\varphi_1(t^{(0)}), \ldots, \varphi_n(t^{(0)}))$, то существует такая окрест-

*) Здесь удобнее воспользоваться кубической окрестностью $P(x^{(0)}; \eta)$, чем сферической.

ность $U(t^{(0)})$ точки $t^{(0)}$, что для всех $t \in U(t^{(0)}) \cap E_t$ имеет смысл композиция $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

В силу этого, когда функция f определена на множестве, содержащем некоторую окрестность точки $x^{(0)}$, то требование существования композиции $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ в условиях теоремы 2 можно отбросить.

Действительно, если функция f определена в какой-то окрестности точки $x^{(0)}$, то существует и прямоугольная окрестность $P(x^{(0)}; \eta)$ этой точки, в которой функция f также определена. В качестве же искомой окрестности точки $t^{(0)}$ можно взять δ-окрестность этой точки, построенную при доказательстве теоремы 2. В самом деле, если $t \in U(t^{(0)}; \delta) \cap E_t$, то, согласно неравенству (19.9), получим $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in P(x^{(0)}; \eta)$, следовательно, сложная функция определена на $U(t^{(0)}; \delta) \cap E_t$. $\square$

С помощью теоремы 2 можно легко установить непрерывность функций, большей частью встречающихся на практике, а именно так называемых элементарных функций многих переменных.

Определение 8. *Функции, получающиеся из переменных $x_1, \ldots, x_n$ с помощью конечного числа композиций элементарных функций одного переменного, операций сложения, умножения и деления, называются элементарными функциями переменных $x_1, \ldots, x_n$.*

Например, функция $f(x, y) = xe^{y \sin \frac{xy}{x+y}}$ является элементарной функцией двух переменных x и y. Действительно,

$$f(x, y) = xw, \quad w = e^v, \quad v = yz, \quad z = \sin t, \quad t = \alpha/\beta, \quad \alpha = xy, \quad \beta = x + y.$$

Из теоремы 2 и сохранения непрерывности в соответствующих точках при арифметических операциях над непрерывными функциями (см. п. 19.3) следует, что *всякая элементарная функция любого числа переменных непрерывна в каждой точке области своего определения.*

19.5. ТЕОРЕМЫ О ФУНКЦИЯХ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА МНОЖЕСТВАХ

Функция f называется *непрерывной на множестве E*, если она непрерывна по этому множеству в каждой его точке. Иногда в этом случае говорят также, что функция f *непрерывна во множестве E*.

Докажем ряд теорем о функциях, непрерывных на множествах. Эти теоремы доказываются аналогично соответствующим теоремам для функций одного переменного. Мы рассмотрим их при достаточно общих предположениях, это позволит более глубоко выяснить, с чем связаны рассматриваемые свойства непрерывных функций. Начнем с обобщения теоремы Вейерштрасса (см. п. 6.1) на многомерный случай. Определение ряда понятий, которые будут рассматриваться ниже, как, например, ограниченность функции, верхняя и нижняя грани функции и т. п. — см. в п. 4.1.

Теорема 3. *Всякая функция, непрерывная на компакте, ограничена на нем и достигает своей верхней и своей нижней грани* *).

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на компакте $A \subset R^n$ и пусть $M = \sup\limits_A f$. Выберем по аналогии с одномерным случаем (см. доказательство теоремы 1 в п. 6.1) последовательность таких чисел a_m, что $\lim\limits_{m \to \infty} a_m = M$ и $a_m < M$, $m = 1, 2, \dots$.

Для каждого $m = 1, 2, \dots$ существует такая точка $x^m \in A$, что $f(x^{(m)}) > a_m$. Поскольку множество A — компакт, то из последовательности $\{x^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$, предел $x^{(0)}$ которой лежит в A: $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(m_k)} = x^{(0)} \in A$.

Для любого $k = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство $a_{m_k} < f(x^{(m_k)}) \leqslant M$. Переходя в нем к пределу при $k \to \infty$, получим $\lim\limits_{k \to \infty} f(x^{(m_k)}) = M$. В силу же непрерывности функции f в точке $x^{(0)}$ по множеству A имеем $\lim\limits_{k \to \infty} f(x^{(m_k)}) = f(x^{(0)})$, и, следовательно, $M = f(x^{(0)})$.

Таким образом, верхняя грань функции f конечна, и поэтому функция f ограничена сверху; кроме того, эта верхняя грань достигается в точке $x^{(0)} \in A$. Аналогично доказывается, что функция f ограничена снизу и что ее нижняя грань достигается в некоторой точке множества A. $\square$

Перейдем теперь к рассмотрению обобщения теоремы Коши о промежуточных значениях (см. п. 6.2) для случая функций многих переменных.

Теорема 4. *Пусть функция f определена и непрерывна в области $G \subset R^n$, тогда, принимая какие-либо два значения в G, функция f принимает в G и любое значение, заключенное между ними.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна в области $G \subset R^n$, пусть $x^{(1)} \in G$, $x^{(2)} \in G$, $f(x^{(1)}) = a$, $f(x^{(2)}) = b$ и, например, $a < b$. Пусть далее, c — какое-либо число, такое, что $a < c < b$. Согласно определению области (см. определения 25 и 26 в п. 18.2), существует такая кривая $x(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, что $x(\alpha) = x^{(1)}$, $x(\beta) = x^{(2)}$ и $x(t) \in G$ при всех $t \in [\alpha, \beta]$.

Если $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, то, по определению кривой, функции $x_i(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$. Согласно же теореме 2 о суперпозиции непрерывных функций многих переменных, функция $f(x(t)) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ также непрерывна на

---

*) Иначе говоря, функция, непрерывная на компакте, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

отрезке $[\alpha, \beta]$. Так как $f(x(\alpha))=a$, $f(x(\beta))=b$ и $a<c<b$, то согласно теореме Коши (см. п. 6.2), существует точка $t_0 \in (\alpha, \beta)$ такая, что $f(x(t_0))=c$. Полагая $x^{(0)}=x(t_0)$, имеем $x^{(0)} \in G$ и $f(x^{(0)})=c$. $\square$

Следствие. *Функция f, определенная и непрерывная в замкнутой области $\bar{G}$, принимая какие-либо два значения, принимает в G и любое промежуточное.*

Доказательство. Пусть G — область, функция f определена и непрерывна на ее замыкании $\bar{G}$, $x^{(1)} \in \bar{G}$, $x^{(2)} \in \bar{G}$, $f(x^{(1)})= = a$, $f(x^{(2)})=b$ и пусть для определенности $a<c<b$. Докажем, что существует точка $\zeta \in G$, такая, что $f(\zeta)=c$.

Возьмем число $\varepsilon>0$, определяемое равенством

$$\varepsilon=\min\{c-a,\ b-c\}.$$

В силу непрерывности функции f в точке $x^{(1)}$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что если $x \in U(x^{(1)};\ \delta) \cap \bar{G}$, то $|f(x)-f(x^{(1)})|<\varepsilon$ и, значит, $|f(x)-a|<c-a$ в частности, $f(x)<c$. Точка $x^{(1)} \in \bar{G}$, т. е. точка $x^{(1)}$ является точкой прикосновения множества G, поэтому в окрестности $U(x^{(1)};\ \delta)$ заведомо существует точка, принадлежащая G; обозначим ее $y^{(1)}$. Таким образом, $y^{(1)} \in \in U(x^{(1)};\ \delta) \cap G$, и поэтому $f(y^{(1)})<c$. Аналогичным методом доказывается существование точки $y^{(2)} \in G$, такой, что $f(y^{(2)})>c$. Из существования в области G точек $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ с указанным свойством в силу теоремы 4 вытекает существование в G точки ζ такой, что $f(\zeta)=c$. $\square$

Отметим, что ни при доказательстве самой теоремы 4, ни при доказательстве ее следствия не использовалось то, что множество G открыто. Использовалось лишь то, что любые две его точки можно соединить кривой, принадлежащей самому множеству, т. е. что оно линейно связно.

Упражнение 4. Пусть функция f непрерывна и принимает значения разных знаков на открытом множестве. Доказать, что множество точек, в которых $f \neq 0$ является открытым множеством, но не является областью.

Задача 16. Построить пример области G, в замыкании $\bar{G}$ которой не существуют две точки, не соединяемые в $\bar{G}$ непрерывной кривой.

19.6. РАВНОМЕРНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ. МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Наряду с понятием непрерывности функции в точке в математическом анализе большую роль играет так называемое понятие равномерной непрерывности функции на множестве.

Определение 9. *Функция $f(x)$, определенная на множестве $E \subset R^n$, называется равномерно непрерывной на E, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любых двух точек*

$x \in E$, $x' \in E$, удовлетворяющих условию

$$\rho(x, x') < \delta, \tag{19.10}$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{19.11}$$

Отметим, что если функция f равномерно непрерывна на множестве E, то она и просто непрерывна на E, т. е. непрерывна в каждой точке $x^{(0)} \in E$. Чтобы в этом убедиться, достаточно, например, в (19.10) и (19.11) положить $x' = x^{(0)}$.

Если же функция f непрерывна в каждой точке $x \in E$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует лишь $\delta = \delta(\varepsilon; x)$ такое, что для всех $x' \in E$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x') < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. В этом случае выбор δ зависит не только от ε, но, вообще говоря, и от точки x.

Подчеркнем, что в случае, когда функция f равномерно непрерывна на множестве E, выбор соответствующего δ зависит только от ε и не зависит от выбора рассматриваемых точек множества E.

Сказанное хорошо видно при записи указанных определений с помощью логических символов. Условие непрерывности функции f на множестве E имеет вид

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\forall x \in E)\,(\exists\delta > 0)\,(\forall x' \in E,\ \rho(x', x) < \delta) : |f(x') - f(x)| < \varepsilon,$$

а условие ее равномерной непрерывности на E — вид

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\delta > 0)\,(\forall x \in E,\ \forall x' \in E,\ \rho(x', x) < \delta) : |f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

Примеры 1. Функция $f(x) = x$ равномерно непрерывна на всей числовой оси, ибо, если задано $\varepsilon > 0$, достаточно взять $\delta = \varepsilon$, тогда если $|x - x'| < \delta$, то в силу равенств $f(x) = x$, $f(x') = x'$ получим $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

2. Функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, не будет равномерно непрерывной на своей области определения, т. е. на числовой оси, из которой удалена точка $x = 0$. В самом деле, если взять, например, $\varepsilon = 1$, то при любом сколь угодно малом $\delta > 0$ найдутся точки x и x', например точки вида

$$x = 1\Big/\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \quad \text{и} \quad x' = 1\Big/\left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi n\right)$$

(n — достаточно большое натуральное число) такие, что $|x - x'| < \delta$, а вместе с тем $|f(x) - f(x')| > 1$.

В качестве достаточного признака равномерной непрерывности функций одного переменного на интервале отметим следующий.

Лемма 2. *Если функция $f(x)$ определена и имеет ограниченную производную на некотором интервале (a, b), то она равномерно непрерывна на этом интервале.*

Действительно, если $|f'(x)| \leqslant c$ (c — постоянная) на (a, b), то с помощью формулы конечных приращений Лагранжа (см. п. 11.2) получим

$$|f(x') - f(x)| = |f'(\xi)(x' - x)| \leqslant c|x' - x|,$$
$$a < x < b, \quad a < x' < b, \quad a < \xi < b. \qquad (19.12)$$

Поэтому для $\varepsilon > 0$ достаточно взять $\delta = \varepsilon/c$; тогда если $|x' - x| < \delta$, $a < x < b$, $a < x' < b$, то в силу (19.12) справедливо неравенство $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$, что и означает равномерную непрерывность функции f на (a, b). □

Аналогичный результат имеет место для любого промежутка, конечного или бесконечного. Обобщение этого критерия на многомерный случай будет дано в п. 39.2.

Принципиальное значение имеет следующая теорема.

Теорема 5 (Кантор). *Функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна.*

Следствие. *Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна.*

Доказательство теоремы. Воспользуемся методом от противного. Допустим, что существует функция f, определенная и непрерывная на некотором компакте $E \subset R^n$, но не равномерно непрерывная на нем. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся точки $x'_\delta \in E$ и $x''_\delta \in E$ (индекс «δ» у точек означает, что они зависят от выбора δ), для которых $\rho(x'_\delta, x''_\delta) < \delta$ и вместе с тем $|f(x''_\delta) - f(x'_\delta)| \geqslant \varepsilon_0$. Возьмем какую-либо последовательность чисел δ_m, так, чтобы $\lim\limits_{m \to \infty} \delta_m = 0$, например, $\delta_m = 1/m$, $m = 1, 2, \ldots$. Пусть $x'^{(m)} = x'_{\delta_m}$, $x''^{(m)} = x''_{\delta_m}$ и, значит,

$$\rho(x'^{(m)}, x''^{(m)}) < \frac{1}{m}, \quad |f(x''^{(m)}) - f(x'^{(m)})| \geqslant \varepsilon_0. \qquad (19.13)$$

Множество E является компактом, поэтому из последовательности $\{x'^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x'^{(m_k)}\}$, предел ζ которой принадлежит компакту E, $\lim\limits_{k \to \infty} x'^{(m_k)} = \zeta \in E$. Точка ζ является точкой прикосновения замкнутого множества E, и поэтому $\zeta \in E$.

Рассмотрим теперь подпоследовательность $\{x''^{(m_k)}\}$ последовательности $\{x''^{(m)}\}$, соответствующую подпоследовательности $\{x'^{(m_k)}\}$. Докажем, что $\lim\limits_{k \to \infty} x''^{(m_k)} = \zeta$. Действительно,

$$\rho(x''^{(m_k)}, \zeta) \leqslant \rho(x''^{(m_k)}, x'^{(m_k)}) + \rho(x'^{(m_k)}, \zeta) < \frac{1}{m_k} + \rho(x'^{(m_k)}, \zeta),$$

и так как $\rho(x'^{(m_k)}, \zeta) \to 0$ и $\frac{1}{m_k} \to 0$ при $k \to \infty$, то и $\rho(x''^{(m_k)}, \zeta) \to 0$ при $k \to \infty$, а это и означает, что $x''^{(m_k)} \to \zeta$ при $k \to \infty$.

В силу непрерывности функции f в точке $\zeta \in E$ имеем $f(x'^{(m_k)}) \to f(\zeta)$ и $f(x''^{(m_k)}) \to f(\zeta)$ при $k \to \infty$, и, следовательно,

$$f(x''^{(m_k)}) - f(x'^{(m_k)}) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \qquad (19.14)$$

Но, по способу построения последовательностей $\{x'^{(m)}\}$ и $\{x''^{(m)}\}$ (см. (19.13))

$$|f(x''^{(m_k)}) - f(x'^{(m_k)})| \geqslant \varepsilon_0 \qquad (19.15)$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$.

Очевидно, условия (19.14) и (19.15) противоречат друг другу. Это и доказывает теорему 5. $\square$

Справедливость следствия вытекает из того, что отрезок является компактом.

Отметим, что при отказе от требования, чтобы множество, на котором рассматриваемая функция непрерывна, было компактом она может уже не оказаться равномерно непрерывной. Например, функция $f(x) = 1/x$ определена и непрерывна на интервале $(0, 1)$, который хотя и является ограниченным множеством, но не является замкнутым; эта функция не будет равномерно непрерывной на интервале $(0; 1)$. Функция $y = x^2$ определена и непрерывна на всей вещественной оси, которая хотя и является замкнутым множеством, но не является ограниченным. Эта функция также неравномерно непрерывна на вещественной оси. Доказательство того, что функции $y = 1/x$ и $y = x^2$ неравномерно непрерывны на указанных множествах будет дано в этом пункте несколько дальше.

Часто оказывается более удобным другой подход к понятию равномерной непрерывности, а именно с помощью так называемого модуля непрерывности функции.

Определение 10. *Пусть функция f определена на множестве $E \subset R^n$. Ее модулем непрерывности $\omega(\delta; f; E)$ называется функция*

$$\omega(\delta; f; E) = \sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} [f(x'') - f(x')], \quad x' \in E, \quad x'' \in E. \qquad (19.16)$$

Часто для краткости вместо $\omega(\delta; f; E)$ пишется просто $\omega(\delta; f)$ или даже $\omega(\delta)$.

Нетрудно убедиться, что

$$\sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} [f(x') - f(x'')] = \sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} |f(x'') - f(x')|, \quad x' \in E, \quad x'' \in E,$$

т. е. в правой части равенства (19.16) под знаком верхней грани можно писать или не писать знак абсолютной величины, от чего величина указанной верхней грани не меняется.

Очевидно, также, что $\omega(\delta) \geqslant 0$.

Далее, если $0<\delta_1<\delta_2$, то

$$y : y=f(x'')-f(x'),\ \rho(x',\ x'')\leqslant\delta_1\}\subset$$
$$\subset\{y : y=f(x'')-f(x'),\ \rho(x',\ x'')\leqslant\delta_2\},$$

откуда

$$\sup_{\rho(x',\ x'')\leqslant\delta_1}[f(x'')-f(x')]\leqslant\sup_{\rho(x',\ x'')\leqslant\delta_2}[f(x'')-f(x')]$$

(так как при расширении числового множества его верхняя грань может только возрастать), т. е. $\omega(\delta_1)\leqslant\omega(\delta_2)$, иначе говоря, *модуль непрерывности является монотонно возрастающей функцией.*

Задача 17. Пусть G — область в R^n. Доказать, что если $\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{\omega(\delta;\ f;\ G)}{\delta}=0$, то f — постоянная функция.

Примеры 1. Найдем $\omega(\delta)$ для функции $y=x^2$, $-\infty<x<+\infty$. Для любого $\delta>0$ и произвольного фиксированного x_0 имеем:

$$\omega(\delta;\ x^2)=\sup_{|x''-x'|\leqslant\delta}\left(x''^2-x'^2\right)\geqslant x_0^2-(x_0-\delta)^2=2x_0\delta-\delta^2. \quad (19.17)$$

Это неравенство верно для всех x_0 и так как при любом фиксированном δ имеем $\lim\limits_{x_0\to+\infty}(2x_0\delta-\delta^2)=$ $=+\infty$, то из (19.17) получаем

$$\omega(\delta;\ x^2)=+\infty,\ -\infty<x<+\infty.$$

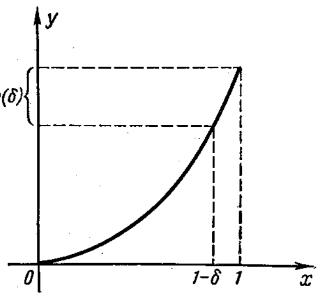

Рис. 87

Найдем теперь модуль непрерывности функции $y=x^2$ на отрезке $[0;\ 1]$. Интуитивно ясно, что поскольку модуль непрерывности $\omega(\delta)$ описывает согласно определению наибольший рост функции на отрезке длины δ, то чтобы получить модуль непрерывности функции в данном случае следует взять отрезок $[1-\delta,\ \delta]$, на котором функция $f(x)=x^2$, $0\leqslant x\leqslant 1$, растет наиболее быстро: модуль непрерывности совпадает с приращением функции на этом отрезке (рис. 87):

$$\omega(\delta)=f(1)-f(1-\delta)=1-(1-\delta)^2=2\delta-\delta^2.$$

Аналитически это проверяется следующим образом. Пусть $0\leqslant x''-\delta\leqslant x'\leqslant x''\leqslant 1$, тогда, в силу неравенства

$$x''^2-x'^2\leqslant x''^2-(x''-\delta)^2=2x''\delta-\delta^2\leqslant 2\delta-\delta^2,$$

получим

$$\omega(\delta;\ x^2)=\sup_{|x''-x'|\leqslant\delta}\left(x''^2-x'^2\right)\leqslant 2\delta-\delta^2, \quad (19.18)$$

но если взять $x' = 1 - \delta$, $x'' = 1$, то

$$\omega(\delta;\ x^2) = \sup_{|x''-x'| \leqslant \delta} \left(x''^2 - x'^2\right) \geqslant 1 - (1-\delta)^2 = 2\delta - \delta^2. \qquad (19.19)$$

Из оценок (19.18) и (19.19) следует, что на отрезке $[0;\ 1]$ имеем $\omega(\delta;\ x^2) = 2\delta - \delta^2$.

2. Рассмотрим функцию $y = \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$. С одной стороны

$$\omega\left(\delta;\ \sin\frac{1}{x}\right) = \sup_{|x''-x'| \leqslant \delta} \left|\sin\frac{1}{x''} - \sin\frac{1}{x'}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{|x''-x'| \leqslant \delta} \left(\left|\sin\frac{1}{x''}\right| + \left|\sin\frac{1}{x'}\right|\right) \leqslant \sup_{|x''-x'| \leqslant \delta} 2 = 2.$$

С другой стороны, выбрав $x''_n = 1\Big/\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $x'_n = 1\Big/\left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi n\right)$ и зафиксировав n так, что $|x'_n| \leqslant \delta/2$, $|x''_n| \leqslant \delta/2$, и поэтому $|x''_n - x'_n| \leqslant |x'_n| + |x''_n| \leqslant \delta$, будем иметь

$$\omega\left(\delta;\ \sin\frac{1}{x}\right) \geqslant \sin\frac{1}{x''_n} - \sin\frac{1}{x'_n} = 1 + 1 = 2.$$

Из полученных оценок следует, что $\omega\left(\delta;\ \sin\frac{1}{x}\right) = 2$.

3. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x}$ на интервале $(0;\ 1)$.

При любом фиксированном δ, $0 < \delta < 1$, имеем

$$\omega\left(\delta;\ \frac{1}{x}\right) = \sup_{|x''-x'| \leqslant \delta} \left(\frac{1}{x''} - \frac{1}{x'}\right) = \sup_{x' \leqslant x'' \leqslant x'+\delta} \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0+\delta}\ ^{*)} = \frac{\delta}{x_0(x_0+\delta)} \to +\infty \text{ при } x_0 \to +0.$$

Таким образом, $\omega(\delta;\ 1/x) = +\infty$.

В терминах модуля непрерывности равномерная непрерывность может быть выражена следующим образом.

Теорема 6. *Для того чтобы функция f, определенная на множестве E, была равномерно непрерывной на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\delta \to +0} \omega(\delta;\ f;\ E) = 0. \qquad (19.20)$$

Доказательство. Пусть функция f равномерно непрерывна на множестве E, т. е. выполнены условия (19.10)—(19.11); тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, что если $x' \in E$, $x'' \in E$, $\rho(x',\ x'') < \delta_\varepsilon$, то $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon/2$. Отсюда явствует, что для

---

*) Здесь x_0 таково, что $0 < x_0 < 1 - \delta$.

любого $\delta < \delta_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} |f(x'') - f(x')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

т. е. если $0 < \delta < \delta_\varepsilon$, то $\omega(\delta) < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$. Необходимость условия (19.20) доказана.

Докажем достаточность условия (19.20). Выполнение условия (19.20) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, что если $0 < \delta < \delta_\varepsilon$, то $\omega(\delta; f; E) < \varepsilon$. Выберем какое-либо из указанных δ. Тогда при $\rho(x', x'') < \delta$, $x' \in E$, $x'' \in E$, будем иметь (см. (19.16)): $|f(x'') - f(x')| \leqslant \omega(\delta, f, E) < \varepsilon$, т. е. функция f равномерно непрерывна на E. $\square$

Мы видели выше, что на отрезке $[0, 1]$ $\omega(\delta; x^2) = 2\delta - \delta^2$, поэтому $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega(\delta; x^2) = 0$, и, следовательно, функция x^2 равномерно непрерывна на этом отрезке, как и должно быть согласно теореме 5. Модуль непрерывности той же функции x^2, но уже рассматриваемой на всей вещественной оси, так же как и модули непрерывности $\omega\left(\delta; \sin\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$, и $\omega\left(\delta; \frac{1}{x}\right)$, $0 < x < 1$, не стремятся к нулю при $\delta \to +0$ и поэтому все эти функции не являются равномерно непрерывными на соответствующих множествах.

Упражнения. 5. Доказать теорему Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте, с помощью леммы Гейне — Бореля (см. теорему 4 в п. 18.3 и замечание после нее).

6. Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ называется *кусочно линейной*, если существует такое разбиение отрезка $[a, b]$ на конечное число отрезков $[x_{i-1}, x_i]$,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

что функция $f(x)$ линейна на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Доказать, что всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $F(x)$ может быть с любой степенью точности аппроксимирована кусочно линейной функцией, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такая кусочно линейная функция $f(x)$, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|F(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Введем теперь еще некоторые понятия, полезные для дальнейшего.

Определение 11. *Пусть* $E \subset \boldsymbol{R}^n$. Число (конечное или бесконечное) $d = \sup\limits_{x' \in E,\, x'' \in E} \rho(x', x'')$ *называется диаметром множества* E *и обозначается через* $d(E)$.

Упражнения 7. Пусть Q^n — n-мерный шар с центром в некоторой точке $x^{(0)}$ и радиусом r: $Q^n = O(x^{(0)}, r)$, тогда $d(Q^n) = 2r$. Доказать, что множество E ограничено тогда и только тогда, когда $d(E) < +\infty$.

Определение 12. *Пусть функция f определена на множестве E; тогда значение модуля непрерывности* $\omega(\delta; f; E)$ *при δ, равном диаметру множества E, т. е.* $\omega(d(E); f; E)$ *называется колеба-*

нием функции f на множестве E и обозначается через $\omega(f; E)$ или просто $\omega(f)$.

Очевидно, что в силу (19.16)

$$\omega(f; E) = \sup_{x' \in E,\, x'' \in E} [f(x'') - f(x')].$$

Замечание. Из сказанного в этом и предыдущем параграфах, в частности, видно, что в ряде вопросов, относящихся к функциям многих переменных, всю их специфику можно в достаточной мере усмотреть уже в двумерном или трехмерном случае. Благодаря удачно выбранным определениям и обозначениям доказательства теорем автоматически переносятся со случая $n=2$ на произвольный n-мерный случай иногда лишь приводя к некоторому техническому усложнению записи. Случай же $n=2$ имеет преимущество геометрической наглядности и более простой записи, когда в ней участвуют координаты точек. Поэтому для большей ясности и простоты изложения мы, как правило, будем подробно рассматривать лишь случаи $n=2$ или $n=3$, а в случае произвольного n — лишь формулировать соответствующие результаты или даже только отмечать возможность их обобщения на случай произвольного n. Если же при рассмотрении какого-либо вопроса при $n>3$ возникают какие-либо специфические трудности, то этот вопрос будет детально рассматриваться в общем случае.

§ 20. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

20.1. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ЧАСТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

Рассмотрим сначала случай функций трех переменных.

Определение 1. *Пусть в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) задана функция $u=u(x, y, z)$. Фиксируя переменные y и z: $y=y_0$, $z=z_0$, получим функцию одного переменного x: $u=u(x, y_0, z_0)$. Обычная производная* (см. п. 9.1) *этой функции в точке $x=x_0$ называется частной производной функции $u(x, y, z)$ в точке (x_0, y_0, z_0) по x и обозначается через $\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$.*

Таким образом,

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \overset{\text{def}}{=} \frac{du(x, y_0, z_0)}{dx}\bigg|_{x=x_0}$$

Заметим, что обозначение частной производной по переменной x через $\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$ традиционно. Правильнее было бы писать $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$, так как $\frac{\partial u}{\partial x}$ является единым символом, обозначающим новую функцию, значение которой и рассматривается в точке (x_0, y_0, z_0).