Согласно формулам (20.54) при $(x, y) \in G^+$, $y \neq x^{p-1}$ имеем $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) > 0$, а при $(x, y) \in G^-$, $y \neq x^{p-1}$, соответственно $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$ (здесь использована эквивалентность уравнений (20.55) и (20.56)). Поэтому вдоль любого отрезка, лежащего во множестве G^+ и параллельного оси x-ов (рис. 93) функция $F(x, y)$ строго возрастает. Следовательно, если $(x, y) \in G^+$, $y \neq x^{p-1}$, то (см. (20.57))

$$F(x, y) < F(x, x^{p-1}) = 0.$$

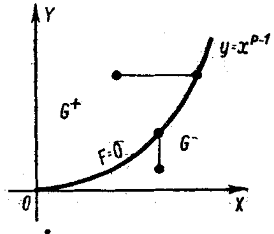

Рис. 93

Аналогично, на любом отрезке, лежащем во множестве G^- и параллельном оси y-ов функция $F(x, y)$ также строго возрастает. Поэтому, если $(x, y) \in G$ и $y \neq x^{p-1}$, то опять

$$F(x, y) < F(x, x^{p-1}) = 0.$$

Таким образом, если $y \neq x^{p-1}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, то всегда $F(x, y) < 0$.

Итак, вспоминая вид функции F (см. (20.53)), имеем: если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{при} \quad b \neq a^{p-1},$$

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{при} \quad b = a^{p-1}.$$

Тем самым неравенство (20.50) доказано.

§ 21. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

21.1. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть задана функция $f(x, y)$. Тогда каждая из ее частных производных (если они, конечно, существуют) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, которые называются также *частными производными первого порядка*, снова является функцией независимых переменных x, y и может, следовательно, также иметь частные производные. Частная производная $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ обозначается через $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ или f_{xx}, а $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ через $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ или f_{xy}. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = f_{xy}$$

и, аналогично,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = f_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

Производные f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} и f_{yy} называются *частными производными второго порядка*. Рассматривая частные производные от них, получим всевозможные частные производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x} \text{ и т. д.}$$

Аналогично определяются частные производные произвольного порядка и для функций любого числа переменных.

Определение 1. *Частная производная* (по любой из независимых переменных) *от частной производной порядка* $m-1$, $m=1, 2, \ldots$ $\ldots$, *) *называется частной производной порядка* m.

Частная производная, полученная дифференцированием по различным переменным, называется смешанной частной производной. Частная же производная, полученная дифференцированием только по одной переменной, называется чистой частной производной.

Число различных частных производных при увеличении m, очевидно, возрастает, однако оказывается, что при определенных предположениях многие из них совпадают, а именно смешанные частные производные по одним и тем же переменным не зависят от порядка дифференцирования.

Более точно имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция* $f(x, y)$ *определена вместе со своими частными производными* f_x, f_y, f_{xy} *и* f_{yx} *в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0), *причем* f_{xy} *и* f_{yx} *непрерывны в этой точке; тогда*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \tag{21.1}$$

Доказательство. Пусть функция $f(x, y)$ определена вместе с производными f_x, f_y, f_{xy} и f_{yx} в δ-окрестности точки (x_0, y_0) и пусть Δx и Δy фиксированы так, что $\Delta x^2 + \Delta y^2 < \delta^2$. Будем обозначать, как и раньше (см. п. 20.1), символом Δ_x, соответственно Δ_y, приращение функций f по аргументу x, соответственно y, в точке (x_0, y_0) **). Введем обозначения

$$\Delta_{xy} f = \Delta_x(\Delta_y f), \quad \Delta_{yx} f = \Delta_y(\Delta_x f)$$

и покажем, что

$$\Delta_{xy} f = \Delta_{yx} f. \tag{21.2}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\Delta_{xy} f = \Delta_x(\Delta_y f) = \Delta_x[f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)] = \\ = [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)] - \\ - [f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)];\end{aligned} \tag{21.3}$$

---

*) *Частной производной нулевого порядка* для удобства обозначений считается сама функция.

**) Для всякой функции $F(x, y)$ имеем:

$$\Delta_x F(x_0, y_0) = F(x_0+\Delta x, y_0) - F(x_0, y_0),$$
$$\Delta_y F(x_0, y_0) = F(x_0, y_0+\Delta y) - F(x_0, y_0).$$

аналогично,

$$\Delta_{yx}f=\Delta_y(\Delta_x f)=[f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0+\Delta y)]-$$
$$-[f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)]. \qquad (21.4)$$

Сравнивая (21.3) и (21.4), убеждаемся в справедливости соотношения (21.2).

Положим теперь

$$\varphi(x)=f(x,\ y_0+\Delta y)-f(x,\ y_0);$$

тогда (21.3) можно переписать в виде

$$\Delta_{xy}f=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0).$$

В силу того, что в рассматриваемой окрестности точки $(x_0,\ y_0)$ существует частная производная f_x, функция $\varphi(x)$ дифференцируема на отрезке с концами в точках x_0 и $x_0+\Delta x$. Из теоремы Лагранжа о конечных приращениях следует, что

$$\Delta_{xy}f=\varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\,\Delta x,\ 0<\theta_1<1.$$

Но $\varphi'(x)=f_x(x,\ y_0+\Delta y)-f_x(x,\ y_0)$, а поэтому

$$\Delta_{xy}f=[f_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0)]\,\Delta x.$$

Применяя еще раз ту же теорему о конечных приращениях, но теперь уже по переменной y, будем иметь

$$\Delta_{xy}f=f_{xy}(x+\theta_1\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y)\,\Delta x\Delta y,$$
$$0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1. \qquad (21.5)$$

Совершенно аналогично, полагая $\psi(y)=f(x_0+\Delta x,\ y)-f(x_0,\ y)$, имеем

$$\Delta_{yx}f=\psi(y_0+\Delta y)-\psi(y_0)=\psi'(y_0+\theta_3\Delta y)\,\Delta y=$$
$$=[f_y(x_0+\Delta x,\ y_0+\theta_3\Delta y)-f_y(x_0,\ y_0+\theta_3\Delta y)]\,\Delta y=$$
$$=f_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,\ y_0+\theta_3\Delta y)\,\Delta x\Delta y,\ 0<\theta_3<1,\ 0<\theta_4<1. \qquad (21.6)$$

Согласно (21.2), левые части равенства (21.5) и (21.6) равны между собой, значит, равны и правые; приравнивая их и сокращая на $\Delta x\Delta y$ при $\Delta x\neq 0$ и $\Delta y\neq 0$, получим

$$f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y)=f_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,\ y_0+\theta_3\Delta y),$$
$$0<\theta_i<1,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4. \qquad (21.7)$$

В силу непрерывности частных производных f_{xy} и f_{yx} в точке x_0, y_0, переходя в (21.7) к пределу при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, получаем (21.1). □

Замечание 1. Из доказанной теоремы по индукции легко следует, что если у функции n переменных смешанные частные производные m-го порядка непрерывны в некоторой точке, то они не зависят от порядка дифференцирования.

Это следует из того, что любые две последовательности дифференцирования, отличающиеся только порядком дифференцирования (т. е. такие, что по каждому фиксированному аргументу они содержат одно и то же суммарное число дифференцирований), можно перевести одну в другую конечным числом шагов, при каждом из которых меняется порядок дифференцирования только по двум переменным, а другие остаются при этом фиксированными. Таким образом, при каждом шаге фактически рассматривается изменение порядка дифференцирования у функции лишь двух переменных, т. е. в этом случае мы находимся в условиях вышедоказанной теоремы. Тем самым общий случай и сводится к случаю функций двух переменных.

Поясним это на примере. Докажем, например, что

$$f_{xyz}=f_{zyx}.$$

Согласно вышесказанному, имеем последовательно

$$f_{xyz}=(f_x)_{yz}=(f_x)_{zy}=(f_{xz})_y=(f_{zx})_y=(f_z)_{xy}=(f_z)_{yx}=f_{zyx}.$$

Замечание 2. В заключение этого пункта отметим, что, на первый взгляд, доказанная теорема может показаться не очень содержательной: для того чтобы судить о том, имеет ли место равенство $f_{xy}=f_{yx}$, надо, согласно этой теореме, проверить непрерывность функций f_{xy} и f_{yx}, а для этого надо как будто бы их знать, но если мы их уже знаем, то без всякой теоремы можем выяснить, равны они или нет. Тем не менее теорема 1 все-таки содержательна. Дело в том, что о непрерывности функции можно иногда судить на основании некоторых общих теорем, не прибегая к конкретному вычислению и исследованию самой функции. Так, мы знаем, что все элементарные функции многих переменных непрерывны в своей области определения (см. п. 19.4). С другой стороны, частные производные элементарных функций сами являются элементарными, поэтому если, например, частная производная некоторой элементарной функции определена на некоторой окрестности какой-либо точки, то эта производная и непрерывна в каждой точке указанной окрестности.

Задача 18. Докажите, что если функция $f(x, y)$ определена вместе со своими частными производными f_x, f_y и f_{xy} в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), причем частная производная f_{xy} непрерывна в точке (x_0, y_0), то в этой точке существует частная производная f_{yx} и

$$f_{yx}(x_0, y_0)=f_{xy}(x_0, y_0).$$

Функция, имеющая в некоторой точке (или, соответственно, на некотором открытом множестве) непрерывные частные производные всех порядков до некоторого порядка m включительно, называется *m раз непрерывно дифференцируемой* в этой точке (на этом множестве).

Заметим, что, для того чтобы функция имела в точке (на открытом множестве) непрерывные частные производные всех порядков до некоторого порядка m включительно, достаточно, чтобы она имела в этой точке (на этом множестве) непрерывные частные производные порядка m. Действительно, из непрерывности всех частных производных порядка m в точке (на открытом множестве), согласно следствию из теоремы 3 в п. 20.2, вытекает непрерывность всех частных производных порядка $m-1$ в рассматриваемой точке (на рассматриваемом множестве). Из непрерывности же частных производных порядка $m-1$ вытекает (в случае $m>1$) непрерывность частных производных порядка $m-2$ и т. д.

21.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Функция от $2n$ переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, или, что то же, от упорядоченной пары точек n-мерного пространства $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)$ вида

$$A(x, y)=A(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)=\sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik}x_iy_k,$$

где a_{ik} — заданные числа $(i, k=1, 2, \ldots, n)$, называется *билинейной формой* от x и y. Это название объясняется тем, что если одну из точек x или y зафиксировать, то функция будет линейной относительно координат оставшейся точки.

Функция $A(x, x)$ называется *квадратичной формой*, соответствующей данной билинейной форме $A(x, y)$:

$$A(x, x)=A(x_1, \ldots, x_n; x_1, \ldots, x_n)=\sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k.$$

В случае, когда $a_{ik}=a_{ki}$, $i, k=1, 2, \ldots, n$, билинейная форма $A(x, y)$ и соответствующая ей квадратичная форма $A(x, x)$ называются *симметричными*.

Например, скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ n-мерного евклидова пространства R^n

$$\boldsymbol{xy}=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$$

является симметричной билинейной формой точек $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, а квадрат длины вектора $|\boldsymbol{x}|$ — соответствующей ей квадратичной:

$$|\boldsymbol{x}|^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2.$$

В дальнейшем для удобства изложения будем обозначать дифференциалы не только символом d, но и символом δ, например, писать не только

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \text{ но и } \delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \delta y,$$

причем дифференциал какой-либо функции будем называть также и ее первым дифференциалом.

Пусть функция $z = z(x, y)$ имеет непрерывные первые и вторые частные производные на некотором открытом плоском множестве G (такие функции, согласно определению предыдущего пункта, называются дважды непрерывно дифференцируемыми на множестве G). Из непрерывности на множестве G частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следует, как мы знаем (см. теорему 3 в п. 20.2), дифференцируемость самой функции $z(x, y)$ в каждой точке этого множества. Таким образом, для всех точек $(x, y) \in G$ определен дифференциал

$$dz = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} dy.$$

Поскольку, согласно сделанным предположениям, частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ имеют на открытом множестве непрерывные частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ и}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

то в силу теоремы 3 из п. 20.2 $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ также дифференцируемы на множестве G. Поэтому дифференциал dz, рассматриваемый как функция только переменных x и y, в свою очередь является дифференцируемой на множестве G функцией. Вычислим дифференциал от первого дифференциала dz, считая dx и dy фиксированными, а точку (x, y) — принадлежащей области G: $(x, y) \in G$, при этом новое дифференцирование обозначим символом δ:

$$\delta(dz) = \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = \left(\delta \frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(\delta \frac{\partial z}{\partial y}\right) dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \delta y\right) dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \delta y\right) dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx\, \delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} (dx\, \delta y + \delta x\, dy) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy\, \delta y.$$

Обратим внимание на то, что непрерывность вторых производных была использована не только для того, чтобы проведенные вычисления имели смысл (т. е. для того чтобы во всех рассматриваемых точках существовали дифференциалы $\delta \frac{\partial z}{\partial x}$ и $\delta \frac{\partial z}{\partial y}$), но и для того, чтобы в процессе вычислений не обращать внимания на порядок дифференцирования. Действительно, было показано (см. п. 21.1), что в случае непрерывности смешанных частных производных $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ они совпадают, поэтому для их обозначения может быть использован один и тот же символ, что и было сделано при указанных вычислениях.

В результате получилась симметричная билинейная форма переменных dx, dy, δx, δy. Полагая $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, получим соответствующую ей квадратичную форму, которая и называется *вторым дифференциалом* функции $z = z(x, y)$ в данной точке $(x, y) \in G$ и обозначается $d^2 z$.

Таким образом, мы пришли к следующему определению.

Определение 2. *Вторым дифференциалом d^2z функции $z = f(x, y)$ в данной точке называется квадратичная форма от дифференциалов dx и dy независимых переменных, соответствующая билинейной форме дифференциала от первого дифференциала, т. е.*

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \tag{21.8}$$

На практике при конкретном вычислении дифференциалов обычно совмещаются оба шага — вычисление дифференциала от дифференциала $\delta(dz)$ и приравнивание дифференциалов аргументов при последовательных дифференцированиях: $\delta x = dx$, $\delta y = dy$. Например, пусть $z = x^3 \cos^2 y$ и требуется найти $d^2 z$. Последовательно имеем:

$$dz = 3x^2 \cos^2 y \, dx - x^3 \sin 2y \, dy,$$

$$d^2 z = 6x \cos^2 y \, dx^2 - 3x^2 \sin 2y \, dx \, dy - 3x^2 \sin 2y \, dx \, dy -$$

$$- 2x^3 \cos 2y \, dy^2 = 6x \cos^2 y \, dx^2 - 6x^2 \sin 2y \, dx \, dy - 2x^3 \cos^2 2y \, dy^2.$$

Аналогичным образом при непрерывности частных производных третьего порядка можно вычислить и дифференциал от второго дифференциала $\delta(d^2 z)$, после чего, полагая $\delta x = dx$ и $\delta y = dy$, мы получим по определению третий дифференциал. По индукции определяется и дифференциал $(m+1)$-го порядка $d^{m+1} z$, $m = 1, 2, \ldots$. Именно, чтобы в предположении непрерывности у рассматриваемой функции $z(x, y)$ всех ее частных производных до порядка $m+1$ включительно на некотором открытом множестве получить ее дифференциал $d^{m+1} z$, надо взять дифференциал от дифференциала $d^m z$ порядка m: $\delta(d^m z)$ и положить $\delta x = dx$, $\delta y = dy$. При этом для дифференциалов порядка $m = 1, 2, \ldots$ справедлива формула

$$d^m z = \sum_{k=0}^{m} C_n^k \frac{\partial^m z}{\partial x^{m-k} \partial y^k} dx^{m-k} dy^k, \tag{21.9}$$

ее обычно символически записывают в следующем виде, более удобном для запоминания:

$$d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^{\{m\}} f(x, y). \tag{21.10}$$

Докажем формулу (21.9) по индукции. При $m=1$ она, очевидно, верна. Пусть она справедлива при некотором m, покажем ее справедливость при $m+1$. Имеем

$$\delta(d^m z) = \\ = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \left(\frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^{m-k+1}\partial y^k} \delta x dx^{m-k} dy^k + \frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^{m-k}\partial y^{k+1}} dx^{m-k}\delta y dy^k\right).$$

Положим $\delta x = dx$ и $\delta y = dy$; тогда

$$d^{m+1}z = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m-k+1}\partial y^k} dx^{m-k+1} dy^k + \\ + \sum_{p=0}^{m} C_m^p \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m-p}\partial y^{p+1}} dx^{m-p} dy^{p+1}.$$

Заменим во второй сумме индекс суммирования p на $k-1$ и заметим, что $C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k$; окончательно получим:

$$d^{m+1}z = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m-k+1}\partial y^k} dx^{m-k+1} dy^k + \\ + \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1} \frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^{m-k+1}\partial y^k} dx^{m-k+1} dy^k = \\ = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1-k}\partial y^k} dx^{m+1-k} dy^k. \ \square$$

Замечание. Следует иметь в виду, что если имеется сложная функция $z=f(x, y)$, где $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, то второй дифференциал функции f, записанный через дифференциалы переменных x и y, уже не будет, вообще говоря, иметь вид (21.8), а будет, как правило, выглядеть сложнее. Таким образом, в случае дифференциала высшего порядка (т. е. порядка, большего или равного двум) не имеет места инвариантность формы дифференциала относительно выбора переменных. Чтобы в этом убедиться, вычислим в рассматриваемом случае второй дифференциал функции $z=f(x, y)$, где $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$. В силу инвариантности формы первого дифференциала имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Далее вычислим дифференциал $\delta(dz)$, считая, что $\delta u = du$, $\delta v = dv$. Использовав инвариантность формы первого дифференциала относительно выбора переменных и заметив, что дифференциал $\delta(dx)$ есть дифференциал функции и, значит, вообще говоря, не ноль, получим

$$dz^2 = \delta(dz)\Big|_{\substack{\delta u = du \\ \delta v = dv}} = \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)\Big|_{\substack{\delta u = du \\ \delta v = dv}} =$$
$$= \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial z}{\partial x}\delta(dx) + \frac{\partial z}{\partial y}\delta(dy)\Big|_{\substack{\delta v = du \\ \delta u = dv}} =$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y.$$

На практике и в этом случае обе операции: вычисление дифференциалов и приравнивание дифференциалов $\delta u = du$, $\delta v = dv$ — производятся одновременно, т. е. запись $\delta(dz)\Big|_{\substack{\delta x = dx \\ \delta y = dy}}$ считается равноправной записи $d(dz)$.

Все сказанное, в частности определение дифференциалов высших порядков, естественным образом переносится на функции большего числа переменных. Отметим, что дифференциал m-го порядка от функций n переменных $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ имеет вид

$$d^m y = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^{\{m\}} y(x_1, \ldots, x_n). \qquad (21.11)$$

Доказывается эта формула аналогично формуле (21.10).

Упражнения. 1. Найти частные производные первого порядка функции $z = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{y}$.

2. Найти полный дифференциал функции $u = z^{xy}$.

3. Найти все частные производные второго порядка функции

$$u = x\sin(x+y) + y\cos(x+y).$$

4. Найти d^2z, если $z = \frac{1}{y}\ln(x^2+y^2)$.

5. Найти производные первых двух порядков от функции $w = f(u, v)$ где $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.