# ГЛАВА ТРЕТЬЯ
# ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## § 22. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

### 22.1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

В этом параграфе рассматривается задача отыскания функции, для которой заданная функция является производной.

**Определение 1.** *Пусть функция $f$ определена на некотором конечном или бесконечном промежутке $\Delta$ числовой оси $\boldsymbol{R}$, т. е. на интервале, полуинтервале или отрезке* *).

*Функция $F$, определенная на этом же промежутке, называется первообразной функцией (или просто первообразной) функции $f$ на $\Delta$, если*

1) *функция $F$ непрерывна на промежутке $\Delta$;*

2) *во всех внутренних точках $x$ промежутка $\Delta$ функция $F$ имеет производную и $F'(x)=f(x)$.*

Иногда вместо «первообразная данной функции» говорят «первообразная для данной функции».

Таким образом, если $a$ — конец промежутка $\Delta$ и $a \in \Delta$, то в точке $a$ первообразная $F$ обязательно непрерывна. При $x=a$ она может иметь или не иметь одностороннюю производную, которая, если она существует, может и не совпадать со значением функции $f$ в точке $a$.

Пример. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0<x\leqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad x=0. \end{cases}$$

Тогда функция $F(x)=x$, $0\leqslant x\leqslant 1$, является первообразной для $f$, так как оба условия определения 1 очевидно выполняются. Отметим, что функция $F(x)=x$, $0\leqslant x\leqslant 1$, является и первообразной для функции $f_1(x)=1$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

На этом примере видно, что одна и та же функция может быть первообразной для разных функций, однако они могут отли-

*) Если рассматриваемый промежуток является отрезком, то само собой разумеется, что он может быть только конечным.

чаться друг от друга только на концах промежутка $\Delta$, так как во всех внутренних точках в силу условия 2) определения 1 указанные функции совпадают.

Очевидно, что если $F$ — первообразная функции $f$ на промежутке $\Delta$, т. е. функция $F$ непрерывна на $\Delta$ и во всех внутренних точках $x$ промежутка $\Delta$ выполняется условие $F'(x)=f(x)$, то для любой постоянной $C$ функция $F(x)+C$ также непрерывна на $\Delta$ и во внутренних точках $x$ имеем

$$[F(x)+C]'=F'(x)+C'=f(x),$$

т. е. функция $F(x)+C$ тоже является первообразной функции $f$ на $\Delta$.

С другой стороны, в силу следствия 2 теоремы 3 п. 11.2, если $F$ и $\Phi$ — две первообразные для функции $f$ на $\Delta$, т. е. если $F$ и $\Phi$ — непрерывны на $\Delta$ и во всех внутренних точках $x$ промежутка $\Delta$ выполняются равенства $F'(x)=f(x)$, $\Phi'(x)=f(x)$, и, следовательно,

$$[F(x)-\Phi(x)]'=0,$$

то рассматриваемые первообразные отличаются на $\Delta$ на некоторую постоянную $C$:

$$\Phi(x)=F(x)+C, \quad x\in\Delta. \tag{22.1}$$

Итак, если функция $F$ является какой-либо первообразной функции $f$ на промежутке $\Delta$, то всякая функция $\Phi$ вида (22.1) также является первообразной функции $f$, и всякая первообразная функции $f$ представима в виде $F(x)+C$.

**Определение 2.** *Совокупность всех первообразных функции $f$, определенных на некотором промежутке $\Delta$, называется неопределенным интегралом от функции $f$ на этом промежутке и обозначается через*

$$\int f(x)\,dx. \tag{22.2}$$

Символ $\int$ называется *знаком интеграла*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*.

Если $F$ — какая-либо первообразная функции $f$ на $E$, то пишут

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C, \tag{22.3}$$

хотя было бы правильнее писать

$$\int f(x)\,dx=\{F(x)+C\}. \tag{22.4}$$

Мы, как обычно принято, будем употреблять запись (22.3). Тем самым один и тот же символ $\int f(x)\,dx$ будет обозначать как всю совокупность первообразных функции $f$, так и любой элемент этого множества, т. е. какую-то первообразную функции $f$.

Следует, однако, иметь в виду, что *всякое равенство, в обеих частях которого стоят неопределенные интегралы, есть равенство между множествами.*

Под знаком интеграла пишут для удобства не саму функцию $f$, а ее произведение на дифференциал $dx$. Это делается прежде всего для того, чтобы указать, по какой переменной ищется первообразная. Например,

$$\int x^2z\,dx = \frac{x^3z}{3} + C, \quad \int x^2z\,dz = \frac{x^2z^2}{2} + C;$$

здесь в обоих случаях подынтегральная функция равна $x^2z$, но ее неопределенные интегралы в рассмотренных случаях оказываются различными; в первом случае она рассматривается как функция от переменной $x$ во втором — как функция от $z$.

Другие удобства, вытекающие из употребления записи $\int f(x)\,dx$, будут указаны в дальнейшем (см. замену переменного в интеграле, п. 22.3).

Если $F$ — первообразная функции $f$ на промежутке $\Delta$, то согласно определению 2 в формуле (22.2) под знаком интеграла стоит дифференциал функции $F$ во внутренних точках промежутка $\Delta$:

$$dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Будем считать по определению, что этот дифференциал под знаком интеграла можно записывать в любом из указанных видов, т. е. согласно этому соглашению

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = \int dF(x). \tag{22.5}$$

## Основные свойства неопределенного интеграла

Будем предполагать, что все рассматриваемые функции определены на одном и том же конечном или бесконечном промежутке $\Delta$.

1°. *Пусть функция $F$ непрерывна на промежутке $\Delta$ и дифференцируема в его внутренних точках; тогда*

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

*или, что то же* (см. (22.5)):

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$

Справедливость этого равенства вытекает из определения неопределенного интеграла как совокупности всех функций, непрерывных на данном промежутке $\Delta$, дифференциал которых (во внутренних точках $x \in \Delta$) стоит под знаком интеграла (см. (22.5)), и общего вида (22.1) всех первообразных данной функции.

2°. *Пусть функция $f$ имеет первообразную на промежутке $\Delta$; тогда для любой внутренней точки промежутка $\Delta$ имеет место равенство*

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

В данной формуле под интегралом $\int f(x)\,dx$ понимается любая первообразная $F$ функции $f$. Справедливость этой формулы очевидна в силу определения первообразной.

3°. *Если функции $f_1$ и $f_2$ имеют первообразные на $\Delta$, то и функция $f_1+f_2$ также имеет первообразную на $\Delta$, причем*

$$\int [f_1(x)+f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx. \tag{22.6}$$

Это равенство выражает собой совпадение двух множеств функций и означает, что сумма каких-либо первообразных для функций $f_1$ и $f_2$ является первообразной для функции $f_1+f_2$ и что наоборот, всякая первообразная для функции $f_1+f_2$ является суммой некоторых первообразных для функций $f_1$ и $f_2$.

Свойство интеграла, выражаемое формулой (22.6) называется *аддитивностью интеграла относительно функций.*

Пусть $\int f_1(x)\,dx = F_1(x)+C_1$, $\int f_2(x)\,dx = F_2(x)+C_2$, и, следовательно, функции $F_1$ и $F_2$ непрерывны на промежутке $\Delta$ и во всех его внутренних точках $x$ справедливы равенства $F_1'(x)=f_1(x)$, $F_2'(x)=f_2(x)$.

Положим $F=F_1+F_2$. Тогда функция $F$ непрерывна на промежутке $\Delta$, как сумма непрерывных функций $F_1$ и $F_2$ и для любой внутренней точки $x$ промежутка $\Delta$

$$F'(x)=[F_1(x)+F_2(x)]' = F_1'(x)+F_2'(x) = f_1(x)+f_2(x).$$

Это означает, что $F$ является первообразной для функции $f_1+f_2$ на $\Delta$, а поэтому

$$\int [f_1(x)+f_2(x)]\,dx = F(x)+C = F_1(x)+F_2(x)+C.$$

Таким образом, левая часть формулы (22.6) состоит из функций вида $F_1(x)+F_2(x)+C$, правая — из функций вида $F_1(x)+ C_1+F_2(x)+C_2$. Ввиду произвольности постоянных $C$, $C_1$ и $C_2$ эти совокупности совпадают.

4°. *Если функция $f$ имеет первообразную на промежутке $\Delta$ и $k$ — число, то функция $kf$ также имеет на $\Delta$ первообразную, причем при $k \neq 0$ справедливо равенство*

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx. \tag{22.7}$$

Действительно, пусть $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, т. е. $F$ — непрерывна на $\Delta$ и во внутренних точках $x$ промежутка $\Delta$ выполняется условие $F'(x)=f(x)$. Тогда функция $kF$ также непрерывна на этом промежутке и в его внутренних точках $x$ имеет место равенство $[kF(x)]' = kF'(x) = kf(x)$. Это означает, что функция $kF$ является первообразной для $kf$, а поэтому $\int kf(x)\,dx = kF(x) + C_1$.

Таким образом левая часть формулы (22.7) представляет собой совокупность функций вида $kF(x) + C_1$, а правая состоит из функций вида $k[F(x) + C] = kF(x) + kC$. Ввиду произвольности постоянных $C$ и $C_1$ при условии $k \neq 0$ обе совокупности совпадают.

Вопрос о существовании первообразной будет изучаться несколько позже (см. п. 29.2), а теперь рассмотрим простейшие методы вычисления первообразных для элементарных функций.

Упражнение 1. Доказать, что для функции $\operatorname{sign} x$ не существует такой функции $F$, что для всех $x \in R$ выполнялось бы равенство $F'(x) = \operatorname{sign} x$.

### 22.2. ТАБЛИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции, называемая *интегрированием*, является действием, обратным дифференцированию, т. е. операции нахождения по данной функции ее производной (см. свойства 1 и 2 неопределенного интеграла в п. 22.1). Поэтому всякая формула, выражающая производную той или иной функции, т. е. формула вида $F'(x) = f(x)$, может быть обращена (записана в виде интегральной формулы):

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Используя это соображение, напишем таблицу значений ряда неопределенных интегралов, получающуюся непосредственно из соответствующей таблицы производных элементарных функций (см. § 9)

1. $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad x > 0, \ \alpha \neq -1.$

Если число $\alpha$ таково, что степень $x^\alpha$ имеет смысл и для всех $x \leqslant 0$, то формула 1 справедлива на любом промежутке. Например, формула

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

справедлива на всей числовой оси.

Однако для интеграла $\int \frac{dx}{x^2}$ уже нельзя написать подобную единую формулу, справедливую для всей ее области определения, т. е. для всей числовой оси, из которой исключено число ноль. В этом случае имеем:

$$\int \frac{dx}{x^2} = \begin{cases} -\frac{1}{x} + C_1 & \text{для} \quad x > 0 \\ -\frac{1}{x} + C_2 & \text{для} \quad x < 0. \end{cases}$$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

на любом промежутке, на котором $x \neq 0$.

3. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad a > 0,\ a \neq 1.$

В частности, $\int e^x\,dx = e^x + C$.

4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

9. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

11. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C.$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C, \qquad |x| < |a|.$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C,$

причем, когда под корнем стоит $x^2 - a^2$, предполагается, что $|x| > |a|$.

Само собой разумеется, что если знаменатель подынтегральной функции обращается в ноль в некоторой точке, то написанные формулы будут справедливы лишь для тех промежутков, в которых не происходит обращения в ноль указанного знаменателя (см. формулы 2, 6, 7, 11, 13, 15). Это замечание относится и к аналогичным ситуациям, которые встретятся нам в дальнейшем и не будут каждый раз специально оговариваться.

То, что производными функций, стоящих в правых частях этих формул, являются соответствующие подынтегральные выражения, проверяется непосредственным дифференцированием (см. примеры в § 9).

С помощью интегралов 1 — 15, называемых обычно *табличными интегралами*, и доказанных выше свойств неопределенного интеграла можно выразить интегралы и от более сложных элементарных функций также через элементарные функции.

Например,

$$\int\left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}\right)dx=$$
$$=5\int\cos x\,dx+2\int dx-3\int x^2dx+\int\frac{dx}{x}-4\int\frac{dx}{x^2+1}=$$
$$=5\sin x+2x-x^3+\ln|x|-4\operatorname{arctg}x+C.$$

Отметим, что для всякого многочлена степени $n$ существует первообразная и она является многочленом степени $n+1$, точнее,

$$\int(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)\,dx=$$
$$=a_0x+\frac{a_1x^2}{2}+\frac{a_2x^3}{3}+\ldots+\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}+C. \qquad (22.8)$$

Это следует из свойств 3 и 4 неопределенного интеграла (см. п. 22.1) и формулы 1 этого пункта.

*Если первообразная некоторой функции $f$ является элементарной функцией, то говорят, что интеграл $\int f(x)\,dx$ выражается через элементарные функции или что этот интеграл вычисляется.*

### 22.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОДСТАНОВКОЙ (ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ)

В этом и следующем пунктах будут рассмотрены два свойства неопределенного интеграла, часто оказывающиеся полезными при вычислении первообразных элементарных функций.

**Теорема 1.** *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ определены соответственно на промежутках $\Delta_x$ и $\Delta_t$, $\varphi(\Delta_t)\subset\Delta_t$, функция $\varphi$ непрерывна на промежутке $\Delta_t$ и дифференцируема в его внутренних точках. Тогда, если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$ на $\Delta_x$ и, следовательно, $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, то функция $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ имеет на $\Delta_t$ первообразную $F[\varphi(t)]$ и поэтому*

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt=F[\varphi(t)]+C. \qquad (22.9)$$

Доказательство. Функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на $\Delta_x$ по условию теоремы $\varphi(\Delta_t)\subset\Delta_x$, поэтому имеют смысл сложные функции $f[\varphi(t)]$ и $F[\varphi(t)]$. Поскольку функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на $\Delta_x$, она непрерывна на $\Delta_x$, и во внутренних точках $x$ промежутка $\Delta_x$ справедливо равенство $F'(x)=f(x)$. Функция $\varphi(t)$ по условию теоремы непрерывна на промежутке $\Delta_t$ и дифференцируема в его внутренних точках. Поэтому функция $F[\varphi(t)]$ непрерывна на $\Delta_t$ как композиция непрерывных функций, и согласно правилу дифференцирования сложных функций для всех внутренних точек промежутка $\Delta_t$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}F[\varphi(t)]=\left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=\varphi(t)}\frac{d\varphi(t)}{dt}=f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

т. е. функция $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ имеет в качестве одной из своих первообразных функцию $F[\varphi(t)]$. Отсюда сразу и следует формула (22.9). $\square$

Формула (22.9) часто применяется на практике при вычислении интегралов. Для удобства ее использования придадим ей несколько другой вид. Заметив, что

$$\int f(x)\,dx\,|_{x=\varphi(t)}=[F(x)+C]_{x=\varphi(t)}=F[\varphi(t)]+C,$$

перепишем формулу (22.9) в виде

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt=\int f(x)\,dx\,|_{x=\varphi(t)}. \tag{22.10}$$

Отсюда видно, что можно сначала вычислить интеграл $\int f(x)\,dx$, а затем вместо $x$ подставить функцию $\varphi(t)$. Эта формула и называется обычно *формулой интегрирования подстановкой*. Ее левую часть можно записать в другом виде согласно равенству

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt=\int f[\varphi(t)]\,d\varphi(t).$$

Отметим также, что формулу (22.10) бывает целесообразно использовать и в обратном порядке, т. е. справа налево. Именно, иногда бывает удобно вычисление интеграла

$$\int f(x)\,dx$$

с помощью соответствующей замены переменного $x=\varphi(t)$ свести к вычислению интеграла

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$$

(если этот интеграл в каком-то смысле «проще», чем исходный), т. е. использовать формулу (22.10) в виде

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\,|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \tag{22.11}$$

Эта формула непосредственно следует из (22.10), если в обеих ее частях сделать замену переменного $t=\varphi^{-1}(x)$, где $\varphi^{-1}$, как всегда, обозначает функцию, обратную функции $\varphi$. Чтобы функция $\varphi^{-1}$ существовала, в дополнение к условиям теоремы 1 достаточно, например, потребовать, чтобы на рассматриваемом промежутке функция $\varphi$ была строго монотонной. В этом случае, как известно (см. п. 6.3), будет существовать однозначная обратная функция $\varphi^{-1}$.

Формула (22.11) обычно называется *формулой интегрирования заменой переменной*.

Примеры. 1. Для вычисления интеграла $\int \cos ax\,dx$ естественно сделать подстановку $u=ax$, тогда

$$\int \cos ax dx=\frac{1}{a}\int \cos u du=\frac{1}{a}\sin u+C=\frac{\sin ax}{a}+C,\quad a\neq 0.$$

2. Для вычисления интеграла $\int \frac{xdx}{x^2+a^2}$ удобно применить подстановку $u=x^2+a^2$:

$$\int \frac{xdx}{x^2+a^2}=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C.$$

3. При вычислении интегралов вида $\int \frac{\varphi'(x)\,dx}{\varphi(x)}$, $\varphi(x)\neq 0$, полезна подстановка $u=\varphi(x)$:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx=\int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)}=\ln|\varphi(x)|+C.$$

Например,

$$\int \operatorname{tg} x\,dx=-\int \frac{d\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x}=\int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\,\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

4. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $a\neq 0$, в случае, когда подкоренное выражение неотрицательно на некотором интервале *), легко сводятся с помощью замены переменного к табличным.

Действительно, замечая, что $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$, сделаем замену переменной $t=\sqrt{|a|}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$ и положим $d=c-\frac{b^2}{4a}$. Тогда $dx=\frac{dt}{\sqrt{|a|}}$, и в силу формулы (22.11) получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int \frac{dt}{\sqrt{\pm t^2+d}}$$

(перед $t^2$ стоит знак «+», если $a>0$, и знак «−», если $a<0$). Интеграл, стоящий справа, является табличным (см. формулы 14 и 15 в п. 22.2). Найдя его по соответствующим формулам и вернувшись от переменной $t$ к $x$, получим искомый интеграл.

Подобным же приемом вычисляются и интегралы вида

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c},\quad a\neq 0$$

(см. об этом в п. 24.1).

*) В противном случае, т. е. когда подкоренное выражение отрицательно для всех $x\in R$, получится интеграл от комплекснозначной функции. Такие интегралы здесь не рассматриваются.

5. Интеграл $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ можно вычислить с помощью подстановки $x=a\sin t$ (см. также пример 2 в п. 22.4). Имеем $dx=$ $=a\cos t\,dt$, а поэтому

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int\cos^2 t\,dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=$$
$$=\frac{a^2}{2}\int dt+\frac{a^2}{2}\int\cos 2t\,dt=\frac{a^2t}{2}+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C.$$

Подставляя в полученное выражение $t=\arcsin\frac{x}{a}$ и замечая, что $\sin 2\arcsin\frac{x}{a}=2\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)=2\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=$ $=\frac{2}{a^2}x\sqrt{a^2-x^2}$ окончательно будем иметь

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Заметим, что для проверки результата, полученного при вычислении неопределенного интеграла, достаточно его продифференцировать, после чего должно получиться подынтегральное выражение вычисляемого интеграла.

Другие примеры на интегрирование с помощью замены переменного будут рассмотрены в § 25, 26.

## 22.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

**Теорема 2.** *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на некотором промежутке, дифференцируемы в его внутренних точках и на этом промежутке существует интеграл $\int v\,du$, то на нем существует и интеграл $\int u\,dv$, причем*

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du. \tag{22.12}$$

Доказательство. Для внутренних точек указанного в условиях теоремы промежутка по правилу дифференцирования произведения имеем

$$d(uv)=v\,du+u\,dv,\ \text{и поэтому}\ u\,dv=d(uv)-v\,du.$$

Интеграл от каждого слагаемого правой части существует, ибо по свойству 1° п. 22.1

$$\int d(uv)=uv+C,$$

а интеграл $\int v\,du$ существует по условию теоремы. Поэтому согласно свойству 3° п.22.1 существует и интеграл $\int u\,dv$, причем

$$\int u\,dv=\int d(uv)-\int v\,du. \tag{22.13}$$

Подставляя в правую часть (22.13) $uv+C$ вместо $\int d(uv)$ и относя произвольную постоянную $C$ к интегралу $\int v\,du$, получим формулу (22.12). □

С помощью формулы (22.12) вычисляются многие интегралы. При ее практическом использовании задана левая часть (22.12), т. е. функция $u$ и дифференциал $dv$, а поэтому $v$ определяется неоднозначно. Обычно в качестве $v$ выбирается функция, записываемая наиболее простой формулой.

Примеры. 1. Пусть требуется вычислить интеграл $\int xe^x\,dx$. Полагая

$$u=x,\quad dv=e^x dx,\ \text{откуда}\ du=dx,\quad v=e^x,$$

имеем

$$\int xe^x dx=\int x\,de^x=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C.$$

Заметим, что, взяв $u=e^x$ и $dv=x\,dx$, откуда $u=e^x$ и $v=x^2/2$, мы имели бы

$$\int xe^x dx=\frac{1}{2}x^2e^x-\frac{1}{2}\int x^2e^x dx,$$

т. е. интегрирование по частям привело бы к интегралу, более сложному, чем исходный. Отсюда видно, что при вычислении интегралов с помощью формулы (22.12) не каждый способ выбора функций $u$ и $v$ приводит к интегралу, более простому, чем первоначальный.

2. Вычислим интеграл $I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ посредством интегрирования по частям (ранее, см. п. 22.3, пример 5, он был вычислен с помощью замены переменного).

Полагая $u=\sqrt{a^2-x^2}$, $dv=dx$ и, следовательно, $du=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$, $v=x$, получим

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}. \tag{22.14}$$

Добавим и вычтем $a^2$ в числителе подынтегральной функции интеграла, стоящего в правой части равенства; тогда, произведя деление на $\sqrt{a^2-x^2}$, будем иметь

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\arcsin\frac{x}{a}-I.$$

Подставив это выражение в (2.14), получим:

$$I=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}-I. \tag{22.15}$$

Как уже отмечалось, всякое равенство такого вида представляет собой равенство между двумя множествами функций, элементы каждого из которых отличаются друг от друга на постоянную. Поэтому общее выражение для элемента множества $I$, согласно (22.15), имеет вид

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

3. Иногда для вычисления интеграла правило интегрирования по частям приходится применять несколько раз, например,

$$\int \arcsin^2 x dx = x\arcsin^2 x - 2\int \arcsin x\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=$$
$$=x\arcsin^2 x+2\int \arcsin x d\sqrt{1-x^2}=$$
$$=x\arcsin^2 x+2\arcsin x\sqrt{1-x^2}-2x+C.$$

4. Если $P_n(x)$ — многочлен степени $x$, то для вычисления интеграла $\int P_n(x)e^{\alpha x}dx$ следует формулу интегрирования по частям применить $n$ раз. Выполнив это, получим

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx=e^{\alpha x}\left(\frac{P_n(x)}{\alpha}-\frac{P'_n(x)}{\alpha^2}+\ldots+(-1)^n\frac{P_n^{(n)}(x)}{\alpha^{n+1}}\right)+C.$$

Другие примеры на применение интегрирования по частям будут рассмотрены в § 26.

## § 23. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЛАХ И МНОГОЧЛЕНАХ

### 23.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Как известно из алгебры *комплексными числами* называются выражения вида

$$z=x+iy,$$

где $i^2=-1$, а $x$ и $y$ — любые действительные числа. Множество всех комплексных чисел обозначается через $\boldsymbol{C}$. Число $x$ называется действительной частью, $y$ — мнимой частью комплексного числа $z=x+iy$. Это записывается следующим образом: $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$ *).

*) От латинских слов realis — действительный и imaginarius — мнимый.