Как уже отмечалось, всякое равенство такого вида представляет собой равенство между двумя множествами функций, элементы каждого из которых отличаются друг от друга на постоянную. Поэтому общее выражение для элемента множества I, согласно (22.15), имеет вид

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

3. Иногда для вычисления интеграла правило интегрирования по частям приходится применять несколько раз, например,

$$\int \arcsin^2 x dx = x \arcsin^2 x - 2\int \arcsin x \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= x \arcsin^2 x + 2\int \arcsin x d\sqrt{1-x^2} =$$
$$= x \arcsin^2 x + 2\arcsin x\sqrt{1-x^2} - 2x + C.$$

4. Если $P_n(x)$ — многочлен степени x, то для вычисления интеграла $\int P_n(x) e^{\alpha x} dx$ следует формулу интегрирования по частям применить n раз. Выполнив это, получим

$$\int P_n(x) e^{\alpha x} dx = e^{\alpha x}\left(\frac{P_n(x)}{\alpha} - \frac{P'_n(x)}{\alpha^2} + \ldots + (-1)^n \frac{P_n^{(n)}(x)}{\alpha^{n+1}}\right) + C.$$

Другие примеры на применение интегрирования по частям будут рассмотрены в § 26.

§ 23. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЛАХ И МНОГОЧЛЕНАХ

23.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Как известно из алгебры *комплексными числами* называются выражения вида

$$z = x + iy,$$

где $i^2 = -1$, а x и y — любые действительные числа. Множество всех комплексных чисел обозначается через $\boldsymbol{C}$. Число x называется действительной частью, y — мнимой частью комплексного числа $z = x + iy$. Это записывается следующим образом: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$*).

*) От латинских слов realis — действительный и imaginarius — мнимый.

Комплексное число z, не являющееся действительным, т. е. у которого $\operatorname{Im} z \neq 0$, будем называть *существенно комплексным числом*. Число $\sqrt{x^2+y^2}$ называется модулем комплексного числа $z=x+iy$ и обозначается $|z|$, т. е. $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Каждому комплексному числу $z=x+iy$ соответствует упорядоченная пара действительных чисел (x, y), и обратно, каждой упорядоченной паре действительных чисел (x, y) соответствует комплексное число $z=x+iy$. В силу этого взаимно однозначного соответствия (а также и в силу других обстоятельств, о которых речь будет ниже) комплексное число $z=x+iy$ геометрически удобно интерпретировать либо как точку (x, y), либо как радиус-вектор на плоскости с координатами x и y (при некоторой фиксированной прямоугольной декартовой системе координат).

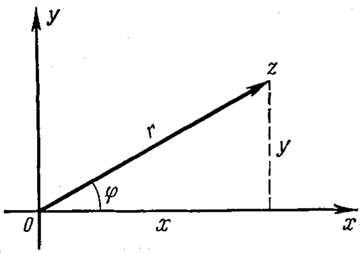

Рис. 94

Координатная плоскость, точка (x, y) которой (при любых $x, y \in \boldsymbol{R}$), отождествлена с числом $x+yi$, называется *комплексной плоскостью*. В ней ось Ox называется действительной, а Oy — мнимой осью.

Угол φ, образованный радиус-вектором z, $z \neq 0$, с положительным направлением оси Ox, называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Значения φ аргумента комплексного числа z, такие, что $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, обычно обозначают $\arg z$. Очевидно, что $\operatorname{Arg} z$ определяется комплексным числом $z \neq 0$ с точностью до целочисленного кратного 2π, в то время как $\arg z$ определяется уже числом $z \neq 0$ однозначно. Очевидно также, что

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + k\pi,$$

где $k=0$ для первой и четвертой координатных четвертей, $k=1$ для второй и $k=-1$ для третьей. Если $x=0$, то при $y \neq 0$ считается, что $\arg z = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} y$, а при $x=y=0$ $\arg z$ не определен.

Пусть $|z|=r$, $\operatorname{Arg} z = \varphi$, тогда (рис. 94) $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, и поэтому

$$z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Правая часть этого равенства называется *тригонометрической формой комплексного числа* z.

Комплексные числа $x_1+y_1 i$ и $x_2+y_2 i$ считаются равными тогда и только тогда, когда $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$. По определению полагают также $x+0i=x$, $0+yi=yi$, $0+0i=0$.

Сумма двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется согласно формуле

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \qquad (23.1)$$

Иначе говоря, действительная и мнимая части суммы $z_1 + z_2$ равны суммам соответственно действительных и мнимых частей z_1 и z_2.

Разность комплексных чисел определяется как действие, обратное сложению, т. е. разность $z = z_1 - z_2$ является таким числом z, что $z_2 + z = z_1$. Следовательно, если $z = x + iy$, то $x_2 + x + i(y_2 + y) = x_1 + iy_1$. Отсюда $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$, т. е. действительная и мнимая части разности $z_1 - z_2$ равны разностям соответственно действительных и мнимых частей чисел z_1 и z_2.

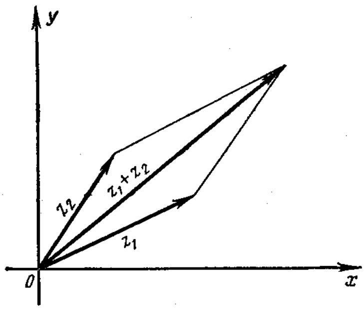

Рис. 95

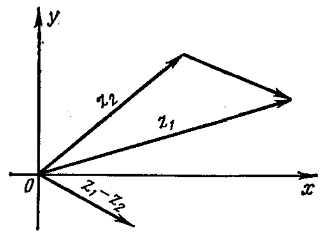

Рис. 96

Поскольку геометрически действительная и мнимая части комплексного числа являются его координатами и при сложении (вычитании) координат векторов сами векторы также складываются (вычитаются), то формула (23.1) означает, что геометрически комплексные числа складываются и вычитаются как векторы (рис. 95 и 96).

Произведение двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется по формуле

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \qquad (23.2)$$

Найдем формулы умножения комплексных чисел в тригонометрической форме. Если

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

то

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) &+ \\ + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)] &= \\ = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \text{*)}. \tag{23.3}$$

Методом математической индукции легко показать, что

$$|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_n|,$$
$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2 \ldots z_n) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + \ldots + \operatorname{Arg} z_n.$$

Отсюда, полагая $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$, для степени z^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, комплексного числа z имеем

$$|z^n| = |z|^n, \quad \operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \text{**)}$$

в частности, при $|z| = 1$, т. е. когда $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \tag{23.4}$$

Это соотношение называется формулой Муавра. ***)

Деление $\frac{z_1}{z_2}$ комплексного числа z_1 на комплексное число $z_2 \neq 0$ определяется как операция, обратная умножению, т. е. число $z = \frac{z_1}{z_2}$ называется *частным от деления* z_1 на z_2, если $z_1 = z_2 z$. Поэтому

$$|z_1| = |z_2||z| \quad \text{и} \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + \operatorname{Arg} z,$$

откуда

$$|z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2. \tag{23.5}$$

Формулами (23.5) комплексное число $z = \frac{z_1}{z_2}$ при заданных z_1 и $z_2 \neq 0$ очевидно, определено однозначно. Ряд других свойств комплексных чисел, как, например, коммутативность и ассоциативность сложения и умножения, дистрибутивность умножения относительно сложения и другие свойства, непосредственно следуют из формул, с помощью которых определены эти операции для комплексных чисел, и из соответствующих свойств действительных чисел. Поэтому не будем на них подробно останавливаться.

Корень n-й степени $w = \sqrt[n]{z}$ из комплексного числа z определяется как такое число w, n-я степень которого равна подкоренному выражению:

$$w^n = z.$$

Если

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \text{а} \quad w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),$$

*) Это равенство, как и вообще все равенства, содержащие Arg, следует понимать как равенство соответствующих множеств.

**) Заметим, что $\operatorname{Arg} z^n \neq n \operatorname{Arg} z$, $n = 2, 3, \ldots$.

***) А. Муавр (1667—1754) — французский математик.

то

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi);$$

отсюда

$$\rho = \sqrt[n]{r}.$$

Здесь корень понимается в арифметическом смысле — как неотрицательное действительное число, ибо по определению модуля комплексного числа $\rho \geqslant 0$.

Далее,

$$n\psi = \varphi + 2k\pi \quad (k \text{ — целое}), \quad \text{или} \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

По существу различные значения аргумента получатся при значениях $k = 0, 1, \ldots, n-1$: различные в том смысле, что если обозначить эти значения аргумента через ψ_k и положить $w_k = \rho(\cos\psi_k + i\sin\psi_k)$, то при $\rho \neq 0$ получатся различные комплексные числа. При всех остальных k значения ψ будут отличаться от указанных чисел ψ_k на кратное 2π, т. е. эти значения аргумента будут приводить к одному из комплексных чисел w_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Таким образом, корень $\sqrt[n]{z}$ имеет при $z \neq 0$ в точности n значений $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$.

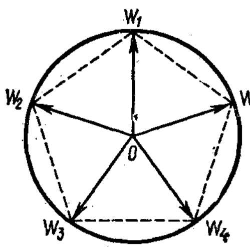

Рис. 97

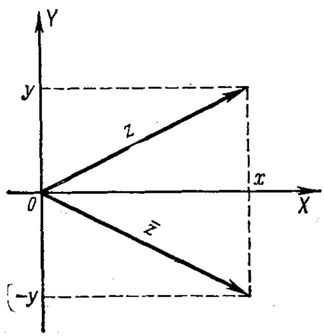

Рис. 98

В комплексной плоскости числа w_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в круг радиуса ρ с центром в начале координат. Это следует из того, что аргумент числа w_k отличается от аргумента числа w_{k-1} при всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$ на одно и то же число $2\pi/n$. На рис. 97 изображен случай $n = 5$.

Каждому комплексному числу $z = x + iy$ соответствует число $x - iy$, которое называется *сопряженным* с z и обозначается $\bar{z}$; $\bar{z} = x - iy$. Геометрически число $\bar{z}$ изображается вектором, симметричным с вектором z относительно оси Ox (рис. 98).

Свойства сопряженных комплексных чисел

1°. $|\bar{z}|=|z|$, $\arg \bar{z}=-\arg z$.
2°. $z\bar{z}=|z|^2$.
3°. $\bar{\bar{z}}=z$.
4°. $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$.
5°. $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$.
6°. $\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$.
7°. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$.

Свойство 1 очевидно (см. рис. 98).

Далее, согласно правилу умножения комплексных чисел,

$$z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2. \ \square$$

Свойство 3 также очевидно: если $z=x+iy$, то $\bar{z}=x-iy$ и $\bar{\bar{z}}=\overline{x-iy}=x+iy=z$. $\square$

В справедливости свойства 4 можно убедиться геометрически, взяв параллелограмм, симметричный относительно оси Ox с параллелограммом, построенным на векторах z_1 и z_2 как на сторонах (рис. 99), т. е. параллелограмм, натянутый на векторы $\bar{z}_1$ и $\bar{z}_2$. Диагонали этих параллелограммов будут также симметричными друг другу относительно оси Ox и, следовательно, будут соответственно равными z_1+z_2 и $\overline{z_1+z_2}$. С другой стороны, последняя диагональ, как сумма векторов $\bar{z}_1$ и $\bar{z}_2$, равна также и $\bar{z}_1+\bar{z}_2$. $\square$

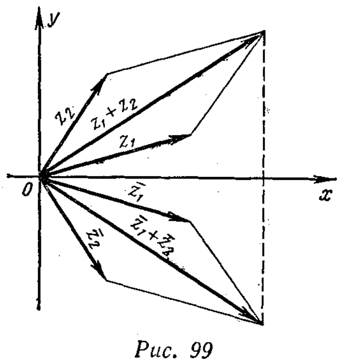

Рис. 99

Свойство 5° доказывается аналогично.

Свойства 6° и 7° следует из того, что модули и аргументы выражений, стоящих в разных частях соответствующих равенств, совпадают. Действительно, используя свойство 1, получим

$$|\overline{z_1 z_2}|=|z_1 z_2|=|z_1|\cdot|z_2|=|\bar{z}_1|\cdot|\bar{z}_2|=|\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2|,$$

$$\operatorname{Arg}\overline{z_1 z_2}=-\operatorname{Arg} z_1 z_2=-(\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2)=$$
$$=-\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2=\operatorname{Arg}\bar{z}_1+\operatorname{Arg}\bar{z}_2=\operatorname{Arg}\bar{z}_1\bar{z}_2. \ \square$$

Аналогично доказывается свойство 7°.

Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо *неравенство треугольника*

$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$ и его следствие $||z_1|-|z||\leqslant|z_1-z_2|$.

Первое из этих неравенств геометрически означает, что длина стороны треугольника не превосходит суммы длин двух других его сторон (см. рис. 95), а второе — что разность длин двух сторон треугольника не превосходит длины третьей стороны (см. рис. 96).

23.2*. ФОРМАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Вдумчивый читатель обратил внимание на то, что приводимая в п. 23.1 формулировка «выражения вида $z=x+iy$ называются комплексными числами» не является четким определением комплексных чисел.

Множество комплексных чисел $\boldsymbol{C}$ можно определить как множество упорядоченных пар (x, y) действительных чисел, $x\in\boldsymbol{R}$, $y\in\boldsymbol{R}$, в котором введены операции сложения и умножения согласно следующему определению:

$$(x,\ y)+(x',\ y')\overset{\text{def}}{=}(x+x',\ y+y'),$$
$$(x,\ y)(x',\ y')\overset{\text{def}}{=}(xx'-yy',\ xy'+x'y),$$
$$(x,\ y)\in\boldsymbol{C},\ (x',\ y')\in\boldsymbol{C}.$$

Нетрудно проверить, что в результате этого определения множество указанных пар превращается в поле, т. е. удовлетворяет условиям I, II, III п. 2.1. Полученное таким образом поле, а также каждое изоморфное ему, называется *полем комплексных чисел*.

Пары $(x, 0)$ обозначаются просто через x (их совокупность изоморфна полю действительных чисел), а пара $(0, 1)$ обозначается через i: $i\overset{\text{def}}{=}(0,\ 1)$.

Согласно определенной операции умножения

$$i^2=(0,\ 1)(0,\ 1)=(-1,\ 0)=-1, \text{ т. е. } i^2=-1.$$

Для любого комплексного числа (x, y) имеет место легко проверяемое тождество

$$(x,\ y)=x+iy.$$

Действительно,

$$(x,\ y)=(x,\ 0)+(0,\ y)=(x,\ 0)+(0,\ 1)(y,\ 0)=x+iy,$$

и мы снова пришли к записи комплексных чисел, из которой исходили в п. 23.1.

23.3. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ АНАЛИЗА В ОБЛАСТИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Понятия числовой последовательности и ее предела легко обобщаются и на случай комплексных чисел.

Функция, определенная на множестве натуральных чисел и имеющая своими значениями комплексные числа, называется *последовательностью комплексных чисел.* Как и в случае действительных чисел, комплексное число z, соответствующее натуральному числу n, снабжается индексом n: z_n, $n=1, 2, \ldots$.

Определение 1. *Пусть задана последовательность комплексных чисел* $z_n=x_n+iy_n$, $n=1, 2, \ldots$. *Число* $\zeta=\xi+i\eta$ *называется ее пределом, если для любого действительного числа* $\varepsilon>0$ *существует такой номер* n_ε, *что при* $n\geqslant n_\varepsilon$ *выполняется неравенство*

$$|z_n-\zeta|<\varepsilon.$$

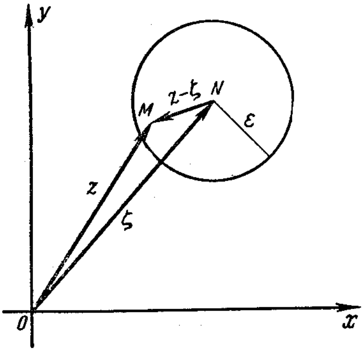

Рис. 100

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\zeta$ и говорят, что последовательность $\{z_n\}$ сходится к числу ζ.

Таким образом, по форме это определение совершенно такое же, как для предела последовательности действительных чисел.

Геометрически, если обозначить через M_n конец радиус-вектора z_n, т. е. точку с координатами (x_n, y_n), а через N — точку с координатами (ξ, η), то равенство $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\zeta$ будет иметь место в том и только том случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty} M_n=N$ в смысле п. 18.1. Это непосредственно следует из того, что совокупность концов $M=(x, y)$ векторов $z=x+iy$ таких, что $|z-\zeta|<\varepsilon$, образует ε-окрестность точки $N=(\xi, \eta)$ (рис. 100).

Из сказанного следует (см. п. 18.1), что последовательность $z_n=x_n+iy_n$ сходится к числу $\zeta=\xi+i\eta$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\xi, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n=\eta.$$

Последовательность комплексных чисел, имеющая своим пределом ноль, называется *бесконечно малой.*

На последовательности комплексных чисел естественным образом переносится ряд теорем о пределах последовательностей действительных чисел, например, теорема о единственности предела, об ограниченности последовательности, имеющий предел, критерий Коши и т. п.

В § 8 были введены обозначения «o» и «O» для сравнения функций. В дальнейшем понадобятся такие же обозначения и для последовательностей.

Определение 2. *Будем говорить, что последовательность* $\{z_n\}$ *ограничена относительно последовательности* $\{w_n\}$ *и писать* $z_n = O(w_n)$ *), *если существует постоянная* $c > 0$, *такая, что* $|z_n| \leqslant c|w_n|$, $n = 1, 2, \ldots$.

Это определение в случае $w_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, эквивалентно следующему: для двух данных последовательностей $\{z_n\}$ и $\{w_n\}$ существуют постоянная $c' > 0$ и номер n_0, такие, что

$$|z_n| \leqslant c'|w_n|, \quad n = n_0, n_0+1, \ldots.$$

Действительно, полагая в этом случае

$$c = \max\left\{\left|\frac{z_1}{w_1}\right|, \left|\frac{z_2}{w_2}\right|, \ldots, \left|\frac{z_{n_0-1}}{w_{n_0-1}}\right|, c'\right\},$$

получим

$$|z_n| \leqslant c|w_n|, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

т. е. первоначальное определение.

Определение 3. *Если* $z_n = O(w_n)$ *и* $w_n = O(z_n)$, *то будем говорить, что последовательности* $\{z_n\}$ *и* $\{w_n\}$ *одного порядка* и писать $z_n \asymp w_n$.

Определение 4. *Будем говорить, что последовательность* $\{z_n\}$ *является бесконечно малой по сравнению с последовательностью* $\{w_n\}$ *и писать* $z_n = o(w_n)$, *если существует бесконечно малая последовательность* $\{\alpha_n\}$ *такая, что* $z_n = \alpha_n w_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Определение 5. *Последовательности* $\{z_n\}$ *и* $\{w_n\}$ *называются эквивалентными, или асимптотически равными, если существует такая последовательность* $\{\varepsilon_n\}$, *что*

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 1 \quad \textit{и} \quad z_n = \varepsilon_n w_n, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

В этом случае пишется $z_n \sim w_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Упражнения. 1. Доказать, что для того чтобы $z_n \sim w_n$, необходимо и достаточно, чтобы $z_n = w_n + o(w_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

2. Доказать: если $z_n = cw_n + o(w_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, то $z_n = O(w_n)$.

Можно рассматривать и функции комплексного аргумента. Например, $f(z) = |z|$, $f(z) = z^2$. Обе эти функции определены на множестве всех комплексных чисел, первая из них принимает только неотрицательные действительные значения, вторая и существенно комплексные.

---

*) Иногда к этому добавляют: при $n \to \infty$.

Геометрически, если функция $f(z)$ определена на некотором множестве E n-мерного евклидова пространства R^n и принимает комплексные значения, то она задает отображение множества E в плоскость. Например, функция $w=|z|$ отображает плоскость на полупрямую, а функция $w=z^2$ всю плоскость на всю плоскость, как говорят, двукратным образом — в данном случае это означает, что при отображении $w=z^2$ каждая точка образа, кроме нуля, имеет прообраз, состоящий из двух точек.

Если множество E, на котором задана некоторая функция, лежит на плоскости R^2, то его можно рассматривать всегда при фиксированной системе координат как множество комплексных чисел, а заданную функцию как функцию комплексного аргумента.

Для комплекснозначных функций, определенных на множестве E n-мерного пространства R^n, можно ввести многие из понятий, введенных ранее для действительнозначных функций (предел, непрерывность, частные производные, дифференцируемость, интеграл и др.). В ближайших параграфах нам придется встретиться лишь с понятием ограниченности и непрерывности комплекснозначных функций.

Комплекснозначная функция $f(P)$, $P\in E$, называется *ограниченной на множестве* E, если на этом множестве ограничена функция $|f(P)|$.

Таким образом, понятие ограниченности комплекснозначной функции f сводится к понятию ограниченности действительнозначной функции $|f|$.

Определение 6. *Пусть комплекснозначная функция f определена на множестве $E\subset R^n$ и пусть $P_0\in E$. Функция f называется непрерывной в точке P_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех точек $P\in E$, удовлетворяющих условию $\rho(P, P_0)<\delta$, выполняется неравенство*

$$|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon.$$

Мы видим, что по форме это определение полностью совпадает с определением непрерывности для действительнозначных функций (ср. с п. 19.3).

В случае, когда E — плоское множество и, стало быть, его точки можно рассматривать как комплексные числа z, определение непрерывности примет вид: функция $f(z)$ непрерывна в точке $z_0\in E$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех $z\in E$, удовлетворяющих условию $|z-z_0|<\delta$, выполняется неравенство

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon.$$

Комплекснозначная функция, непрерывная в каждой точке некоторого множества, называется непрерывной на этом множестве. В силу определения непрерывности функции и неравенства

$$||f(P)|-|f(P_0)||\leqslant|f(P)-f(P_0)|,$$

очевидно, что если функция $f(P)$, определенная на множестве $E \subset R^n$, непрерывна в какой-то точке P_0 этого множества: $P_0 \in E$, то и действительнозначная функция $|f(P)|$ непрерывна на этом множестве. Поэтому, если комплекснозначная функция f непрерывна на компакте $E \subset R^n$, то, согласно сказанному, функция $|f|$ также непрерывна, а следовательно, и ограничена на этом компакте. Это, по данному выше определению ограниченности функции, означает ограниченность и самой функции f. Таким образом, для непрерывных комплекснозначных функций справедлив аналог первого утверждения теоремы Вейерштрасса (см. теорему 3 в п. 19.4): функция, непрерывная на компакте, ограничена на нем.

Переносятся на комплекснозначные функции и теоремы о том, что если две функции f и g, определенные на некотором множестве $E \subset R^n$, непрерывны в точке $P_0 \in E$, то и функции $f+g$, fg, а если $g(P_0) \neq 0$, то и f/g непрерывны в этой точке. Из этой теоремы следует, например, что любой многочлен $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ с комплексными коэффициентами a_k, $k=0, 1, \ldots, n$ непрерывен в любой точке $z_0 \in C$ (ср. с п. 7.1).

23.4. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

Пусть

$$P_n(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0 \tag{23.6}$$

— многочлен с комплексными в общем случае коэффициентами A_j, $j=0, 1, \ldots, n$. Если $A_n \neq 0$, то число n называется *степенью многочлена*.

Из алгебры известно, что если степень m многочлена $Q_m(x)$ не превышает степени n многочлена $P_n(x)$, то существуют такие многочлены $S_k(x)$ степени k и $R_l(x)$ степени l, что $n = m + k$, $0 \leqslant l < m$, и многочлен $P_n(x)$ представим в виде

$$P_n(x) = S_k(x) Q_m(x) + R_l(x).$$

При этом такое представление единственно.

Операция нахождения многочленов $S_k(x)$ и $R_l(x)$ по заданным многочленам $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ называется *делением многочлена* $P_n(x)$ на $Q_m(x)$, многочлен $P_n(x)$ — *делимым*, $Q_m(x)$ — *делителем*, $S_k(x)$ — *частным*, $R_l(x)$ — остатком от деления $P_n(x)$ на $Q_m(x)$.

Отметим, что из $m=1$ следует, что $l=0$, т. е. в этом случае остаток от деления является константой.

Комплексное число z_0 такое, что

$$P_n(z_0) = 0,$$

называется *корнем* данного многочлена (23.6).

Если многочлен $P_n(z)$ степени $n \geqslant 1$ разделить на $z-\zeta$, где ζ — какое-либо комплексное число, то получим

$$P_n(z) = (z-\zeta) Q_{n-1}(z) + r,$$

где $Q_{n-1}(z)$ — многочлен степени $n-1$, а остаток r — постоянная. Отсюда непосредственно следует, что число z_0 является корнем многочлена $P_n(z)$ тогда и только тогда, когда многочлен $P_n(z)$ делится без остатка на $z-z_0$ (теорема Безу *)).

Если многочлен $P_n(z)$ делится на $(z-z_0)^k$ (k — положительное целое) и не делится на $(z-z_0)^{k+1}$, то число k называется *кратностью корня* z_0.

Таким образом, если комплексное число z_0 является корнем кратности k многочлена $P_n(z)$, то

$$P_n(z) = (z-z_0)^k Q_{n-k}(z),$$

где $Q_{n-k}(z)$ — такой многочлен степени $n-k$, что $Q_{n-k}(z_0) \neq 0$.

В курсе алгебры доказывается, что *всякий многочлен* $P_n(z)$ *степени* $n \geqslant 1$ *имеет по крайней мере один корень* z_1. Если его кратность равна k_1, то, как отмечалось, справедливо разложение

$$P_n(z) = (z-z_1)^{k_1} Q_{n-k_1}(z), \quad Q_{n-k_1}(z_1) \neq 0,$$

где степень многочлена $Q_{n-k_1}(z)$ меньше n. Многочлен $Q_{n-k_1}(z)$, если его степень больше 1, также имеет хотя бы один корень z_2. Если кратность этого корня равна k_2, то

$$P_n(z) = (z-z_1)^{k_1} (z-z_2)^{k_2} Q_{n-k_1-k_2}(z),$$
$$Q_{n-k_1-k_2}(z_1) \neq 0, \quad Q_{n-k_1-k_2}(z_2) \neq 0.$$

Продолжая этот процесс дальше, через конечное число m шагов получим многочлен нулевой степени $P_{n-k_1-\ldots-k_m}(z) = A_n$ и, следовательно, для многочлена $P_n(z)$ справедливо следующее разложение на множители:

$$P_n(z) = A_n (z-z_1)^{k_1} (z-z_2)^{k_2} \ldots (z-z_m)^{k_m}, \tag{23.7}$$

где $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, откуда следует, что *каждый многочлен степени* $n \geqslant 1$ *имеет в точности* n *корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

Для многочлена (23.6) обозначим через $\bar{P}_n(z)$ многочлен, коэффициенты которого являются комплексными числами, сопряженными коэффициентам многочлена $P_n(z)$:

$$\bar{P}_n(z) = \bar{A}_n z^n + \bar{A}_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \bar{A}_1 z + \bar{A}_0.$$

Многочлен $\bar{P}_n(z)$ называется многочленом, *сопряженным* многочлену $P_n(z)$.

---

*) Э. Безу (1730—1783) — французский математик.

В силу свойств сопряженных комплексных чисел имеем

$$\overline{P_n(z)} = \bar{P}_n(\bar{z}).$$

Действительно,

$$\overline{P_n(z)} = \overline{A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_n z + A_0} =$$
$$= \bar{A}_n \bar{z}^n + \bar{A}_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \ldots + \bar{A}_1 \bar{z} + \bar{A}_0 = \bar{P}_n(\bar{z}).$$

Очевидно также, что $\bar{\bar{P}}(z) = P(z)$.

Покажем, что если число z_0 является корнем многочлена $P_n(z)$ кратности k, то сопряженное ему число $\bar{z}_0$ является корнем сопряженного многочлена $\bar{P}_n(z)$ и притом той же кратности.

В самом деле, переходя в формулах

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z), \quad Q_{n-k}(z_0) \neq 0,$$

к сопряженным выражениям, получим

$$\bar{P}_n(\bar{z}) = (\bar{z} - \bar{z}_0)^k \bar{Q}_{n-k}(\bar{z}), \quad \bar{Q}_{n-k}(\bar{z}_0) \neq 0.$$

Полагая для наглядности $\zeta = \bar{z}$ ($\bar{z}$, как и z — произвольные комплексные числа), перепишем полученные формулы в виде

$$\bar{P}_n(\zeta) = (\zeta - \bar{z}_0)^k \bar{Q}_{n-k}(\zeta), \quad \bar{Q}_{n-k}(\bar{z}_0) \neq 0.$$

Это и означает, что число $\bar{z}_0$ является корнем кратности k для многочлена $\bar{P}_n(z)$.

Пусть теперь все коэффициенты многочлена $P_n(z)$ суть действительные числа. В этом случае сопряженный многочлен $\bar{P}_n(z)$, очевидно, совпадает с самим многочленом $P_n(z)$. Поэтому из доказанного следует, что если комплексное число z_0 является корнем кратности k многочлена $P_n(z)$ с действительными коэффициентами, то и сопряженное ему число $\bar{z}_0$ также является корнем кратности k этого многочлена.

Отметим далее, что произведение $(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$ всегда является многочленом (относительно z) с действительными коэффициентами. Действительно, пусть $z_0 = a + bi$, где a и b действительны. Тогда $\bar{z}_0 = a - bi$, и поэтому

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = (z - a - bi)(z - a + bi) =$$
$$= (z - a)^2 + b^2 = z^2 - 2az + a^2 + b^2 = z^2 + pz + q, \qquad (23.8)$$

где положено $p = -2a$ и $q = a^2 + b^2$; очевидно, p и q действительны. Отметим, что $\frac{p^2}{4} - q = -b^2$, поэтому при $b \neq 0$, т. е. тогда, когда корень z_0 является существенно комплексным числом, выполняется неравенство

$$\frac{p^2}{4} - q < 0. \qquad (23.9)$$

Обратим внимание и на справедливость обратного утверждения: если выполнено неравенство (23.9), то корни трехчлена z^2+pz+q (p и q действительны) — существенно комплексные числа.

Из сказанного следует, что для всякого многочлена степени n с действительными коэффициентами справедливо разложение на множители вида

$$P_n(x)=A_n(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots \\ \ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}, \quad (23.10)$$

где

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i+2\sum_{i=1}^{s}\beta_i=n, \quad \frac{p_j^2}{4}-q_j<0, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ s,$$

и все коэффициенты A_n, a_1, $\ldots$, a_r; p_1,q_1, $\ldots$, p_s, q_s действительны. При этом a_1, $\ldots$, a_r суть все действительные корни многочлена $P_n(x)$, а каждому существенно комплексному корню z_0 и ему сопряженному корню $\bar{z}_0$ соответствует множитель вида $x^2+px+q=(x-z_0)(x-\bar{z}_0)$. Вместо буквы z, употреблявшейся выше для обозначения аргумента рассматриваемого многочлена, здесь по традиции написана буква x, чтобы подчеркнуть, что все рассмотрения происходят в действительной области (это означает, что коэффициенты многочлена x^2+px+q действительны).

Формула (23.10) непосредственно следует из формул (23.7) и (23.8): нужно в разложении (23.7) сгруппировать попарно множители с сопряженными корнями и записать произведения вида $(z-z_0)(z-\bar{z}_0)$ в форме (23.8). Тогда, замечая, что кратность сопряженных корней z_0 и $\bar{z}_0$ одинакова, мы и получим формулу (23.10).

Разложение многочлена на множители вида (23.10) единственно, ибо оно однозначно определяется корнями этого многочлена и их кратностями.

23.5*. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть дан многочлен $P(x)$. Всякий многочлен $R(x)$, на который делится многочлен $P(x)$, т. е.

$$P(x)=R(x)\,r(x), \quad (23.11)$$

где $r(x)$ — также многочлен, называется *делителем* многочлена $P(x)$.

Мы видели, что многочлен $P(x)$ можно записать в виде

$$P(x)=A(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots \\ \ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}, \quad (23.12)$$

где $a_1, \ldots, a_r$ — действительные корни многочлена, а множители вида $x^2+p_jx+q_j$ соответствуют существенно комплексным корням этого многочлена,

$$\frac{p_j^2}{4}-q_j<0, \quad j=1,\ 2, \ldots,\ s;$$

коэффициенты A, p_j и q_j $(j=1,\ 2, \ldots,\ s)$ действительны. Отсюда следует, что всякий делитель $R(x)$ многочлена $P(x)$ может быть записан в виде

$$R(x)=B(x-a_1)^{\lambda_1}\ldots(x-a_r)^{\lambda_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\mu_s}, \qquad (23.13)$$

где $\lambda_i\leqslant\alpha_i$, $i=1,\ 2, \ldots,\ r$, $\mu_j\leqslant\beta_j$, $j=1,\ 2, \ldots,\ s$. (23.14)

Действительно, никаких других множителей вида

$$x-a \text{ и } x^2+px+q, \qquad (23.15)$$

где a, p и q действительны и $\frac{p^2}{4}-q<0$ в разложении многочлена $R(x)$ быть не может, ибо, с одной стороны, многочлен $R(x)$, как всякий многочлен, может быть разложен на множители вида (23.15), с другой стороны, из формулы (23.11) следует, что если в разложении $R(x)$ на множители имеется множитель вида $x-a$, соответственно вида x^2+px+q, то $x=a$, соответственно корни трехчлена x^2+px+q, являются и корнями многочлена $P(x)$; поэтому указанные множители входят в разложение (23.12). Неравенства (23.14) также очевидны: из той же формулы (23.11) следует, что кратность корня многочлена $R(x)$ не может превышать кратности того же корня многочлена $P(x)$.

Пусть теперь даны два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$. Всякий многочлен, являющийся делителем как многочлена $P(x)$, так и многочлена $Q(x)$, называется их *общим делителем*. Общий делитель двух многочленов, который делится на любой общий делитель этих многочленов, называется их *наибольшим общим делителем*.

Если многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ записаны в виде (23.12):

$$P(x)=A'(x-a_1')^{\alpha_1'}\ldots(x-a_{r'}')^{\alpha_{r'}'}(x^2+p_1'+q_1')^{\beta_1'}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_{s'}'x+q_{s'}')^{\beta_{s'}'}, \qquad (23.16)$$

$$Q(x)=A''(x-a_1'')^{\alpha_1''}\ldots(x-a_{r''}'')^{\alpha_{r''}''}(x^2+p_1''x+q_1'')^{\beta_1''}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_{s''}''x+q_{s''}'')^{\beta_{s''}''}, \qquad (23.17)$$

то всякий их общий делитель $R(x)$ можно записать в виде (23.13), где множители

$$x-a_k \ (k=1,\ 2, \ldots,\ r),\ x^2+p_lx+q_l \ (l=1,\ 2, \ldots,\ s) \qquad (23.18)$$

входят как в разложение (23.16), так и в разложение (23.17).

Пусть индексы y коэффициентов множителей (23.18) в разложениях (23.16) и (23.17) равны соответственно i'_k, j'_l и i''_k, j''_l, тогда в силу неравенств (23.14) имеем

$$\begin{aligned} &\lambda_k \leqslant \alpha'_{i'_k}, \quad \lambda_k \leqslant \alpha''_{i''_k}, \qquad k=1, 2, \ldots, r, \\ &\mu_l \leqslant \beta'_{j'_l}, \ \mu_l \leqslant \beta''_{j''_l}, \qquad l=1, 2, \ldots, s. \end{aligned} \tag{23.19}$$

Для того чтобы многочлен (23.13) был наибольшим общим делителем многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, необходимо и достаточно, чтобы показатели степени λ_k, $k=1, 2, \ldots, r$ и μ_l, $l=1, 2, \ldots, s$ были максимальными из возможных, т. е. чтобы

$$\begin{aligned} &\lambda_k = \min\left\{\alpha'_{i'_k}, \ \alpha''_{i''_k}\right\}, \qquad k=1, 2, \ldots, r, \\ &\mu_l = \min\left\{\beta'_{j'_l}, \ \beta''_{j''_l}\right\}, \qquad l=1, 2, \ldots, s. \end{aligned} \tag{23.20}$$

Действительно, при выполнении этих условий многочлен $R(x)$ будет общим делителем многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, кроме того он будет делиться на любой многочлен вида (23.13), для которого выполнены условия (23.19), т. е. $R(x)$ будет делиться на любой общий делитель многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. $\square$

Из найденного вида общего делителя, и в частности, наибольшего общего делителя следует, во-первых, что наибольший общий делитель двух многочленов не единственен; однако два наибольших общих делителя двух данных многочленов могут отличаться друг от друга лишь постоянным множителем (постоянную B в формуле (23.13) можно брать произвольной, неравной нулю); во-вторых, что наибольший общий делитель двух многочленов имеет степень, бóльшую, чем любой их общий делитель, не являющийся наибольшим общим делителем.

В качестве примера, полезного для дальнейшего, найдем наибольший общий делитель многочлена $P(x)$ и его производной $P'(x)$.

Предварительно заметим, что если число a является действительным корнем кратности α многочлена $P(x)$, т. е.

$$P(x) = (x-a)^{\alpha} P_1(x), \quad P_1(a) \neq 0, \tag{23.21}$$

то a является корнем кратности $\alpha - 1$ для многочлена $P'(x)$.

Действительно, дифференцируя (23.21), имеем

$$P'(x) = \alpha(x-a)^{\alpha-1} P_1(x) + (x-a)^{\alpha} P'_1(x) = (x-a)^{\alpha-1} P_2(x),$$

где

$$P_2(x) = \alpha P_1(x) + (x-a) P'_1(x)$$

и

$$P_2(a) = \alpha P_1(a) \neq 0.$$

Подобным образом, если

$$P(x) = (x^2 + px + q)^{\beta} P_3(x), \tag{23.22}$$

где $\frac{p^2}{4}-q<0$, и, значит, корни z_1 и z_2 ($z_2=\bar{z}_1$) трехчлена x^2+ $+px+q$ существенно комплексны, и если

$$P_3(z_1)\neq 0,\ P_3(z_2)\neq 0,\quad \text{то}\quad P'(x)=(x^2+px+q)^{\beta-1}P_4(x),$$

где $P_4(z_1)\neq 0$, $P_4(z_2)\neq 0$, т. е. $P_4(z)$ не делится на x^2+px+q.

Действительно, дифференцируя (23.22), получим:

$$P'(x)=\beta(x^2+px+q)^{\beta-1}(2x+p)P_3(x)+\\ +(x^2+px+q)^{\beta}P_3'(x)=(x^2+px+q)^{\beta-1}P_4(x),$$

где $P_4(x)=\beta(2x+p)P_3(x)+(x^2+px+q)P_3'(x)$, откуда следует, что

$$P_4(z_1)=\beta(2z_1+p)P_3(z_1)\neq 0,\quad P_4(z_2)=\beta(2z_2+p)P_3(z_2)\neq 0,$$

ибо $z_1\neq -p/2$ и $z_2\neq -p/2$, так как они существенно комплексны. □

Из доказанного следует, что если многочлен $P(x)$ записан в виде (23.12), то его производную $P'(x)$ можно представить в виде

$$P'(x)=C(x-a_1)^{\alpha_1-1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}\ldots\\ \ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}P_5(x),$$

где многочлен $P_5(x)$ не делится ни на $x-a_i$, $i=1, 2, \ldots, r$, ни на $x^2+p_jx+q_j$, $j=1, 2, \ldots, s$, т. е. не имеет общих корней с многочленом $P(x)$.

Из формул (23.13) и (23.20) получаем, что наибольший общий делитель $R(x)$ многочлена $P(x)$ и его производной $P'(x)$ имеет вид

$$R(x)=(x-a_1)^{\alpha_1-1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}\ldots\\ \ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}. \quad (23.23)$$

Изложенный метод получения наибольшего общего делителя двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ принципиально полностью решает вопрос о существовании и виде наибольшего общего делителя. Практическое же его применение может, однако, вызвать существенные затруднения: для использования этого метода надо знать разложения на множители вида (23.16) и (23.17) данных многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, которые далеко не всегда удается написать в явном виде.

Существует, однако, другой способ получения наибольшего общего делителя двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, называемый обычно *алгоритмом Евклида*.*) Опишем его.

Пусть для определенности степень многочлена $P(x)$ больше или равна степени многочлена $Q(x)$. Разделив $P(x)$ на $Q(x)$,

*) Евклид (ок. 365 — ок. 300 до н. э.) — древнегреческий математик.

получим в качестве частного некоторый многочлен $Q_1(x)$ и остаток $R_1(x)$, степень которого, очевидно, меньше степени многочлена $Q(x)$ (в противном случае процесс деления на $Q(x)$ можно было бы продолжить):

$$P(x) = Q(x) Q_1(x) + R_1(x).$$

Из этой формулы следует: 1) если многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ делятся на некоторый многочлен $r(x)$, то и многочлен $R_1(x)$ делится на этот многочлен; 2) если многочлены $Q(x)$ и $R_1(x)$ делятся на какой-то многочлен $r(x)$, то и многочлен $P(x)$ делится на этот многочлен $r(x)$. Отсюда в свою очередь следует, что общие делители многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, в частности их наибольшие общие делители, совпадают с общими делителями, соответственно с наибольшими общими делителями, многочленов $Q(x)$ и $R_1(x)$.

Разделим далее многочлен $Q(x)$ на многочлен $R_1(x)$:

$$Q(x) = R_1(x) Q_2(x) + R_2(x),$$

продолжая процесс дальше, будем иметь

$$R_1(x) = R_2(x) Q_3(x) + R_3(x),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$R_{k-2}(x) = R_{k-1}(x) Q_k(x) + R_k(x).$$

Степени многочленов $R_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$ убывают, поэтому существует номер (мы его обозначим $m+1$) такой, что $R_{m+1}(x) = 0$, и следовательно,

$$R_{m-1}(x) = R_m(x) Q_{m+1}(x).$$

Пары многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, $Q(x)$ и $R_1(x)$, $R_1(x)$ и $R_2(x)$, ..., $R_{m-1}(x)$ и $R_m(x)$ имеют одинаковые общие делители, а значит, и одинаковые наибольшие общие делители. Но $R_{m-1}(x)$ делится на $R_m(x)$, поэтому $R_m(x)$ является наибольшим общим делителем $R_{m-1}(x)$ и $R_m(x)$, а значит, и наибольшим общим делителем многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.

23.6. РАЗЛОЖЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ НА ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами.

Рациональная дробь $P(x)/Q(x)$ называется правильной, если степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$.

Если рациональная дробь $P(x)/Q(x)$ не является правильной, то, произведя деление числителя на знаменатель по правилу деления многочленов, ее можно представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \tag{23.24}$$

где $R(x)$, $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ — некоторые многочлены, а $P_1(x)/Q_1(x)$ — правильная рациональная дробь.

Лемма 1. *Пусть $P(x)/Q(x)$ — правильная рациональная дробь. Если число a является действительным корнем кратности $\alpha \geqslant 1$ многочлена $Q(x)$, т. е.*

$$Q(x) = (x-a)^\alpha Q_1(x) \quad \text{и} \quad Q_1(a) \neq 0,$$

то существуют действительное число A и многочлен $P_1(x)$ с действительными коэффициентами такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} Q_1(x)},$$

где дробь $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} Q_1(x)}$ также является правильной.

Доказательство. Каково бы ни было действительное число A, прибавляя и вычитая из дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)}$$

выражение $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$, получим:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \left[\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha}\right] = \\ = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)}. \tag{23.25}$$

По условию, степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x) = (x-a)^\alpha Q_1(x)$. Очевидно, что и степень многочлена $Q_1(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$ (ибо $\alpha \geqslant 1$), поэтому при любом выборе числа A рациональная дробь $\frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)}$ является правильной.

Выберем теперь число A таким образом, чтобы число a было корнем многочлена $P(x) - AQ_1(x)$ и, следовательно, чтобы этот многочлен делился на $x-a$. Иначе говоря, определим A из условия

$$P(a) - AQ_1(a) = 0;$$

поскольку, по условию, $Q_1(a) \neq 0$, то отсюда $A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$. При таком выборе A второе слагаемое правой части в формуле (23.25) можно сократить на $x-a$, в результате получим дробь вида

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} Q_1(x)}.$$

Поскольку она получена сокращением правильной рациональной дроби с действительными коэффициентами на множитель $x-a$, где a действительно, то и сама она является также правильной рациональной дробью с действительными коэффициентами. □

Лемма 2. *Пусть* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — *правильная рациональная дробь. Если комплексное число* $z_1 = a + bi$ *(a и b действительны, $b \neq 0$) является корнем кратности* $\beta \geqslant 1$ *многочлена* $Q(x)$, *т. е.*

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^\beta Q_1(x),$$

где $Q_1(z_1) \neq 0$, *а* $x^2 + px + q = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)$, *то существуют действительные числа* M, N *и многочлен* $P_1(x)$ *с действительными коэффициентами такие, что*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta - 1} Q_1(x)},$$

где дробь $\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta - 1} Q_1(x)}$ *также является правильной.*

Доказательство. Для любых действительных M и N имеем

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^\beta Q_1(x)} =$$

$$= \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} + \left[\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^\beta Q_1(x)} - \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta}\right] =$$

$$= \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} + \frac{P(x) - (Mx + N) Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^\beta Q_1(x)}, \qquad (23.26)$$

причем второе слагаемое правой части равенства (23.26) является, как нетрудно видеть, правильной дробью.

Постараемся теперь подобрать M и N так, чтобы числитель этой дроби делился на $x^2 + px + q = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)$. Для этого достаточно выбрать M и N так, чтобы z_1 было корнем многочлена $P(x) - (Mx + N) Q_1(x)$. Действительно, тогда, согласно сказанному в п. 23.3, число $\bar{z}_1$, сопряженное с z_1, также будет являться корнем указанного многочлена. Отсюда и следует, что этот многочлен в силу существования его разложения вида (23.10) делится на $x^2 + px + q$. Итак, пусть

$$P(z_1) - (Mz_1 + N) Q_1(z_1) = 0. \qquad (23.27)$$

Если это имеет место, то $Mz_1 + N = \frac{P(z_1)}{Q_1(z_1)}$, где, по условию, $Q_1(z_1) \neq 0$.

Пусть $z_1 = a + bi$, $P(z_1)/Q(z_1) = A + Bi$; тогда

$$A + iB = Mz_1 + N = M(a + bi) + N.$$

Отсюда, приравнивая действительные и мнимые части, получим уравнения $Ma + N = A$ и $Mb = B$ и следовательно,

$$M = \frac{B}{b} \quad \text{и} \quad N = A - \frac{a}{b} B. \qquad (23.28)$$

При этих значениях M и N многочлен

$$P(x) - (Mx + N) Q_1(x)$$

будет делиться на многочлен $x^2 + px + q$. Сокращая второе слагаемое правой части равенства (23.26) на $x^2 + px + q$, получим дробь вида

$$\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{\beta-1} Q_1(x)}.$$

Поскольку она получена сокращением правильной рациональной дроби с действительными коэффициентами на многочлен с действительными коэффициентами, то и сама она является также правильной рациональной дробью с действительными коэффициентами. $\square$

Сформулируем теперь основную теорему этого пункта.

Теорема 1. *Пусть $P(x)/Q(x)$ — правильная рациональная дробь*), $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами. Если*

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_r)^{\alpha_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \dots \\ \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s}, \qquad (23.29)$$

где a_i — попарно различные действительные корни многочлена $Q(x)$ кратности α_i, $i = 1, 2, \dots, r$, а $x^2 + p_j x + q_j = (x - z_j)(x - \bar{z}_j)$, где z_j и $\bar{z}_j$ — попарно различные при разных j существенно комплексные корни многочлена $Q(x)$ кратности β_j, $j = 1, 2, \dots, s$, то существуют действительные числа $A_i^{(\alpha)}$, $i = 1, 2, \dots, r$, $\alpha = 1, 2, \dots, \alpha_i$,

$$M_j^{(\beta)} \text{ и } N_j, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad \beta = 1, 2, \dots, \beta_j,$$

такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \dots + \frac{A_1^{(\alpha_1)}}{x-a_1} + \dots + \\ + \frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{\alpha_r}} + \frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}} + \dots + \frac{A_r^{(\alpha_r)}}{x-a_r} + \\ + \frac{M_1^{(1)}x + N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} + \frac{M_1^{(2)}x + N_1^{(2)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_s-1}} + \dots + \frac{M_1^{(\beta_1)}x + N_1^{(\beta_1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \\ + \frac{M_s^{(1)}x + N_s^{(1)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}} + \frac{M_s^{(2)}x + N_s^{(2)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}} + \dots + \frac{M_s^{(\beta_s)}x + N_s^{(\beta_s)}}{x^2+p_sx+q_s}. \qquad (23.30)$$

---

*) Без ограничения общности можно считать, что коэффициент у старшего члена многочлена $Q(x)$ равен единице, так как в случае, когда он равен какому-то другому числу (отличному от нуля), можно разделить числитель и знаменатель дроби $P(x)/Q(x)$ на это число, после чего у получившегося в знаменателе многочлена коэффициент у старшего члена окажется равным единице.

Доказательство. Из разложения (23.29) имеем:

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} Q_1(x).$$

Здесь

$$Q_1(x) = (x-a_2)^{\alpha_2} \dots (x-a_r)^{\alpha_r} (x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}$$

и, следовательно, $Q_1(a_1) \neq 0$, поэтому, согласно лемме 1,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a)^{\alpha_1}} + \frac{P_1(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1} Q_1(x)}.$$

Применяя в случае $\alpha_1 > 1$ подобным образом ту же лемму к рациональной дроби $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha_1-1} Q_1(x)}$, получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-2} Q_2(x)}.$$

Продолжая этот процесс дальше, пока показатель степени у сомножителя $x_1 - a$ не станет равным нулю, а затем поступая аналогичным образом относительно множителей $x - a_i$, $i = 2, \dots, r$, будем иметь

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \dots + \frac{A_1^{(\alpha_1)}}{x-a_1} + \dots +$$
$$+ \frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{\alpha_r}} + \frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}} + \dots + \frac{A_r^{(\alpha_r)}}{x-a_r} + \frac{P^*(x)}{Q^*(x)},$$

где $\frac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ — снова правильная рациональная дробь, причем $P^*(x)$ и $Q^*(x)$ суть многочлены с действительными коэффициентами и многочлен $Q^*(x)$ не имеет действительных корней.

Применяя последовательно лемму 2 к дроби $P^*(x)/Q^*(x)$ и к получающимся при этом выражениям, в результате получим формулу (23.30). □

Рациональные дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}} \text{ и } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\beta}},$$

где a, p, q, A, M и N — действительные числа и $\frac{p^2}{4} - q < 0$ (корни трехчлена x^2+px+q существенно комплексные), называются *элементарными рациональными дробями*.

Таким образом, доказанная теорема утверждает, *что всякая правильная рациональная дробь может быть разложена в сумму элементарных рациональных дробей*.

При выполнении разложения вида (23.30) для конкретно заданной дроби обычно оказывается удобным так называемый метод неопределенных коэффициентов. Он состоит в следующем. Для данной дроби $P(x)/Q(x)$ пишется разложение (23.30), в котором коэффициенты $A_i^{(\alpha)}$, $M_j^{(\beta)}$, $N_j^{(\beta)}$ считаются неизвестными ($i=1, 2, \ldots, r$, $\alpha=1, 2, \ldots, \alpha_i$, $j=1, 2, \ldots, s$, $\beta=1, 2, \ldots, \beta_j$). После этого обе части равенства приводятся к общему знаменателю и у получившихся в числителе многочленов приравниваются коэффициенты. При этом если степень многочлена $Q(x)$ равна n, то, вообще говоря, в числителе правой части равенства (23.30) после приведения к общему знаменателю получается многочлен степени $n-1$, т. е. многочлен с n коэффициентами, число же неизвестных $A_i^{(\alpha)}$, $M_j^{(\beta)}$, $N_j^{(\beta)}$ также равняется n (см. (23.10)):

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + 2\sum_{j=1}^{s} \beta_j = n.$$

Таким образом, мы получаем систему n уравнений с n неизвестными. Существование у нее решения вытекает из доказанной теоремы.

Отметим, что после приведения выражения (23.30) к общему знаменателю и его отбрасывания, в случае когда $Q(x)$ имеет действительные корни, целесообразно подставить в обе части получившегося равенства последовательно эти корни; в результате получаются некоторые соотношения между искомыми коэффициентами, полезные для их окончательного определения.

Примеры. 1. Разложим дробь $x/((x^2-1)(x-2))$ на элементарные дроби. Согласно (22.30), искомое разложение имеет вид

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}.$$

Приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, получим

$$x = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1). \qquad (23.31)$$

Мы имеем случай, когда все корни знаменателя действительны. Полагая в равенстве (23.31), согласно сказанному выше, последовательно $x=1$, $x=-1$ и $x=2$, находим

$$1=-2A, \quad -1=6B, \quad 2=3C,$$

откуда

$$A=-\frac{1}{2}, \quad B=-\frac{1}{6}, \quad C=\frac{2}{3}.$$

Таким образом, искомое разложение будет

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)}. \qquad (23.32)$$

2. Найдем разложение на элементарные дроби для $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$. Общий вид разложения в этом случае

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, имеем

$$x^2-1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x+(Dx+E)(x^2+1)x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$-1=A,\ 0=C+E,\ 1=2A+B+D,\ 0=E,\ 0=A+D,$$

отсюда находим

$$A=-1,\ B=2,\ C=0,\ D=1,\ E=0,$$

и, поэтому, искомое разложение имеет вид

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}+\frac{x}{x^2+1}. \tag{23.33}$$

Следует заметить, что в отдельных случаях разложение на элементарные дроби можно получить быстрее и проще, не прибегая к методу неопределенных коэффициентов, а действуя какимлибо другим путем. Например, для разложения дроби

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}$$

на сумму элементарных проще всего дважды прибавить и вычесть в числителе x^2 и произвести деление так, как это указано ниже:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{1}{x^2(1+x^2)}-\frac{1}{(1+x^2)^2}=$$
$$=\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)}-\frac{1}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Полученное в результате разложение и является разложением данной дроби на сумму элементарных дробей.

Упражнение 3. Доказать, что разложение вида (23.30) правильной рациональной дроби единственно.

§ 24. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

24.1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

В этом и следующем параграфах будут рассмотрены методы интегрирования некоторых классов элементарных функций. При этом каждый раз, не оговаривая этого специально, будем предполагать, что речь идет о вычислении интеграла на некотором