2. Найдем разложение на элементарные дроби для $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$. Общий вид разложения в этом случае

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, имеем

$$x^2-1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x+(Dx+E)(x^2+1)x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$-1=A,\ 0=C+E,\ 1=2A+B+D,\ 0=E,\ 0=A+D,$$

отсюда находим

$$A=-1,\ B=2,\ C=0,\ D=1,\ E=0,$$

и, поэтому, искомое разложение имеет вид

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}+\frac{x}{x^2+1}. \qquad (23.33)$$

Следует заметить, что в отдельных случаях разложение на элементарные дроби можно получить быстрее и проще, не прибегая к методу неопределенных коэффициентов, а действуя каким-либо другим путем. Например, для разложения дроби

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}$$

на сумму элементарных проще всего дважды прибавить и вычесть в числителе x^2 и произвести деление так, как это указано ниже:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{1}{x^2(1+x^2)}-\frac{1}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)}-\frac{1}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Полученное в результате разложение и является разложением данной дроби на сумму элементарных дробей.

Упражнение 3. Доказать, что разложение вида (23.30) правильной рациональной дроби единственно.

§ 24. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

24.1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

В этом и следующем параграфах будут рассмотрены методы интегрирования некоторых классов элементарных функций. При этом каждый раз, не оговаривая этого специально, будем предполагать, что речь идет о вычислении интеграла на некотором промежутке, во всех точках которого определена подынтегральная элементарная функция (иначе говоря, на котором формула, задающая подынтегральную функцию, имеет смысл, см. об этом в п. 4.3).

В предыдущем параграфе показано, что всякая рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и элементарных рациональных дробей (см. (23.24) и (23.30)). Интеграл от многочлена вычисляется, и притом очень просто (см. п. 22.2). Рассмотрим вопрос об интегрировании элементарных рациональных дробей.

Сначала рассмотрим вычисление интегралов от дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

Если $n=1$, то (см. формулу 2 в п. 22.2)

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a|+C, \tag{24.1}$$

а если $n\neq 1$, то (см. формулу 1 в п. 22.2)

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C. \tag{24.2}$$

Рассмотрим теперь интегралы от дробей

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

где $\frac{p^2}{4}-q<0$, $n=1,\ 2,\ \ldots$. Снова начнем со случая $n=1$. Замечая, что

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right),$$

и полагая $t=x+\frac{p}{2}$, $a^2=q-\frac{p^2}{4}>0$, получим:

$$\begin{aligned}\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx &= \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}\,dt = M\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2}+\\ &+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C=\\ &=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{2a}+C.\end{aligned} \tag{24.3}$$

В случае $n>1$, полагая, как и выше, $t=x+\frac{p}{2}$, $a^2=q-\frac{p^2}{4}$, подобным же образом получим

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx = M\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n}+\frac{2N-pM}{2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}. \tag{24.4}$$

Рассмотрим в отдельности каждый из получившихся интегралов в правой части этого равенства. Что касается первого из них, то он вычисляется сразу:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{d\,(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} = -\frac{1}{2\,(n-1)\,(t^2+a^2)^{n-1}} + C. \qquad (24.5)$$

Второй же интеграл правой части равенства (24.4) вычисляется несколько сложнее. Пусть

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

Проинтегрируем интеграл I_n по частям, положив

$$u = \frac{1}{(t^2+a^2)^n},\quad dv = dt, \text{ и, следовательно, } du = -\frac{2nt\,dt}{(t^2+a^2)^{n+1}}, \quad v = t,$$

а затем, добавив и вычтя a^2 в числителе получившейся под знаком интеграла функции и произведя деление так, как это указано ниже, получим

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\,dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\,dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\left[\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} - a^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n+1}}\right],$$

т. е. $I_n = \dfrac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$, откуда

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\,\frac{t}{(t^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\,I_n, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots. \qquad (24.6)$$

Интеграл I_1 легко вычисляется (см. в п. 22.2 формулу 12); формула (24.6) позволяет вычислить I_2; зная же I_2, по той же формуле можно найти значение и I_3, продолжая этот процесс дальше, можно найти и выражение для любого интеграла I_n $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$.

24.2. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Из результатов п. 23.6 и предыдущего п. 24.1 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Неопределенный интеграл от любой рациональной дроби на всяком промежутке, на котором знаменатель дроби не обращается в ноль, существует и выражается через элементарные функции, а именно он является алгебраической суммой суперпозиций рациональных дробей, арктангенсов и натуральных логарифмов.*

Теорема 1 есть прямое следствие формул (23.24), (23.30), (22.6), (22.8), (24.1) — (24.6). Эти формулы дают и конкретный способ вычисления интеграла от рациональной функции: сначала делением числителя на знаменатель выделяется «целая часть», т. е. данная рациональная дробь представляется в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби (23.24), затем получившаяся правильная рациональная дробь раскладывается на сумму элементарных дробей (23.30), после чего, используя линейность интеграла (22.6), можно вычислить интегралы от каждого слагаемого в отдельности, согласно формулам (22.8) и (24.1) — (24.6).

Примеры. 1. Вычислим $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x-2)}$. Уже известно (см. (23.32)), что

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)},$$

поэтому

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-2} =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + C.$$

2. Вычислим $\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}\,dx$. Согласно общему правилу, выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель; получим

$$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2} = x + \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}.$$

Для получившейся правильной рациональной дроби уже найдено ее разложение на элементарные дроби (см. формулу (23.33)):

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1},$$

поэтому

$$\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}\,dx = \int x\,dx - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} +$$
$$+ \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$
$$= \frac{x^2}{2} - \ln|x| - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Следует иметь в виду, что указанный метод вычисления неопределенного интеграла от рациональной дроби является общим: с помощью его можно вычислить неопределенный интеграл от любой рациональной дроби, если можно получить конкретное разложение знаменателя на множители вида (23.10). Однако естественно, что в отдельных частных случаях бывает целесообразнее для существенного сокращения вычислений действовать иными путями.

Например, для вычисления интеграла

$$I=\int \frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^3}$$

проще не раскладывать подынтегральную функцию на элементарные дроби, а применить правило интегрирования по частям. Положив

$$u=x,\quad dv=\frac{x\,dx}{(1-x^2)^3}\quad \text{и следовательно,}\quad du=dx,\quad v=\frac{1}{4(1-x^2)^2},$$

получим

$$I=-\frac{1}{2}\int x\frac{d(1-x^2)}{(1-x^2)^3}=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{1}{(1-x^2)^2}\,dx.$$

Прибавляя и вычитая к числителю получившейся подынтегральной функции x^2, производя деление, получаем два интеграла, из которых первый табличный, а второй легко вычисляется интегрированием по частям:

$$I=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{(1-x^2)+x^2}{(1-x^2)^2}\,dx=$$

$$=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1-x^2}-\frac{1}{4}\int\frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^2}=$$

$$=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{8}\int x\frac{d(1-x^2)}{(1-x^2)^2}=$$

$$=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{x}{8(1-x^2)}+\frac{1}{8}\int\frac{dx}{1-x^2}=$$

$$=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{x}{8(1-x^2)}+C.$$

24.3*. МЕТОД ОСТРОГРАДСКОГО

В пункте (24.1) было показано, что всякая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы элементарных дробей. Но из п. 24.1 следует, что первообразные элементарных дробей $\frac{1}{x-a}$ и $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ $\left(\frac{p^2}{4}-q<0\right)$ являются трансцендентными функциями вида $A\operatorname{arctg}(a_1x+a_2)+B\ln(b_1x+b_2)+C$ (см. (24.1) и (24.3)); первообразная элементарной дроби

$$A/(x-a)^\alpha,\quad \alpha=2,\ 3,\ \ldots,$$

является рациональной дробью; первообразная же элементарной дроби $(Mx+N)/(x^2+px+q)^\beta$, $\beta=2,\ 3,\ \ldots$, в силу формул (24.4), (24.5), (24.6) и формулы 12 п. 22.2 может быть, вообще говоря, представлена в виде суммы правильной рациональной дроби и трансцендентной функции вида $A\operatorname{arctg}(a_1x+a_2)+C$, являющейся первообразной от дроби вида $\frac{B}{x^2+px+q}$ $\left(\frac{p^2}{4}-q<0\right)$. Поэтому всякая первообразная любой рациональной дроби представима, вообще говоря, в виде суммы рациональной дроби (алгебраическая часть) и трансцендентной функции, являющейся первообразной от суммы дробей вида

$$\frac{A}{x-a} \quad \text{и} \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \frac{p^2}{4}-q<0.$$

Таким образом, если $P(x)/Q(x)$ — правильная рациональная дробь и

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}$$

разложение ее знаменателя в виде (23.10), то

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{A_i}{x-a_i}+\sum_{j=1}^{s}\frac{M_jx+N_j}{x^2+p_jx+q_j}\right]dx; \quad (24.7)$$

отсюда, произведя под знаком интеграла сложение дробей, имеем

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx, \quad (24.8)$$

где $Q_2(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_r)(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x_2+p_sx+q_s)$. Из формул (24.2) и (24.6) следует, что многочлен $Q_1(x)$ имеет вид

$$Q_1(x)=$$
$$=(x-a_1)^{\alpha_1-1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1},$$

т. е. многочлен $Q_1(x)$ является наибольшим общим делителем многочлена $Q(x)$ и его производной $Q'(x)$ (см. (23.23)).

Формула (24.8) называется формулой *Остроградского* *). Второе слагаемое правой части формулы (24.8) называется трансцендентной частью интеграла $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$; это естественно, ибо из сказанного выше следует, что всякая первообразная дроби $P_2(x)/Q_2(x)$ с точностью до постоянного слагаемого представляет собой линейную комбинацию логарифмов и арктангенсов от рациональных функций и, значит, как это можно показать, будет являться, вообще говоря, трансцендентной функцией. Первое же слагаемое, называемое алгебраической частью, может быть найдено чисто алгебраическим путем, если известны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ (а значит, и $Q'(x)$, т. е. без интегрирования каких-либо функций. В самом деле, многочлен $Q_1(x)$, являясь наибольшим общим делителем многочленов $Q(x)$ и $Q'(x)$, всегда может быть найден с помощью алгоритма Евклида (см. п. 23.5*), тем самым для отыскания

*) М. В. Остроградский (1801—1861) — русский математик.

многочлена $Q_1(x)$ не требуется знания корней многочлена $Q(x)$; однако, если корни многочлена $Q(x)$ известны, а значит, известно и его разложение вида (23.17), то многочлен $Q_1(x)$ сразу выписывается по формуле (23.23). Многочлен $Q_2(x)$ находится как частное от деления $Q(x)$ на $Q_1(x)$.

Для отыскания же многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ можно применить метод неопределенных коэффициентов. Поясним его. Обозначим степень многочлена $Q_1(x)$ через n_1, степень многочлена $Q_2(x)$ — через n_2; тогда из равенства

$$Q(x)=Q_1(x)\,Q_2(x) \tag{24.9}$$

получим $n=n_1+n_2$. В силу того что дроби $P_1(x)/Q_1(x)$ и $P_2(x)/Q_2(x)$ правильные, степени многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ соответственно не выше, чем n_1-1 и n_2-1 и, значит, в этих многочленах число отличных от нуля коэффициентов соответственно не превышает n_1 и n_2; таким образом, число неизвестных коэффициентов равно $n_1+n_2=n$. Дифференцируя первообразные, входящие в обе части формулы (24.8), получим (опуская для краткости обозначение аргумента) соотношение

$$\frac{P}{Q}=\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)'+\frac{P_2}{Q_2}.$$

Производя дифференцирование, будем иметь

$$\frac{P}{Q}=\frac{P_1'Q_1-P_1Q_1'}{Q_1^2}+\frac{P_2}{Q_2}. \tag{24.10}$$

Заметим, что

$$\frac{P_1'Q_1-P_1Q_1'}{Q_1^2}=\frac{P_1'Q_2-P_1R}{Q_1Q_2}, \tag{24.11}$$

где $R=Q_1'Q_2/Q_1$ является многочленом. Действительно, если z — корень многочлена Q_1 кратности λ, то, как мы знаем (см. п. 23.4), z является корнем кратности $\lambda-1$ для производной Q_1' и однократным корнем многочлена Q_2, поэтому в этом случае z является и корнем кратности λ для многочлена $Q_1'Q_2$. Отсюда, согласно формуле (23.7), сразу следует, что многочлен $Q_1'Q_2$ нацело делится на многочлен Q_1, т. е. что R также является многочленом. Итак, из (24.9), (24.10) и (24.11) имеем

$$\frac{P}{Q}=\frac{P_1'Q_2-P_1R}{Q}+\frac{P_2}{Q_2},$$

откуда

$$P=P_1'Q_2-P_1R+P_2Q_1. \tag{24.12}$$

Многочлен P имеет степень не выше, чем $n-1$ (ибо дробь P/Q — правильная). Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях k, $k=0, 1, \ldots, n-1$, переменного x в обеих частях равенства (24.12), получим n линейных уравнений относительно n неизвестных. Выше было доказано (см. (24.8)), что многочлены P_1 и P_2 всегда (в частности, при некотором фиксированном многочлене Q и при любом многочлене P степени, не превышающей $n-1$) существуют; поэтому полученная система линейных уравнений имеет решение при любой правой части *). Отсюда следует, что определитель этой системы не равен нулю, а значит, про рассматриваемую систему можно сказать, что она не только имеет решение, но и что оно единственно. Тем самым не только получен метод для определения неизвестных коэффициентов в формуле (24.8), но и доказана единственность этого представления.

Формула (24.8) сводит, вообще говоря, задачу интегрирования любой правильной рациональной дроби к задаче интегрирования правильной рациональной дроби, у которой знаменатель $Q(x)$ имеет только простые корни. С помощью этой формулы при интегрировании правильной рациональной дроби можно найти указанным выше путем алгебраическую часть интеграла $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, а затем проинтегрировать более простую рациональную дробь $P_2(x)/Q_2(x)$, если, конечно, случайно не окажется, что $P_2(x)$ — тождественный ноль: в этом случае задача будет уже решена.

Описанный здесь метод интегрирования рациональных дробей носит название *метода Остроградского*.

При использовании метода Остроградского для интегрирования рациональных дробей часто оказывается целесообразней записывать формулу Остроградского (24.8) в виде (24.7), так как в этом случае после нахождения неизвестных коэффициентов в подынтегральной функции ее сразу можно проинтегрировать.

Неизвестные коэффициенты в формуле (24.7) находятся тем же методом, который был описан для формулы (24.8): следует продифференцировать обе части равенства (24.7), привести к общему знаменателю все рациональные дроби, получившиеся в обеих частях равенства, приравнять коэффициенты у одинаковых степеней переменной x в многочленах, стоящих в числителях, и решить получившуюся систему линейных уравнений.

Пример. Применим метод Остроградского для вычисления интеграла $\int \frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2}\,dx$. Согласно формуле (24.8),

$$\int \frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2}\,dx = \frac{Kx^3+Lx^2+Mx+N}{(1-x)^2(1+x^2)} + \int \frac{kx^2+lx+m}{(1-x)(1+x^2)}\,dx,$$

поэтому

$$\frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(x^2+1)^2} = \left[\frac{Kx^2+Lx^2+Mx+N}{(1-x)^2(1+x^2)}\right]' + \frac{kx^2+lx+m}{(1-x)(1+x^2)}.$$

*) Как обычно, предполагается, что все члены уравнений, содержащие неизвестные, и только они перенесены в левую часть равенства.

Произведя дифференцирование, получим

$$\frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2}=$$

$$=\frac{\begin{array}{r}(3Kx^2+2Lx+M)(1-x)(x^2+1)-(Kx^3+Lx^2+Mx+N)\times\\ \times[-2(1+x^2)+(1-x)2x]\end{array}}{(1-x)^3(1+x^2)^2}+$$

$$+\frac{kx^2+lx+m}{(1-x)(1+x^2)}.$$

Отсюда имеем:

$$x^4+2x^3-2x^2+x=(3Kx^2+2Lx+M)(-x^3+x^2-x+1)-$$
$$-(Kx^3+Lx^2+Mx+N)(-4x^2+2x-2)+$$
$$+(kx^2+lx+m)(x^4-2x^3+2x^2+1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$\begin{gathered}M+2N+m=0,\\ -M+2L+2M-2N-2m+l=1,\\ 3K-2L+M+2L-2M+4N+k-2l+2m=-2,\\ -M+2L-3K+2K-2L+4M-2K+2l-2m=2,\\ 3K-2L-2K+4L+2k-2l+m=1,\\ -3K+4K-2k+l=0,\\ k=0,\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}M+2N+m=0,\\ 2L+M-2N+l-2m=1,\\ 3K-M+4N+k-2l+2m=-2,\\ -K+3M-2k+2l-2m=2,\\ K+2L+2k-2l+m=1,\\ K-2k+l=0,\\ k=0.\end{gathered}$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$K=\frac{1}{2},\quad L=-\frac{1}{2},\quad M=\frac{3}{2},\quad N=-1,$$
$$k=0,\quad l=-\frac{1}{2},\quad m=\frac{1}{2};$$

поэтому

$$\int\frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(x^2+1)^2}\,dx=\frac{1}{2}\,\frac{x^3-x^2+3x-2}{(1-x)^2(1+x^2)}+$$
$$+\frac{1}{2}\int\frac{-x+1}{(1-x)(1+x^2)}\,dx=\frac{1}{2}\,\frac{x^3-x^2+3x-2}{(1-x)^2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$