§ 25. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

25.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Функции вида

$$R(u_1, \ldots, u_n) = \frac{P(u_1, \ldots, u_n)}{Q(u_1, \ldots, u_n)}, \tag{25.1}$$

где P и Q — многочлены от переменных $u_1, \ldots, u_n$, т. е. функции вида

$$\sum_{k_1 + \ldots + k_n \leqslant k} a_{k_1, \ldots, k_n} u_1^{k_1} \ldots u_n^{k_n},$$

называются *рациональными функциями от* $u_1, \ldots, u_n$.

Если в формуле (25.1) переменные $u_1, \ldots, u_n$ в свою очередь являются функциями переменной $x: u_i = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то функция

$$R[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)]$$

называется *рациональной функцией* от функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

Например, функция

$$f(x) = \frac{x + \sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{\sqrt{x} - \sqrt{x^2+1}}$$

является рациональной функцией от x и радикалов $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2-1}$, и $\sqrt{x^2+1}$:

$$f(x) = R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x^2-1}, \sqrt{x^2+1}\right);$$

здесь $R(u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{u_1 + u_3^2}{u_2 - u_4}$, $u_1 = x$, $u_2 = \sqrt{x}$, $u_3 = \sqrt[3]{x^2-1}$, $u_4 = \sqrt{x^2+1}$.

Если в формуле (25.1) переменные $u_1, \ldots, u_n$ являются элементарными тригонометрическими функциями, то получающаяся сложная функция называется рациональной относительно элементарных тригонометрических функций. Примером такой функции является следующая:

$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^3 x + \cos x} = R(\sin x, \cos x).$$

Перейдем теперь к интегралам от функций рассмотренных типов и покажем, что в ряде случаев они сводятся к интегралам от рациональных функций.

25.2. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx$.

Рассмотрим интегралы, указанные в заглавии пункта, при условии, что постоянные $r_1, \ldots, r_s$ рациональны, и $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (a, b, c, d — постоянные). Последнее предположение естественно, так как если $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, то коэффициенты a, b были бы пропорциональны коэффициентам c, d и поэтому отношение $\frac{ax+b}{cx+d}$ не зависело бы от x. Подынтегральная функция в этом случае была бы обыкновенной рациональной дробью от одного переменного, вопрос об интегрировании которой был рассмотрен выше.

Пусть m — общий знаменатель чисел $r_1, \ldots, r_s$:

$$r_i = \frac{p_i}{m}, \quad p_i \text{ — целое}, \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Положим

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}, \tag{25.2}$$

откуда

$$x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} = \rho(t); \tag{25.3}$$

$\rho(t)$ является рациональной функцией, поэтому $\rho'(t)$ также рациональная функция; далее,

$$dx = \rho'(t)\, dt, \tag{25.4}$$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i} = t^{mr_i} = t^{p_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{25.5}$$

Подставляя (25.3), (25.4) и (25.5) в подынтегральное выражение рассматриваемого интеграла, получим

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx =$$
$$= \int R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \ldots, t^{p_s}\right) \rho'(t)\, dt = \int R^*(t)\, dt,$$

где $R^*(t) = R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \ldots, t^{p_s}\right) \rho'(t)$, очевидно, является рациональной функцией переменного t. Таким образом, вычисление интеграла

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx \tag{25.6}$$

сводится к интегрированию рациональных дробей.

Конечно, для того чтобы найти выражение для исходного интеграла, надо после вычисления интеграла $\int R^*(t)\, dt$, сделав обратную замену переменного $t=((ax+b)/(cx+d))^{1/m}$, вернуться к первоначальной переменной x. В дальнейшем в аналогичных ситуациях мы не будем каждый раз оговаривать необходимость обратного перехода к исходной переменной x.

Отметим, что, в частности, к рассмотренному типу интегралов относятся интегралы вида

$\int R[x, (ax+b)^{r_1}, \ldots, (ax+b)^{r_s}]\,dx$, в частности $\int R(x, x^{r_1}, \ldots, x^{r_s})\,dx$.

Пример. Вычислим интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. Полагая, согласно общему правилу, $x=t^6$, $dx=6t^5\,dt$, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=6\int \frac{t^3}{t+1}dt=6\left[\int (t^2-t+1)\,dt-\int \frac{dt}{t+1}\right]=$$
$$=6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right]+C=$$
$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C.$$

К интегралам вида (25.6) сводятся иногда с помощью элементарных преобразований и интегралы других типов, например, типа

$$\int \sqrt{(x-a)(x-b)}\,dx.$$

Покажем метод вычисления подобных интегралов на примере интеграла

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)}\,dx. \tag{25.7}$$

Вынося в подынтегральной функции множитель $(x-1)$ за знак радикала, получим интеграл вида (25.6): именно при $x \geqslant 2$

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)}\,dx=\int (x-1)\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\,dx,$$

а при $x<1$

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)}\,dx=\int (1-x)\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\,dx.$$

При $1<x<2$ подынтегральное выражение чисто мнимое.

Рассмотрим, например, случай $x \geqslant 2$. Положим здесь (см. (25.2)) $t^2=\frac{x-2}{x-1}$, тогда

$$x=\frac{2-t^2}{1-t^2}, \quad dx=\frac{2t\,dt}{(1-t^2)^2},$$

поэтому

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)}\,dx=\int \left(\frac{2-t^2}{1-t^2}-1\right)\frac{2t^2\,dt}{(1-t^2)^2}=2\int \frac{t^2\,dt}{(1-t^2)^3}$$

— получился интеграл от рациональной дроби, который был вычислен раньше (см. п. 24.2).

25.3. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$. ПОДСТАНОВКИ ЭЙЛЕРА

Указанные интегралы могут быть сведены с помощью замены переменного к рациональным функциям. Рассмотрим три замены переменного, носящие название *подстановок Эйлера* *). Итак, пусть дан интеграл

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx, \quad a \neq 0. \tag{25.8}$$

Первый случай: $a > 0$.

Сделаем замену x на t следующим образом:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t \tag{25.9}$$

(знаки можно брать в любой комбинации). Возведем обе части написанного равенства в квадрат:

$$ax^2+bx+c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}\,xt + t^2,$$

отсюда

$$x = \frac{t^2-c}{b \mp 2t\sqrt{a}} = R_1(t),$$

$R_1(t)$ — рациональная функция от t, значит $R_1'(t)$ — также рациональная функция.

Далее, $dx = R_1'(t)\,dt$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm R_1(t)\sqrt{a} \pm t = R_2(t)$, где, очевидно, $R_1(t)$ — рациональная функция. Окончательно,

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx =$$
$$= \int R\,(R_1(t),\ R_2(t))\,R_1'(t)\,dt = \int R^*(t)\,dt,$$

где $R^*(t) = R\,(R_1(t),\ R_2(t))\,R_1'(t)$ — рациональная дробь. □

Второй случай: корни трехчлена ax^2+bx+c действительные.

Пусть x_1 и x_2 действительны и являются корнями трехчлена ax^2+bx+c. Если $x_1 = x_2$, то

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\,(x-x_1)^2} = |x-x_1|\sqrt{a}.$$

Отсюда следует, что в этом случае либо под корнем стоит отрицательная при всех значениях $x \neq x_1$ величина, т. е. корень принимает только чисто мнимые выражения, — этот случай имеет место при $a < 0$ и мы его не рассматриваем, либо при $a \geqslant 0$ после указанного элементарного преобразования получаем, что переменное x не входит под знак корня, т. е. под интегралом

*) Л. Эйлер (1707—1783) — швейцарский математик.

стоит просто рациональная функция от x, вообще говоря, разная для каждого из промежутков $(-\infty, x_1)$ и $(x_1, +\infty)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $x_1 \neq x_2$. Замечая, что $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, и вынося $x-x_1$ из-под знака корня, получаем, что

$$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)=R\left(x, |x-x_1|\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right)=$$
$$=R_3\left(x, \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right), \quad (25.10)$$

здесь $R_3(u, v)$ — рациональная функция переменных u и v.

Как известно (см. п. 25.1), интеграл от функции (25.10) может быть вычислен с помощью подстановки (см. 25.2) $t^2=\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}$, что в нашем случае дает

$$\pm(x-x_1)t=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)},$$

или, беря $t>0$ при $x \geqslant x_1$ и $t<0$ при $x \leqslant x_1$, $(x-x_1)t=\sqrt{ax^2+bx+c}$. $\square$

Рассмотренный в предыдущем пункте интеграл (25.7) является примером случая 2; этот интеграл был сведен выше к рациональной дроби приемом, разобранным сейчас в общем случае.

Два изученных нами способа вычисления интеграла (25.8) позволяют всегда свести этот интеграл к интегралу от рациональной дроби на любом промежутке, если только корень $\sqrt{ax^2+bx+c}$ на этом промежутке не принимает чисто мнимые значения (естественно, изучая анализ в действительной области, исключить этот случай из рассмотрения). В самом деле, допустим, что ни первый, ни второй случай не имеют места, т. е. $a<0$ и корни x_1 и x_2 трехчлена ax^2+bx+c существенно комплексны: $x_1=g+hi$, $x_2=g-hi$, $h \neq 0$. Тогда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=$$
$$=\sqrt{a(x-g-hi)(x-g+hi)}=\sqrt{a[(x-g)^2+h^2]},$$

и так как $a<0$, а $h \neq 0$, то под корнем при любых x стоит отрицательное выражение. $\square$

Третий случай: $c>0$.

В этом случае можно применить подстановку

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm xt$$

(комбинация знаков произвольна). Возводя в квадрат, получим равенство

$$ax^2+bx=\pm 2\sqrt{c}\,xt+x^2t^2,$$

откуда

$$x=\frac{b \mp 2t\sqrt{c}}{t^2-a}=R_4(t), \quad dx=R_4'(t)\,dt,$$

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm R_4(t)\,t=R_5(t)$, где $R_4(t)$, $R_4'(t)$ и $R_5(t)$ суть рациональные функции t. Поэтому

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(R_4(t),\ R_5(t)\right)R_4'(t)\,dt=\int \tilde{R}(t)\,dt,$$

где $\tilde{R}(t)=R\left(R_4(t),\ R_5(t)\right)R_4'(t)$ — рациональная дробь. $\square$

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}\right)dx$ сводятся подстановкой

$$t^2=ax+b \tag{25.11}$$

к рассмотренным интегралам вида (25.8).

В самом деле, из (25.11) имеем:

$$x=\frac{t^2-b}{a},\quad dx=\frac{2}{a}t\,dt, \sqrt{cx+d}=\sqrt{\frac{c}{a}t^2-\frac{cb}{a}+d}=\sqrt{At^2+B},$$

где $A=\frac{c}{a}$, $B=-\frac{cb}{a}+d$, поэтому

$$\int R\left(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}\right)dx=\int R_6\left(t, \sqrt{At^2+B}\right)dt,$$

где $R_6(u, v)$—рациональная функция переменных u и v. В правой части последнего равенства стоит интеграл типа (25.8). $\square$

Вычисление интегралов с помощью подстановок Эйлера обычно приводит к громоздким выражениям, поэтому их следует применять, вообще говоря, лишь тогда, когда рассматриваемый интеграл не удается вычислить другим более коротким способом. Например, замечая, что $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$, нетрудно убедиться, что интеграл (25.8) в случае, когда подкоренное выражение положительно на некотором интервале, с помощью линейной подстановки может быть приведен (ср. п. 22.3) к одному из трех интегралов:

$$\int R\left(t, \sqrt{1-t^2}\right)dt,\quad \int R\left(t, \sqrt{t^2-1}\right)dt,\quad \int R\left(t, \sqrt{t^2+1}\right)dt$$

(конечно, здесь символом R обозначена, вообще говоря, другая, чем в формуле (25.8), рациональная функция). Для вычисления полученных интегралов часто оказывается очень удобным использовать тригонометрические подстановки

$$t=\sin u,\quad t=\cos u,\quad t=\operatorname{tg} u,$$

а также гиперболические подстановки

$$t=\operatorname{sh} u,\quad t=\operatorname{ch} u,\quad t=\operatorname{th} u.$$

25.4. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО БИНОМА

Выражение $x^m(a+bx^n)^p\,dx$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$ называется *дифференциальным биномом*. Будем рассматривать случаи, когда n, m и p — рациональные, а a и b действительные числа.

Положим

$$x=t^{1/n}, \tag{25.12}$$

тогда

$$dx = \frac{1}{n} t^{1/n-1}\, dt \quad \text{и} \quad \int x^m (a+bx^n)^p\, dx = \frac{1}{n} \int (a+bt)^p\, t^{\frac{m+1}{n}-1}\, dt.$$

Таким образом, интеграл

$$\int x^m (a+bx^n)^p\, dx \tag{25.13}$$

сводится подстановкой (25.12) к интегралу типа

$$\int (a+bt)^p\, t^q\, dt, \tag{25.14}$$

где p и q рациональны. В рассматриваемом случае

$$q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

П е р в ы й с л у ч а й: p — целое число.

Пусть $q = \frac{r}{s}$, где r и s — целые числа. Согласно результатам п. 25.2 в этом случае подстановка $z = t^{1/s}$ сводит интеграл (25.14) к интегралу от рациональной дроби.

В т о р о й с л у ч а й: q — целое число.

Пусть теперь $p = r/s$, r и s — целые числа. Согласно результатам пункта 25.2, интеграл (25.14) приводится в этом случае подстановкой $z = (a+bt)^{\frac{1}{s}}$ к интегралу от рациональной дроби.

Т р е т и й с л у ч а й: $p+q$ — целое.

Пусть $p = r/s$ и s — целые. Запишем для наглядности интеграл (25.14) несколько в другом виде:

$$\int (a+bt)^p\, t^q\, dt = \int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{p+q} dt.$$

Снова имеем интеграл типа, рассмотренного в том же п. 25.2. На этот раз к интегралу от рациональной дроби его приводит подстановка

$$z = \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{1/s}.$$

Итак, в трех случаях, когда одно из чисел p, q или $p+q$ является целым, интеграл (25.14) при помощи указанных выше подстановок приводится к интегралу от рациональной дроби.

Применительно к интегралу (25.13) этот результат выглядит следующим образом: когда одно из чисел p, $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n}+p$ является целым, интеграл (25.13) может быть сведен к интегралу от рациональной дроби. При этом в случае, когда p целое, это сведéние осуществляет подстановка

$$z = x^{n/s},$$

где число s является знаменателем дроби $\frac{m+1}{n}$, т. е. $\frac{m+1}{n} = \frac{r}{s}$; в случае, когда $\frac{m+1}{n}$ целое, — подстановка

$$z = (a + bx^n)^{1/s},$$

где число s является знаменателем дроби p, т. е. $p = r/s$; а в случае, когда $\frac{m+1}{n} + p$ целое, — подстановка

$$z = (ax^{-n} + b)^{1/s},$$

где число s также является знаменателем дроби p.

П. Л. Чебышев *) показал, что при показателях m, n и p, не удовлетворяющих вышеуказанным условиям, интеграл (25.13) не выражается через элементарные функции.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I = \int \sqrt{x}\,\sqrt[4]{1 - \frac{1}{\sqrt{x^3}}}\,dx = \int x^{1/2}\left(1 - x^{-\frac{3}{2}}\right)^{1/4} dx.$$

Здесь $m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{3}{2}$, $p = \frac{1}{4}$ и $(m+1)/n = -1$; имеем второй случай.

Сделаем указанную выше подстановку:

$$z = (1 - x^{-3/2})^{1/4}; \tag{25.15}$$

отсюда

$$x = (1 - z^4)^{-2/3}, \quad dx = \frac{8}{3}(1 - z^4)^{-5/3} z^3\,dz,$$

и потому

$$I = \frac{8}{3}\int \frac{z^4}{(1-z^4)^2}\,dz = \frac{2}{3}\int z\,d\frac{1}{1-z^4} = \frac{2}{3}\left(\frac{z}{1-z^4} - \int \frac{dz}{1-z^4}\right) =$$

$$= \frac{2z}{3(1-z^4)} - \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{1+z^2}\right)dz =$$

$$= \frac{2z}{3(1-z^4)} - \frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| - \frac{1}{3}\operatorname{arctg} z + C,$$

где z выражается через x согласно формуле (25.15).

*) П. Л. Чебышев (1821 — 1894) — русский математик.

25.5. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \quad a \neq 0,$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 1$. С принципиальной точки зрения этот интеграл всегда можно свести к интегралу от рациональной дроби с помощью одной из подстановок Эйлера (см. п. 25.3). Однако в данном конкретном случае значительно быстрее к цели приводит обычно другой прием.

Именно покажем, что справедлива формула

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \\ = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (25.16)$$

где $P_{n-1}(x)$ — многочлен степени не выше, чем $n-1$, а α — некоторое число.

Итак, пусть многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \qquad (25.17)$$

задан. Если существует многочлен

$$P_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0, \qquad (25.18)$$

удовлетворяющий условию (25.16), то, дифференцируя это равенство, получим:

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \\ = P'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{P_{n-1}(x)(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\alpha}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

или

$$2P_n(x) = 2P'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + P_{n-1}(x)(2ax+b) + 2\alpha. \qquad (25.19)$$

Здесь слева стоит многочлен степени n, а справа каждое слагаемое также является многочленом степени не больше n.

Замечая, что

$$P'_{n-1}(x) = (n-1)\,b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + kb_k x^{k-1} + \ldots + b_1, \qquad (25.20)$$

и подставляя (25.17), (25.18) и (25.20) в (25.19), имеем равенства

$$2(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) = \\ = 2(ax^2+bx+c)\left[(n-1)\,b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + kb_k x^{k-1} + \ldots + b_1\right] + \\ + (2ax+b)(b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_k x^k + \ldots + b_0) + 2\alpha.$$

Приравнивая коэффициенты у одинаковых степеней x, получим следующую систему $n+1$ линейных уравнений с $n+1$ неизвестными $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, \alpha$:

$$
\begin{gathered}
2a_0 = 2cb_1 + bb_0 + 2\alpha, \\
2a_1 = 2bb_1 + 4cb_2 + 2ab_0 + bb_1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
2a_k = 2(k-1)ab_{k-1} + 2kbb_k + 2(k+1)cb_{k+1} + 2ab_{k-1} + bb_k, \qquad (25.21) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
2a_{n-1} = 2(n-2)ab_{n-2} + 2(n-1)bb_{n-1} + 2ab_{n-2} + bb_{n-1}, \\
2a_n = 2(n-1)ab_{n-1} + 2ab_{n-1}.
\end{gathered}
$$

Из последнего уравнения сразу находится b_{n-1}:

$$b_{n-1} = \frac{a_n}{na}.$$

Подставляя это выражение в предпоследнее уравнение и замечая, что в этом уравнении коэффициент у неизвестного b_{n-2} равен $2a(n-1) \neq 0$ найдем значение b_{n-2}. Подставляя далее значения b_{n-1} и b_{n-2} в предыдущее уравнение, найдем значение b_{n-3}, и т. д. Последовательно получим все значения неизвестных b_k ($k=0$, $1 \ldots, n-1$). После этого из первого уравнения сразу находится неизвестное α.

Таким образом, система (25.21) имеет решение при любых значениях $a_0, a_1, \ldots, a_n$, поэтому определитель этой системы не равен нулю и указанное решение единственно.

На практике многочлен $P_{n-1}(x)$ в формуле (26.16) пишут с неопределенными коэффициентами, которые находят, решая систему (25.21). После этого вычисление данного интеграла сводится к вычислению интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

который в случае, когда подкоренное выражение положительно на некотором промежутке, легко сводится к табличному (см. п. 22.3).

Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(x-\lambda)^k \sqrt{ax^2+bx+c}}$$

подстановкой

$$t = \frac{1}{x-\lambda}$$

сводятся к интегралам рассмотренного типа (25.16).