§ 26. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

26.1. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Подстановка

$$u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi,$$

сводит указанный в заглавии интеграл к интегралу от рациональной дроби. Действительно, имеем

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \tag{26.1}$$

$$x = 2\operatorname{arctg} u, \quad dx = \frac{2\,du}{1+u^2},$$

поэтому

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = 2\int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2}.$$

Таким образом, получился интеграл от рациональной функции.

Вычислим указанным методом интеграл $\int\frac{dx}{1+\sin x}$. Используя формулы (26.1), получим:

$$\int\frac{dx}{1+\sin x} = 2\int\frac{du}{(1+u)^2} = -\frac{2}{1+u}+C = -\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C.$$

Следует, однако, иметь в виду, что, хотя с принципиальной точки зрения рассматриваемые интегралы всегда можно привести к интегралу от рациональной дроби указанным методом, при практическом его применении он часто приводит к громоздким вычислениям; вместе с тем другие методы, в частности подстановки вида

$$u = \sin x, \quad u = \cos x, \quad u = \operatorname{tg} x, \tag{26.2}$$

иногда значительно быстрее позволяют вычислить нужный интеграл.

Примеры. 1. Рассмотрим интеграл $\int\frac{dx}{\cos^4 x}$. Представим его в виде $\int\frac{dx}{\cos^4 x} = \int\frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x}$. Сразу видно, что в этом случае очень удобна подстановка $u=\operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)\, d\operatorname{tg} x = \int (1+u^2)\, du =$$
$$= u + \frac{u^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

2. Представляя интеграл $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$ в виде $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^4 x \cos x}$, убеждаемся в целесообразности подстановки $u = \cos x$. Действительно,

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = -\int \frac{d\cos x}{\sin^4 x \cos x} = -\int \frac{du}{(1-u^2)^2 u} = -\frac{1}{2}\int \frac{du^2}{(1-u^2)^2 u^2} =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{(1-v)^2 v}{}^{*)} = -\frac{1}{2}\int \frac{(1-v)+v}{(1-v)^2 v}\, dv =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{(1-v)v} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{(1-v)^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{(1-v)+v}{(1-v)v}\, dv - \frac{1}{2}\frac{1}{1-v} =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{1-v} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-v} = -\frac{1}{2}\ln|v| +$$
$$+ \frac{1}{2}\ln|1-v| - \frac{1}{2}\frac{1}{1-v} + C = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C.$$

Конечно, интегралы, рассмотренные в примерах 1 и 2, могут быть вычислены и с помощью подстановки (26.1), например,

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \frac{1}{4}\int \frac{(1+u^2)^3\, du}{u^3(1-u^2)};$$

однако, при таком способе пришлось бы интегрировать более сложную рациональную дробь, чем в результате применения подстановки $u=\cos x$.

3. Иногда при вычислении интегралов, подынтегральное выражение которых содержит $\sin x$ и $\cos x$, бывает полезно прибегать и к другим искусственным приемам, используя известные тригонометрические формулы, как, например, формулу $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Покажем на рассмотренном только что примере способ применения этой формулы:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos x}\, dx = \int \frac{dx}{\sin x \cos x} + \int \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x} =$$
$$= \int \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} + \int \frac{d\sin x}{\sin^3 x} = \int \frac{du}{u} + \int \frac{dv}{v^3}{}^{*)} =$$
$$= \ln|u| - \frac{1}{2}\frac{1}{v^2} + C = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C.$$

Как и следовало ожидать, получился тот же результат, что и выше.

---

*) Здесь сделана подстановка $v=u^2$.

26.2. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int \sin^m x \cos^n x dx$

Пусть m и n — рациональные числа. Интеграл $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ с помощью подстановок $u = \sin x$ или $u = \cos x$ сводится к интегралу от дифференциального бинома.

Действительно, полагая, например, $u = \sin x$, получим

$$\cos x = (1 - u^2)^{1/2}, \quad du = \cos x\, dx, \quad dx = (1 - u^2)^{-1/2}\, du,$$

и потому

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int u^m (1 - u^2)^{\frac{n-1}{2}}\, du.$$

Таким образом, интеграл $\int \sin^m x \cos^m x\, dx$ выражается или нет через элементарные функции в зависимости от того, обладает этим свойством или нет получающийся интеграл от дифференциального бинома.

В случае когда m и n целые (не обязательно положительные) числа, интеграл $\int \sin^m x \cos^m x\, dx$ относится к типу интегралов, рассмотренных в предыдущем пункте, в частности, для их вычисления целесообразно применять подстановки (26.2).

Например, если $m = 2k + 1$ (соответственно $n = 2k + 1$) — нечетное число, то можно сделать подстановку $u = \cos x$ (соответственно $u = \sin x$):

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x\, dx = -\int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x d \cos x =$$
$$= -\int (1 - u^2)^k u^n\, du.$$

Рассматриваемый интеграл сведен к интегралу от рациональной дроби.

Аналогичный результат можно получить и для интеграла $\int \sin^m x \cos^{2k+1} x\, dx$ с помощью подстановки $u = \sin x$.

Если $m = 2k + 1$, $n = 2l + 1$, то бывает полезной подстановка $t = \cos 2x$:

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^{2l+1} x\, dx = \int \sin^{2k} x \cos^{2l} x \sin x \cos x\, dx =$$
$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^l \left(-\frac{1}{2}\, d \cos 2x\right) =$$
$$= -\frac{1}{2^{k+l+1}} \int (1 - t)^k (1 + t)^l\, dt,$$

т. е. снова получился интеграл от рациональной дроби.

Если оба показателя m и n положительны и четны (или один из них ноль), то целесообразно применять формулы

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

которые, очевидно, приводят рассматриваемый интеграл к интегралам того же типа, но с меньшими, также неотрицательными показателями. Например,

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

26.3. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int \sin\alpha x \cos\beta x dx$

Указанные в заглавии пункта интегралы непосредственно вычисляются, если в них подынтегральные функции преобразовать согласно формулам

$$\sin\alpha x\cos\beta x = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x],$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x],$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x].$$

Например,

$$\int \sin 2x\cos x\, dx = \frac{1}{2}\int(\sin 3x + \sin x)\, dx = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C.$$

26.4. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ, ВЫЧИСЛЯЮЩИЕСЯ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

К числу интегралов, указанных в заглавии этого пункта, относятся, например, интегралы

$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\, dx$, $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\, dx$, $\int x^n\cos\alpha x\, dx$, $\int x^n\sin\alpha x\, dx$, $\int x^n e^{\alpha x}\, dx$, $\int x^n \arcsin x\, dx$, $\int x^n\arccos x\, dx$, $\int x^n \operatorname{arctg} x\, dx$, $\int x^n\operatorname{arcctg} x\, dx$, $\int x^n \ln x\, dx$ (n — целое неотрицательное).

Все эти интегралы вычисляются с помощью, вообще говоря, повторного интегрирования по частям.

Действительно, имеем:

$$I = \int e^{\alpha x}\cos\beta x\, dx = \int e^{\alpha x}\, d\frac{\sin\beta x}{\beta} = \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\, dx =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x} d\left(-\frac{\cos\beta x}{\beta}\right) =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta} + \frac{\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\, dx =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} I,$$

откуда

$$I=\frac{e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}+C. \tag{26.3}$$

Аналогично вычисляется и интеграл $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$.

В интегралах $\int x^n\cos\alpha x\,dx$, $\int x^n\sin\alpha x\,dx$, $\int x^n e^{\alpha x}\,dx$, положив $u=x^n$ и соответственно $dv=\cos\alpha x\,dx$, $dv=\sin\alpha x\,dx$, $dv=e^{\alpha x}\,dx$, после интегрирования по частям снова придем к интегралу одного из указанных видов, но уже с меньшим на единицу показателем степени. Применяя этот прием n раз, придем к интегралу рассматриваемого типа с $n=0$, который, очевидно, сразу берется. Например,

$$\int x^2\sin x\,dx=\int x^2d(-\cos x)=-x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx=$$
$$=-x^2\cos x+2\int x d\sin x=-x^2\cos x+2x\sin x-$$
$$-2\int\sin x\,dx=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C.$$

Используя интегралы, рассмотренные выше, можно вычислять и более сложные интегралы. Вычислим, например, интеграл

$$\int x^n e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx.$$

Интегрируя по частям и применяя (26.3), имеем:

$$\int x^n e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\int x^n d\left[\frac{e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\right]=$$
$$=x^n e^{\alpha x}\frac{\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}-\frac{n\beta}{\alpha^2+\beta^2}\int x^{n-1}e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx-$$
$$-\frac{n\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\int x^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx.$$

Полученные в правой части интегралы — того же типа, что и исходный, только степень у x на единицу меньше. Применяя последовательно указанный прием, мы придем к интегралам вида

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx \quad \text{и} \quad \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx,$$

которые были рассмотрены выше.

Наконец, интегралы

$$\int x^n\arcsin x\,dx,\ \int x^n\arccos dx,\ \int x^n\operatorname{arctg} x\,dx,$$
$$\int x^n\operatorname{arcctg} x\,dx \ \text{и} \ \int x^n\ln x\,dx$$

сводятся интегрированием по частям к интегралу от алгебраической функции, если в них положить $dv=x^n\,dx$, а за функцию u взять оставшуюся трансцендентную функцию, т. е. одну из функций: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\ln x$. Например,

$$\int x\ln x\,dx=\int\ln x\,d\frac{x^2}{2}=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C.$$

26.5. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$

Подстановка

$$u = \operatorname{th}\frac{x}{2}$$

сводит интеграл $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$ к интегралу от рациональной дроби.

Действительно, при указанной замене переменной имеем

$$\operatorname{sh} x = \frac{2u}{1-u^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+u^2}{1-u^2}, \quad dx = \frac{2du}{1-u^2},$$

поэтому

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx = 2\int R\left(\frac{2u}{1-u^2}, \frac{1+u^2}{1-u^2}\right)\frac{du}{1-u^2}.$$

В конкретных примерах иногда оказывается значительно удобнее использовать подстановки вида $u = \operatorname{sh} x$, $u = \operatorname{ch} x$ или $u = \operatorname{th} x$, позволяющие вычислить интеграл существенно проще (ср. п. 26.1).

Интегралы вида

$$\int \operatorname{sh}^m x \operatorname{ch}^n x\,dx,$$

где m и n — рациональные числа, с помощью подстановок $v = \operatorname{sh} x$ ($u = \operatorname{ch} x$) приводятся к интегралу от дифференциального бинома (ср. п. 26.2).

26.6. ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ИНТЕГРАЛАХ, НЕ ВЫРАЖАЮЩИХСЯ ЧЕРЕЗ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Мы рассмотрели различные классы элементарных функций и нашли их первообразные, которые также являются элементарными функциями. Однако не всякая элементарная функция имеет в качестве своей первообразной элементарную же функцию. С подобным обстоятельством мы уже встретились при рассмотрении интеграла от дифференциального бинома: в этом случае подынтегральная функция — элементарная (иррациональная), а интеграл от нее, как отмечалось, вычисляется далеко не всегда.

Можно показать, что интегралы

$$\int \frac{e^x}{x^n}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x^n}\,dx, \quad \int \frac{\cos x}{x^n}\,dx$$

(n — натуральное число) также не выражаются через элементарные функции.

Имеется ряд интегралов от элементарных функций, не выражающихся через элементарные функции и играющих большую роль как в самом математическом анализе, так и в его разнообразных приложениях. К таким интегралам относится, например, интеграл

$$\int e^{-x^2}\,dx,$$

а также так называемые *эллиптические интегралы*

$$\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right)dx,$$

где $P(x)$ — многочлен третьей или четвертой степени. В общем случае эти интегралы не выражаются через элементарные функции. Особенно часто встречаются интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad \text{и} \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad 0<k<1,$$

которые подстановкой $x=\sin\varphi$ приводятся к линейным комбинациям интегралов

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{и} \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi;$$

они называются соответственно эллиптическими интегралами *первого и второго рода в форме Лежандра* *).

Упражнения. Вычислить интегралы.

1. $\int |x|\,dx.$
2. $\int (2x-5)^2\,dx.$
3. $\int \sin^2 x\,dx.$
4. $\int \left(2x^2-3x+\frac{1}{x}\right)dx.$
5. $\int \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$
6. $\int x^2\sqrt[5]{2x^3-1}\,dx.$
7. $\int \frac{dx}{\cos x}.$
8. $\int \operatorname{ctg} x\,dx.$
9. $\int xe^{-x}\,dx.$
10. $\int \ln x\,dx.$
11. $\int \operatorname{arctg} x\,dx.$
12. $\int x^2\ln x\,dx.$
13. $\int \sqrt{x^2+3}\,dx.$
14. $\int \sqrt{x^2-1}\,dx.$
15. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)}.$
16. $\int \frac{x^4+1}{x^2(x-1)(x+1)^2}\,dx.$
17. $\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}\,dx.$
18. $\int \frac{dx}{(1-x)(1+x^3)}.$
19. $\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx.$
20. $\int \frac{x^7\,dx}{x^{16}+1}.$
21. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}.$
22. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\,dx.$
23. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}.$
24. $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$
25. $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}\,dx.$
26. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}.$
27. $\int \frac{x^3\,dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+2x+4}}.$
28. $\int \sin^3 x\cos^8 x\,dx.$
29. $\int \sin^4 x\,dx.$

---

*) А. Лежандр (1752—1833) — французский математик.

30. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$.
31. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^2 x}$.
32. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$.
33. $\int \sin 3x \cos 5x \, dx$.
34. $\int \arccos^2 x \, dx$.
35. $\int x^2 \arcsin^2 x \, dx$.
36. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x - 2 \operatorname{ch} x}$.
37. $\int x^3 \ln^3 x \, dx$.
38. $\int x e^x \sin x \, dx$.
39. $\int \frac{\ln (x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$.
40. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

§ 27. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

27.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ПО РИМАНУ

Напомним (см. п. 16.5), что *разбиением* τ отрезка $[a, b]$ называется любая конечная система его точек x_i, $i=0, 1, 2, \ldots, k$, такая, что

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k = b.$$

При этом пишется $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$. Каждый из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, называется *отрезком разбиения* τ, его длина обозначается через Δx_i, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Величину

$$\delta_\tau = \max_{i=1, 2, \ldots, k} \Delta x_i$$

назовем *мелкостью разбиения* τ.

Разбиение τ' отрезка $[a, b]$ называется следующим за разбиением τ (или продолжающим разбиение τ) того же отрезка, а также вписанным в разбиение τ, если каждая точка разбиения τ является и точкой разбиения τ'; иначе говоря, если каждый отрезок разбиения τ' содержится в некотором отрезке разбиения τ (говорят еще, что τ' — измельчение разбиения τ). В этом случае пишут $\tau' \succ \tau$, или, что то же, $\tau \prec \tau'$.

Совокупность всех разбиений данного отрезка обладает следующими свойствами.

1°. Если $\tau_1 \prec \tau_2$, а $\tau_2 \prec \tau_3$, то $\tau_1 \prec \tau_3$.

2°. Для любых τ_1 и τ_2 существует такое τ, что $\tau \succ \tau_1$ и $\tau \succ \tau_2$.

В самом деле, первое свойство следует просто из того, что в силу условия $\tau_3 \succ \tau_2$ каждый отрезок разбиения τ_3 содержится в некотором отрезке разбиения τ_2, который в свою очередь, согласно условию $\tau_2 \succ \tau_1$, содержится в каком-то отрезке разбиения τ_1; таким образом, всякий отрезок разбиения τ_3 лежит на определенном отрезке разбиения τ_1, а это и означает, что $\tau_3 \succ \tau_1$.

Для доказательства второго свойства разбиений заметим лишь, что если заданы два разбиения τ_1 и τ_2, то разбиение τ, состоя-