30. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx.$

31. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^2 x}.$

32. $\int \frac{dx}{2+\cos x}.$

33. $\int \sin 3x \cos 5x\,dx.$

34. $\int \arccos^2 x\,dx.$

35. $\int x^2 \arcsin^2 x\,dx.$

36. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x - 2\operatorname{ch} x}.$

37. $\int x^3 \ln^3 x\,dx.$

38. $\int xe^x \sin x\,dx.$

39. $\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

40. $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}.$

§ 27. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

27.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ПО РИМАНУ

Напомним (см. п. 16.5), что *разбиением* τ отрезка $[a, b]$ называется любая конечная система его точек x_i, $i=0, 1, 2, \ldots, k$, такая, что

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{k-1}<x_k=b.$$

При этом пишется $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$. Каждый из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \ldots, k$, называется *отрезком разбиения* τ, его длина обозначается через Δx_i, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1, 2, \ldots, k$.

Величину

$$\delta_\tau=\max_{i=1, 2, \ldots, k} \Delta x_i$$

назовем *мелкостью разбиения* τ.

Разбиение τ' отрезка $[a, b]$ называется следующим за разбиением τ (или продолжающим разбиение τ) того же отрезка, а также вписанным в разбиение τ, если каждая точка разбиения τ является и точкой разбиения τ'; иначе говоря, если каждый отрезок разбиения τ' содержится в некотором отрезке разбиения τ (говорят еще, что τ' — измельчение разбиения τ). В этом случае пишут $\tau' \succ \tau$, или, что то же, $\tau \prec \tau'$.

Совокупность всех разбиений данного отрезка обладает следующими свойствами.

1°. Если $\tau_1 \prec \tau_2$, а $\tau_2 \prec \tau_3$, то $\tau_1 \prec \tau_3$.

2°. Для любых τ_1 и τ_2 существует такое τ, что $\tau \succ \tau_1$ и $\tau \succ \tau_2$.

В самом деле, первое свойство следует просто из того, что в силу условия $\tau_3 \succ \tau_2$ каждый отрезок разбиения τ_3 содержится в некотором отрезке разбиения τ_2, который в свою очередь, согласно условию $\tau_2 \succ \tau_1$, содержится в каком-то отрезке разбиения τ_1; таким образом, всякий отрезок разбиения τ_3 лежит на определенном отрезке разбиения τ_1, а это и означает, что $\tau_3 \succ \tau_1$.

Для доказательства второго свойства разбиений заметим лишь, что если заданы два разбиения τ_1 и τ_2, то разбиение τ, состоящее из всех точек, входящих как в разбиение τ_1, так и в разбиение τ_2, очевидно, будет следовать за τ_1 и за τ_2.

Пусть теперь на отрезке $[a, b]$ определена функция f и пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — некоторое разбиение этого отрезка,

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

а δ_τ — мелкость этого разбиения.

Зафиксируем произвольным образом точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, и составим сумму

$$\sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_k) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Суммы вида $\sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_k)$ называются *интегральными суммами Римана**) функции f (рис. 101). Иногда для краткости мы будем их обозначать через $\sigma_\tau(f)$, $\sigma_\tau(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ или даже просто через σ_τ.

Геометрически в случае, когда функция f неотрицательна (рис. 101) каждое слагаемое интегральной суммы Римана σ_τ равно площади прямоугольника с основанием длины Δx_i и с высотой $f(\xi_i)$. Вся же сумма σ_τ равна площади «ступенчатой фигуры», получающейся объединением всех указанных прямоугольников.

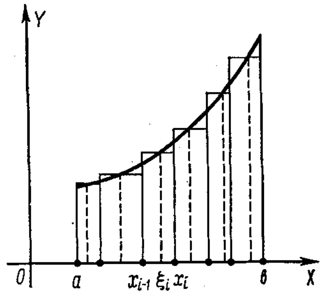

Рис. 101

Определение 1. *Функция f называется интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a, b]$, если существует такое число A, что для любой последовательности разбиений отрезка $[a, b]$*

$$\tau_n = \left\{x_i^{(n)}\right\}_{i=0}^{i=k_n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

у которой $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_{\tau_n} = 0$, и для любого выбора точек

$$\xi_i^{(n)} \in \left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right], \quad i = 1, 2, \ldots, k_n, \ n = 1, 2, \ldots,$$

существует предел последовательности интегральных сумм $\sigma_{\tau_n}\left(f; \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{k_n}^{(n)}\right)$ и он равен A:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f\left(\xi_i^{(n)}\right)\Delta x_i^{(n)} = A, \tag{27.1}$$

где

$$\Delta x_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}; \quad i = 1, 2, \ldots, k_n; \ n = 1, 2, \ldots.$$

*) Б. Риман (1826—1866) — немецкий математик.

При выполнении этих условий число A называется (римановым) определенным интегралом функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначается через $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Выражение $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ читается «интеграл от a до b $f(x)\,dx$; x называется *переменной интегрирования*, f — *подынтегральной функцией*, a — *нижним*, а b — *верхним пределом интеграла*; отрезок $[a, b]$ называется *промежутком интегрирования*.

Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\tau_n}\left(f;\ \xi_1^{(n)},\ \ldots,\ \xi_{k_n}^{(n)}\right),$$

где последовательность τ_n такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_{\tau_n} = 0$.

Для краткости записи будем в этом случае просто писать

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f).$$

Подобно тому как определение предела функции можно сформулировать двумя эквивалентными способами с помощью пределов последовательностей и с помощью «$(\varepsilon - \delta)$-языка», так и определение интеграла можно сформулировать иначе.

Определение 2. *Число A называется определенным интегралом функции f на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что каково бы ни было разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$, мелкость которого меньше δ: $\delta_\tau < \delta$, и каковы бы ни были точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, выполняется неравенство*

$$\left| \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i - A \right| < \varepsilon,$$

где

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Упражнение 1. Доказать, что два данных выше определения определенного интеграла эквивалентны.

Из определения 1 следует, что для неотрицательных функций определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ является пределом, при $\delta_\tau \to 0$, последовательности площадей соответствующих ступенчатых фигур; поэтому он, естественно, оказывается связанным с понятием площади, а именно он равен площади фигуры*) (называемой

*) Привычный из элементарной геометрии термин «фигура» употребляется здесь всюду в смысле «плоское множество».

«криволинейной трапецией»), границей которой является график функции f, отрезок $[a, b]$ оси x-ов и, быть может, отрезки прямых $x=a$ и $x=b$, ординаты точек которых меняются соответственно от нуля до $f(a)$ и до $f(b)$ (рис. 102). Для того чтобы это доказать, надо прежде всего уточнить само понятие площади рассматриваемых фигур. Все это будет сделано ниже, в § 31.

Заметим, что введенное здесь понятие предела интегральных сумм Римана является новым понятием, не укладывающимся ни в понятие предела последовательности, ни в понятие предела функции.

В дальнейшем придется использовать аналогичное понятие предела не только для интегральных сумм Римана, но и для других объектов. Поэтому сформулируем общее определение предела этого вида.

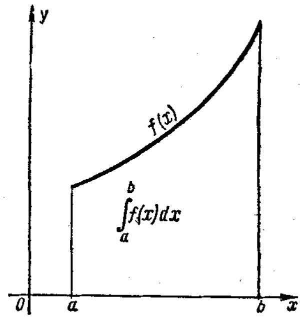

Рис. 102

Определение 3. *Рассмотрим множество* $\mathfrak{T}=\{\tau\}$ *всех разбиений отрезка* $[a, b]$. *Пусть на этом множестве определена числовая, вообще говоря, многозначная функция* $\Phi(\tau)$, $\tau\in\mathfrak{T}$. *Будем говорить, что функция* $\Phi(\tau)$ *при* $\delta_\tau\to 0$ *имеет предел, равный* A, *и будем писать*

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\Phi(\tau)=A,$$

если для любой последовательности разбиений $\tau_n\in\mathfrak{T}$, $n=1, 2, \ldots$, *такой, что* $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_{\tau_n}=0$, *при любом выборе значений* $\Phi(\tau_n)$ *числовая последовательность* $\Phi(\tau_n)$ *сходится к числу* A, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(\tau_n)=A.$$

Это понятие предела определено с помощью понятия предела последовательности, поэтому для него оказываются справедливыми многие свойства, аналогичные соответствующим свойствам предела последовательности. С соответствующими примерами мы встретимся в дальнейшем.

Как и в случае предела интегральных сумм Римана, понятие этого предела можно сформулировать на «$(\varepsilon-\delta)$-языке», что предоставляется читателю.

Заметим в заключение, что многозначность функции Φ, о которой идет речь в определении 3 в случае интегральных сумм Римана, связана с различным способом выбора точек

$$\xi_i\in[x_{i-1}, x_i],\qquad i=1, 2, \ldots, k.$$

27.2. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ИНТЕГРИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ

Установим прежде всего необходимое условие, которому удовлетворяют интегрируемые функции — их ограниченность.

Теорема 1. *Если функция интегрируема на некотором отрезке, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция f не ограничена на отрезке $[a, b]$ и пусть фиксировано некоторое разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ этого отрезка. В силу неограниченности функции f на всем отрезке $[a, b]$ она не ограничена по крайней мере на одном отрезке разбиения τ. Пусть для определенности функция f не ограничена на отрезке $[x_0, x_1]$. Тогда на этом отрезке существует последовательность $\xi_1^{(n)} \in [x_0, x_1]$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что*)

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\xi_1^{(n)}\right) = \infty. \tag{27.2}$$

Зафиксируем теперь каким-либо образом точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 2, 3, \ldots, k$. Тогда сумма

$$\sum_{i=2}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i$$

будет иметь вполне определенное значение. Поэтому в силу (27.2)

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_\tau\left(f;\ \xi_1^{(n)}, \xi_2, \ldots, \xi_k\right) = \lim_{n\to\infty}\left[f\left(\xi_1^{(n)}\right)\Delta x_1 + \sum_{i=2}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i\right] = \infty$$

и, значит, каково бы ни было число $M > 0$, всегда можно подобрать такой номер n_0, что если на первом отрезке $[x_0, x_1]$ взять точку $\xi_i^{(n_0)}$, то

$$\left|\sigma_\tau\left(f;\ \xi_1^{n_0}, \xi_2, \ldots, \xi_k\right)\right| > M.$$

Отсюда следует, что суммы σ_τ не могут стремиться ни к какому конечному пределу при $\delta_\tau \to 0$.

Действительно, если бы существовал конечный предел $\lim\limits_{\delta_\tau\to 0} \sigma_\tau = A$, то для любого $\varepsilon > 0$ нашлось бы такое $\delta_\varepsilon > 0$, что для всех разбиений $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ мелкости $\delta_\tau < \delta_\varepsilon$ при любом выборе точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, выполнялось бы неравенство $|\sigma_\tau - A| < \varepsilon$ и, следовательно,

$$|\sigma_\tau| = |(\sigma_\tau - A) + A| \leqslant |\sigma_\tau - A| + |A| < \varepsilon + |A|.$$

---

*) Действительно, в силу неограниченности функции f на отрезке $[x_0, x_1]$, например для любого натурального $n = 1, 2, \ldots$, существует такая точка $\xi_1^{(n)} \in [x_0, x_1]$, что $\left|f\left(\xi_1^{n}\right)\right| > n$. Очевидно, что последовательность $\left\{\xi_1^{(n)}\right\}$ и удовлетворяет условию (27.2).

В нашем случае, т. е. в случае неограниченности функции f, для любого разбиения τ (в том числе и такого, что $\delta_\tau < \delta_\varepsilon$, если существовало бы указанное δ_ε) при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ можно так выбрать точки ξ_i, что будет выполняться неравенство

$$|\sigma_\tau| > |A| + \varepsilon.$$

Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

Условие ограниченности функции f будучи необходимым для ее интегрируемости, не является вместе с тем достаточным. Примером, доказывающим это утверждение, может служить так называемая *функция Дирихле* (см. п. 4.2)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}. \end{cases}$$

Рассмотрим ее на отрезке $[0, 1]$. Она, очевидно, ограничена на нем. Покажем, что она не интегрируема. Зафиксируем произвольное разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[0, 1]$. Если выбрать точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$ рациональными, то получим

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i = 1,$$

а если взять ξ_i иррациональными, то

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i = 0.$$

Так как это верно для любого разбиения τ, то интегральные суммы σ_τ заведомо не стремятся ни к какому пределу при $\delta_\tau \to 0$.

27.3. ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ СУММЫ ДАРБУ. ВЕРХНИЙ И НИЖНИЙ ИНТЕГРАЛЫ ДАРБУ

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — некоторое его разбиение и $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Положим (рис. 103)

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$S_\tau = S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i, \tag{27.3}$$

$$s_\tau = s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i. \tag{27.4}$$

Очевидно, $s_\tau \leqslant S_\tau$.

Сумма S_τ называется *верхней*, а s_τ — *нижней суммой Дарбу*.

Свойства сумм Дарбу

1°. *Если функция f ограничена, то при любом разбиении суммы S_τ и s_τ определены.*

В самом деле, в этом случае M_i и m_i, $i=1, 2, \ldots, k$ конечны, и поэтому выражения (27.3) и (27.4) имеют смысл.

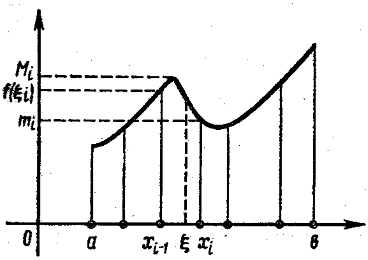

Рис. 103

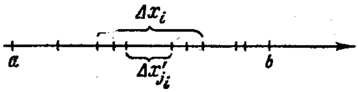

Рис. 104

2°. *Если* $\tau' \succ \tau$, *то* $S_{\tau'} \leqslant S_\tau$ *и* $s_\tau \leqslant s_{\tau'}$.

Доказательство. Пусть $\tau = \{\tau_i\}_{i=0}^{i=k}$ и $\tau' = \{x'_j\}_{j=0}^{j=k'}$ — два разбиения отрезка $[a, b]$, таких, что $\tau \prec \tau'$ и

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), \quad i=1, 2, \ldots, k,$$

$$m'_j = \inf_{x'_{j-1} \leqslant x \leqslant x'_j} f(x), \quad j=1, 2, \ldots, k'.$$

Если $[x'_{j-1}, x'_j] \subset [x_{i-1}, x_i]$, то, очевидно,

$$m_i \leqslant m'_j. \tag{27.5}$$

(нижняя грань при уменьшении множества может только увеличиться).

В силу условия $\tau \prec \tau'$ каждый отрезок $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения τ является объединением каких-то отрезков разбиения τ'; будем обозначать эти отрезки через $[x'_{(j-1)_i}, x'_{j_i}]$. Таким образом, если

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \text{ и } \Delta x'_{j_i} = x'_{j_i} - x'_{(j-1)_i},$$

то (рис. 104)

$$\Delta x_i = \sum_{j_i} \Delta x'_{j_i}.$$

Используя эти обозначения и неравенство (27.5), получим:

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} m_i \sum_{j_i} \Delta x'_{j_i} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j_i} m_i \Delta x'_{j_i} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \sum_{j_i} m'_{j_i} \Delta x'_{j_i} = \sum_{j=1}^{k'} m'_j \Delta x'_j = s_{\tau'}.$$

Мы доказали, что $s_\tau \leqslant s_{\tau'}$.

Аналогично доказывается, что $S_\tau \geqslant S_{\tau'}$ при $\tau \prec \tau'$. □

Следствие. *Для любых двух разбиений τ_1 и τ_2 отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство*

$$s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}, \tag{27.6}$$

т. е. любая нижняя сумма Дарбу меньше любой верхней.

Действительно, если даны два разбиения τ_1 и τ_2 отрезка $[a, b]$, то существует разбиение τ этого отрезка, такое, что $\tau \succ \tau_1$ и $\tau \succ \tau_2$ (см. п. 27.1). Применяя свойство 2°, получим

$$s_{\tau_1} \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant S_{\tau_2}. \ \square$$

Очевидно, что суммы Римана и Дарбу связаны неравенствами

$$s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau.$$

Следующее свойство является уточнением этого утверждения.

3°. *Если $\sigma_\tau = \sigma(f;\ \xi_1, \ldots, \xi_k)$ — какая-либо интегральная сумма Римана, соответствующая данному разбиению τ, то*

$$s_\tau = \inf_{\xi_1, \ldots, \xi_k} \sigma_\tau, \quad S_\tau = \sup_{\xi_1, \ldots, \xi_k} \sigma_\tau.$$

Доказательство. Пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — разбиение отрезка $[a, b]$ и $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Если заданы какие-либо числовые множества X_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ и постоянные $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то для множества

$$X = \left\{x : x = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i,\ x_i \in X_i,\ i = 1, 2, \ldots, k\right\},$$

как легко видеть, справедливы равенства (почему?)

$$\sup X = \sum_{i=1}^{k} a_i \sup X_i, \quad \inf X = \sum_{i=1}^{k} a_i \inf X_i.$$

В силу этого имеем:

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \inf_{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i} f(\xi_i)\, \Delta x_i = \inf_{\substack{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \\ i=1, 2, \ldots, k}} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\, \Delta x_i =$$

$$= \inf_{\substack{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \\ i=1, 2, \ldots, k}} \sigma_\tau(f;\ \xi_1, \ldots, \xi_k).$$

Аналогично,

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{k} M_i\, \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \sup_{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i} f(\xi_i)\, \Delta x_i =$$

$$= \sup_{\substack{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \\ i=1, 2, \ldots, k}} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\, \Delta x_i = \sup_{\substack{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \\ i=1, 2, \ldots, k}} \sigma_\tau(f;\ \xi_1, \ldots, \xi_k). \ \square$$

4°. $S_\tau - s_\tau = \sum\limits_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i$, *где* $\omega_i(f)$ — *колебание функции* f *на отрезке* $[x_{i-1}, x_i]$ (см. п. 19.6), $i=1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. Отметим сначала, что если для двух данных числовых множеств X и Y положить

$$Z = \{z:\ z = x - y,\ x \in X,\ y \in Y\},$$

то $\sup Z = \sup X - \inf Y$ (почему?).

Используя это, получим

$$M_i - m_i = \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x) = \sup_{\substack{x_{i-1} \leqslant x' \leqslant x_i \\ x_{i-1} \leqslant x'' \leqslant x_i}} [f(x'') - f(x')] = \omega_i(f),\quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

поэтому

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i. \ \square$$

Положим теперь

$$I_* = \sup_\tau s_\tau,\quad I^* = \inf_\tau S_\tau.$$

I_* называется *нижним интегралом Дарбу* функции f на отрезке $[a, b]$, а I^* — ее *верхним интегралом*.

Из свойств 1° и 2° сумм Дарбу следует, что если функция f ограничена, то как ее нижний интеграл Дарбу, так и верхний конечны. В силу следствия из свойства 2° будем иметь также

$$I_* \leqslant I^*. \tag{27.7}$$

27.4. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Теорема 2. *Для того чтобы ограниченная на некотором отрезке функция была интегрируемой на нем, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{27.8}$$

Условие (27.8) означает (см. определение 3 в п. 27.1), что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения τ мелкости $\delta_\tau < \delta$ выполняется неравенство

$$|S_\tau - s_\tau| < \varepsilon. \tag{27.9}$$

Поскольку $s_\tau \leqslant S_\tau$, то (27.9) равносильно неравенству

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon.$$

Доказательство необходимости. Пусть ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция f интегрируема на нем и пусть $I = \int_a^b f(x)\,dx$; тогда $\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = I$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если $\delta_\tau < \delta$, то

$$|\sigma_\tau - I| < \varepsilon, \text{ или } I - \varepsilon < \sigma_\tau < I + \varepsilon.$$

Отсюда при $\delta_\tau < \delta$, согласно свойству 3° сумм Дарбу (см. п. 27.3), получаем неравенство

$$I - \varepsilon \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant I + \varepsilon.$$

Таким образом, если $\delta_\tau < \delta$, то

$$0 \leqslant S_\tau - s_\tau \leqslant 2\varepsilon,$$

а это и означает выполнение условия (27.8).

Доказательство достаточности. Пусть функция f ограничена и выполняется условие (27.8). Из определения нижнего и верхнего интегралов Дарбу и из неравенства (27.7) имеем

$$s_\tau \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau, \tag{27.10}$$

поэтому

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_\tau - s_\tau,$$

откуда в силу (27.8) следует, что $I^* - I_* = 0$. Обозначая общее значение верхнего и нижнего интегралов Дарбу через I, т. е. полагая $I = I_* = I^*$, из (27.10) получим

$$s_\tau \leqslant I \leqslant S_\tau,$$

и поэтому

$$0 \leqslant I - s_\tau \leqslant S_\tau - s_\tau, \quad 0 \leqslant S_\tau - I \leqslant S_\tau - s_\tau.$$

Отсюда в силу (27.8) вытекает, что

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (I - s_\tau) = \lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - I) = 0,$$

а значит,

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = I. \tag{27.11}$$

Но в силу свойства 3° интегральных сумм Дарбу (см. п. 27.3)

$$s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau. \tag{27.12}$$

Из (27.11) и (27.12) следует (ср. аналогичные утверждения в п. 3.3 и 4.7), что

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = I,$$

а это и означает интегрируемость функции f. □

Следствие 1. *Если функция f интегрируема, то не только ее интегральные суммы Римана, но и ее суммы Дарбу стремятся к ее интегралу при стремлении мелкости разбиения к нулю.*

Действительно, если функция f интегрируема, то выполняется условие (27.8), а из него, как мы видели, и следует утверждение следствия, т. е. равенство (27.11). □

Следствие 2. *Для того чтобы ограниченная на некотором отрезке функция f была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\,\Delta x_i = 0,$$

где $\omega_i(f)$ — колебание функции f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$.

Это следует непосредственно из свойства 4° сумм Дарбу (см. п. 27.3). □

Задача 19. Доказать, что, для того чтобы функция была интегрируемой на отрезке, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной на нем и чтобы ее нижний и верхний интегралы Дарбу совпадали; при этом общее значение этих интегралов и является ее интегралом.

27.5. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ И МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема 3. *Функция, определенная и непрерывная на некотором отрезке, интегрируема на нем.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$; тогда, как известно, она ограничена (см. теорему 1 в п. 6.1) и равномерно непрерывна (см. теорему 5 в п. 19.6) на этом отрезке. Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности существует такое $\delta > 0$, что для любых точек $\xi \in [a, b]$ и $\eta \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|\eta - \xi| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(\eta) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \qquad (27.13)$$

Возьмем какое-либо разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ мелкости $\delta_\tau < \delta$. Пусть, как всегда, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Поскольку непрерывная на отрезке функция достигает своей нижней и верхней грани на этом отрезке, то существуют такие точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, что

$$f(\xi_i) = m_i, \quad f(\eta_i) = M_i.$$

Точки ξ_i и η_i принадлежат одному и тому же отрезку разбиения τ, поэтому

$$|\eta_i - \xi_i| \leq \Delta x_i \leq \delta_\tau < \delta.$$

Отсюда, в силу (27.13), вытекает неравенство

$$f(\eta_i) - f(\xi_i) = |f(\eta_i) - f(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Следовательно, для любого разбиения τ мелкости $\delta_\tau < \delta$ выполняется условие

$$0 \leqslant S_\tau - s_\tau =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} [f(\eta_i) - f(\xi_i)]\,\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i = \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0$. Поэтому, согласно теореме 2, функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. □

Теорема 4. *Функция, определенная и монотонная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$, например, монотонно возрастает на нем. Тогда

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b), \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

Таким образом, функция f ограничена на отрезке $[a, b]$. Далее, для любого разбиения $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$, очевидно, имеем

$$m_i = f(x_{i-1}), \qquad M_i = f(x_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, k,$$

поэтому

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\,\Delta x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})]\,\Delta x_i \leqslant \delta_\tau \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = [f(b) - f(a)]\,\delta_\tau,$$

ибо в сумме $\sum\limits_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})]$ взаимно уничтожаются все слагаемые, кроме $f(b)$ и $f(a)$.

Из полученного неравенства следует, что

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} [S_\tau(f) - s_\tau(f)] = 0.$$

Поэтому (см. п. 27.4) функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. □

Упражнение 2. Доказать, что если функция ограничена и непрерывна на некотором отрезке, кроме, быть может, конечного числа точек, то она интегрируема на этом отрезке.

Задача 20. Доказать, что, для того чтобы ограниченная на некотором отрезке функция была интегрируемой на нем, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовала конечная или счетная система интервалов, которые содержали бы все точки разрыва заданной функции и сумма длин которых была бы меньше заданного ε.