§ 28. СВОЙСТВА ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

28.1. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Будем систематически, не делая специальных ссылок, употреблять обозначения и терминологию, введенную в предыдущем параграфе.

Прежде всего заметим, что поскольку интеграл от функции является числом, сопоставляемым заданной функции согласно данному выше определению, то само собой разумеется, что это число не зависит от выбора обозначения для аргумента подынтегральной функции, т. е. от обозначения *переменной интегрирования*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\xi)\,d\xi.$$

Перейдем теперь к рассмотрению основных свойств определенного интеграла.

1°. $\int_a^b dx = b - a.$

Действительно, здесь подынтегральная функция равна единице, поэтому для любой интегральной суммы Римана σ_τ имеем

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i = b - a. \ \square$$

2°. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[a^*, b^*]$, содержащемся в $[a, b]$.*

Доказательство. Прежде всего, если функция f ограничена на отрезке $[a, b]$, то она, очевидно, ограничена и на $[a^*, b^*]$. Далее, каково бы ни было разбиение $\tau^* = \{x_i^*\}_{i=0}^{i=k^*}$ отрезка $[a^*, b^*]$ мелкости δ_{τ^*}, его всегда можно продолжить в разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ такой же мелкости $\delta_\tau = \delta_{\tau^*}$; для этого достаточно добавить к точкам x_i^*, $i = 1, 2, \ldots, k^*$ конечное число соответствующим образом выбранных точек, принадлежащих отрезку $[a, b]$, но не принадлежащих отрезку $[a^*, b^*]$.

Полагая

$$m_i^* = \inf_{x_{i-1}^* \leqslant x \leqslant x_i^*} f(x), \qquad M_i^* = \sup_{x_{i-1}^* \leqslant x \leqslant x_i^*} f(x),$$
$$\Delta x_i^* = x_i^* - x_{i-1}^*, \qquad i = 1, 2, \ldots, k^*,$$

и замечая, что каждое слагаемое суммы $\sum_{i=1}^{k} (M_i^* - m_i^*)\,\Delta x_i^*$ является и слагаемым суммы $\sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\,\Delta x_i$ и что все слагаемые обеих сумм неотрицательны, имеем

$$0 \leqslant S_{\tau^*} - s_{\tau^*} = \sum_{i=1}^{k^*} (M_i^* - m_i^*)\, \Delta x_i^* \leqslant \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\, \Delta x_i = S_\tau - s_\tau. \tag{28.1}$$

Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то, как мы знаем (см. п. 27.4),

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{28.2}$$

Поскольку $\delta_\tau = \delta_\tau^*$, то из (28.2) и из неравенства (28.1) следует, что

$$\lim_{\delta_{\tau^*} \to 0} (S_{\tau^*} - s_{\tau^*}) = 0, \tag{28.3}$$

т. е. (см. п. 27.4) функция f интегрируема на отрезке $[a^*, b^*]$. □

3°. *Пусть* $a < c < b$. *Если функция* f *интегрируема на отрезках* $[a, c]$ *и* $[c, b]$, *то она интегрируема и на отрезке* $[a, b]$, *причем*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx. \tag{28.4}$$

Доказательство. Если функция f интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$, то она ограничена на каждом из этих отрезков, а значит и на всем отрезке $[a, b]$, т. е. существует постоянная $A > 0$ такая, что

$$|f(x)| \leqslant A, \qquad a \leqslant x \leqslant b. \tag{28.5}$$

Пусть τ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Если точка c не входит в разбиение τ, то обозначим через τ' разбиение отрезка $[a, b]$, получающееся из τ добавлением точки c; очевидно,

$$\tau' \succ \tau. \tag{28.6}$$

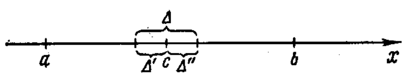

Рис. 105

Если же точка c входит в разбиение τ, то положим $\tau' = \tau$.

В первом случае обозначим через Δ' и Δ'' длины двух отрезков разбиения τ', примыкающих к точке c с двух сторон. Очевидно, что $\Delta = \Delta' + \Delta''$ является длиной отрезка разбиения τ, содержащего точку c (рис. 105). Верхние суммы Дарбу S_τ и $S_{\tau'}$ функции f на отрезке $[a, b]$ отличаются только слагаемыми, соответствующими отрезкам разбиения τ и τ', которые содержат точку c.

Обозначая через M', M'' и M верхнюю грань функции $|f|$ на рассматриваемых отрезках, длины которых обозначены соответственно Δ', Δ'' и Δ, получим (см. также (28.5))

$$0 \leqslant S_\tau - S_{\tau'} \leqslant M'\Delta' + M''\Delta'' + M\Delta \leqslant A(\Delta' + \Delta'' + \Delta) = 2A\Delta \leqslant 2A\delta_\tau.$$

Во втором случае, т. е. при $\tau' = \tau$ просто $S_{\tau'} = S_\tau$, $s_{\tau'} = s_\tau$.

Поэтому в обоих случаях

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - S_{\tau'}) = 0 \tag{28.7}$$

и аналогично,

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (s_\tau - s_{\tau'}) = 0. \tag{28.8}$$

Совокупность точек разбиения τ', принадлежащих отрезку $[a, c]$, образует его разбиение, которое обозначим $\tau'[a, c]$; совокупность же точек разбиения τ', принадлежащих отрезку $[c, b]$, образует разбиение этого отрезка, которое обозначим через $\tau'[c, b]$.

Очевидно,

$$S_{\tau'} = S_{\tau'[a, c]} + S_{\tau'[c, b]}, \qquad s_{\tau'} = s_{\tau'[a, c]} + s_{\tau'[c, b]}, \tag{28.9}$$

а поэтому

$$S_{\tau'} - s_{\tau'} = (S_{\tau'[a, c]} - s_{\tau'[a, c]}) + (S_{\tau'[c, b]} - s_{\tau'[c, b]}), \tag{28.10}$$

и так как функция f, по предположению, интегрируема на $[a, c]$ и на $[c, b]$, то

$$\lim_{\delta_{\tau'[a, c]} \to 0} (S_{\tau'[a, c]} - s_{\tau'[a, c]}) = 0, \qquad \lim_{\delta_{\tau'[c, b]} \to 0} (S_{\tau'[c, b]} - s_{\tau'[c, b]}) = 0.$$

Замечая, что $\delta_{\tau'[a, c]} \leqslant \delta_{\tau'}$, $\delta_{\tau'[c, b]} \leqslant \delta_{\tau'}$, находим в силу (28.10)

$$\lim_{\delta_{\tau'} \to 0} (S_{\tau'} - s_{\tau'}) = \lim_{\delta_{\tau'} \to 0} (S_{\tau'[a, c]} - s_{\tau'[a, c]}) + \lim_{\delta_{\tau'} \to 0} (S_{\tau'[c, b]} - s_{\tau'[c, b]}) = 0. \tag{28.11}$$

Мы видели выше, что выполнение подобного условия для любых разбиений τ влечет за собой интегрируемость функции. Здесь же рассматриваемые разбиения τ' имеют специальный вид: они обязательно содержат точку c. Для того чтобы перейти к произвольному разбиению τ, представим разность $S_\tau - s_\tau$ в виде

$$S_\tau - s_\tau = (S_\tau - S_{\tau'}) + (S_{\tau'} - s_{\tau'}) + (s_{\tau'} - s_\tau).$$

Теперь из (28.7), (28.8) и (28.11) имеем

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0; \tag{28.12}$$

и, так как τ было произвольным разбиением отрезка $[a, b]$, то из ограниченности функции f на отрезке $[a, b]$ и выполнения условия (28.12) следует ее интегрируемость на этом отрезке.

Из интегрируемости функции f на отрезках $[a, c]$, $[c, b]$ и $[a, b]$ следует (см. п. 27.4), что

$$\lim_{\delta_{\tau'[a, c]}\to 0} S_{\tau'[a, c]} = \int_a^c f(x)\,dx, \qquad \lim_{\delta_{\tau'[c, b]}\to 0} S_{\tau'[c, b]} = \int_c^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{\delta_{\tau'}\to 0} S_{\tau'} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Поэтому, переходя к пределу при $\delta_{\tau'}\to 0$ в первом равенстве (28.9), получаем формулу (28.4). $\square$

4°. *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то их сумма $f+g$ также интегрируема на нем, причем*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.13}$$

Доказательство. В самом деле, каковы бы ни были разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ и точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k$, имеем

$$\sigma_\tau(f+g) = \sum_{i=1}^{k} [f(\xi_i)+g(\xi_i)]\,\Delta x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^{k} g(\xi_i)\,\Delta x_i = \sigma_\tau(f) + \sigma_\tau(g). \tag{28.14}$$

Поскольку в силу интегрируемости функций f и g существуют пределы интегральных сумм $\sigma_\tau(f)$ и $\sigma_\tau(g)$ при $\delta_\tau\to 0$, то из (28.14) следует, что существует и предел (почему?) интегральной суммы $\sigma_\tau(f+g)$, причем

$$\lim_{\delta_\tau\to 0} \sigma_\tau(f+g) = \lim_{\delta_\tau\to 0} \sigma_\tau(f) + \lim_{\delta_\tau\to 0} \sigma_\tau(g), \tag{28.15}$$

что и означает интегрируемость функции $f+g$ на отрезке $[a, b]$. Согласно же определению интеграла,

$$\lim_{\delta_\tau\to 0} \sigma_\tau(f+g) = \int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx,$$

$$\lim_{\delta_\tau\to 0} \sigma_\tau(f) = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad \lim_{\delta_\tau\to 0} \sigma_\tau(g) = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Подставляя эти выражения в формулу (28.15), получим (28.13). $\square$

5°. *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и c — постоянная; тогда функция cf также интегрируема на этом отрезке и*

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Каковы бы ни были разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ и точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, имеем

$$\sigma_\tau(cf) = \sum_{i=1}^{k} cf(\xi_i)\,\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i = c\sigma_\tau(f),$$

отсюда, проводя рассуждения по той же схеме, как и при доказательстве предыдущего свойства, получим

$$\int_a^b cf(x)\,dx = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(cf) = \lim_{\delta_\tau \to 0} c\sigma_\tau(f) = c \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f) = c\int_a^b f(x)\,dx. \quad \square$$

Из последних двух свойств вытекает следствие: *если каждая из функций f_i, $i = 1, \ldots, n$, интегрируема на отрезке $[a, b]$, а λ_i — произвольные постоянные, то функция $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ — интегрируема на $[a, b]$, причем*

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_a^b f_i(x)\,dx.$$

Это свойство определенного интеграла называется его *линейностью*.

6°. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда и их произведение $f(x)g(x)$ интегрируемо на нем.*

Доказательство. В силу интегрируемости функций f и g на отрезке $[a, b]$ они ограничены на этом отрезке, т. е. существуют постоянные $A > 0$ и $B > 0$, такие, что

$$|f(x)| \leqslant A, \qquad |g(x)| \leqslant B \tag{28.16}$$

для всех $x \in [a, b]$. Поэтому произведение $f(x)g(x)$ также ограничено: для всех точек $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|f(x)g(x)| \leqslant AB.$$

Пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — какое-либо разбиение отрезка $[a, b]$. Оценим выражение $f(x'')g(x'') - f(x')g(x')$; для этого добавим и вычтем из него $f(x')g(x'')$:

$$f(x'')g(x'') - f(x')g(x') = [f(x'') - f(x')]g(x'') + [g(x'') - g(x')]f(x'). \tag{28.17}$$

Для точек $x' \in [x_{i-1}, x_i]$ и $x'' \in [x_{i-1}, x_i]$ из (28.16) и (28.17) следует, что

$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leqslant B\omega_i(f) + A\omega_i(g), \tag{28.18}$$

где $\omega_i(f)$ и $\omega_i(g)$ суть колебания функций f и g на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Из неравенства (28.18) для колебания $\omega_i(fg)$ произведения fg на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ вытекает оценка

$$\omega_i(fg) \leqslant B\omega_i(f) + A\omega_i(g).$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{k} \omega_i (fg) \Delta x_i \leqslant B \sum_{i=1}^{k} \omega_i (f) \Delta x_i + A \sum_{i=1}^{k} \omega_i (g) \Delta x_i. \qquad (28.20)$$

В силу интегрируемости функций f и g (см. следствие 2 из теоремы 2 в п. 27.4)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i (f) \Delta x_i = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i (g) \Delta x_i = 0.$$

Поэтому из оценки (28.20) следует равенство

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i (fg) \Delta x_i = 0,$$

которое и влечет за собой интегрируемость произведения fg на отрезке $[a, b]$. $\square$

Методом математической индукции легко доказать, что если каждая из функций $f_i(x)$, $i=1, \ldots, n$, интегрируема на отрезке $[a, b]$, то и их произведение интегрируемо на $[a, b]$. В частности, вместе с функцией $f(x)$ интегрируема и $[f(x)]^n$ при любом натуральном n.

7°. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и нижняя грань функции $|f(x)|$ на $[a, b]$ положительна, то и $1/f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.*

Доказательство. Если всюду на $[a, b]$: $|f(x)| \geqslant m > 0$, то $\frac{1}{|f(x)|} \leqslant \frac{1}{m}$ для всех $x \in [a, b]$; поэтому $\left|\frac{1}{f(x_2)} - \frac{1}{f(x_1)}\right| \leqslant \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{m^2}$ при любых $x_1, x_2 \in [a, b]$. Отсюда следует, что если $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ произвольное разбиение отрезка $[a, b]$, то

$\omega_i\left(\frac{1}{f}\right) \leqslant \frac{1}{m^2} \omega_i(f)$, следовательно

$$0 \leqslant \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i \left(\frac{1}{f}\right) \Delta x_i \leqslant \frac{1}{m^2} \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i (f) \Delta x_i = 0. \ \square$$

Следствие. *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и нижняя грань функции $|g|$ положительна, то и f/g интегрируема на $[a, b]$.*

Это вытекает, в силу свойств 6° и 7°, из того, что $\frac{f}{g} = f \times \times \frac{1}{g}$. $\square$

8°. *Если функция f неотрицательна и интегрируема на отрезке $[a, b]$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0. \tag{28.21}$$

Доказательство. В самом деле, каковы бы ни были разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ и точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$ для функции $f \geqslant 0$ имеем

$$\sigma_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i \geqslant 0. \tag{28.22}$$

Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то, переходя к пределу в (28.22) при $\delta_\tau \to 0$, получим неравенство (28.21). $\square$

Следствие. *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и для всех $x \in [a, b]$*

$$f(x) \geqslant g(x), \tag{28.23}$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.24}$$

Если интегрируемые функции f и g удовлетворяют неравенству (28.23), то

$$f(x) - g(x) \geqslant 0, \quad x \in [a, b];$$

поэтому, замечая, что на основании следствия из свойств 4° и 5° функция $f-g$ интегрируема, в силу неравенства (28.21) имеем

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \geqslant 0.$$

Но (см. выше указанное следствие)

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

и, значит,

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0. \quad \square$$

Доказанное следствие утверждает, что обе части неравенства вида (28.23) можно интегрировать по одному и тому же промежутку. (В связи с этим заметим, что дифференцирование обеих частей неравенства без специальных дополнительных предположений недопустимо).

9°. *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Если она неотрицательна на нем: $f(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$, и существует точка $x_0 \in [a, b]$, в которой функция f непрерывна и положительна: $f(x_0) > 0$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Доказательство. Согласно лемме п. 19.3 существует такое $\delta > 0$, что $f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$ для всех $x \in U(x_0, \delta) \cap [a, b]$. Пусть $[\alpha, \beta] \subset U(x_0, \delta) \cap [a, b]$, $\alpha < \beta$; тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b f(x)\,dx \geqslant \frac{f(x_0)}{2}(\beta - \alpha) > 0. \quad \square$$

Отметим, что если отказаться от условия непрерывности функции f в точке x_0, то может случиться, что для интегрируемой неотрицательной на отрезке функции, положительной в некоторой точке, интеграл по всему отрезку равен нулю. Так, например, функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

интегрируема и неотрицательна, $f(0) > 0$, но $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Это равенство легко следует из определения интеграла.

10°. Нами было введено понятие определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ от функции f по отрезку $[a, b]$, где, согласно принятым обозначениям, $a < b$.

Для любой функции f, определенной в точке a, положим, по определению,

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \tag{28.25}$$

а для функции f, интегрируемой на отрезке $[a, b]$,

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad a < b. \tag{28.26}$$

Эти определения в известной мере естественны. В первом случае, т. е. при $a = b$, следует считать, что все промежутки разбиения отрезка $[a, b]$ становятся точками, а их длины Δx_i равны нулю. Поэтому все интегральные суммы $\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ в этом случае также равны нулю, а вместе с ними обращается в ноль и интеграл, стоящий в левой части (28.25).

Во втором случае следует считать отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ ориентированными в отрицательном направлении оси Ox (понятие ориентированного отрезка знакомо читателю из аналитической геометрии), и поэтому их длины Δx_i отрицательными. Отсюда следует, что все интегральные суммы, образуемые для интеграла $\int\limits_b^a f(x)\,dx$ отличаются лишь знаком от соответствующих интегральных сумм интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, что и делает естественной формулу (28.26).

Этим интуитивным соображениям можно, конечно, придать и строгую логическую форму, введя соответствующие определения, однако гораздо проще и короче ввести равенства (28.25) и (28.26) по определению.

11°. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то и функция $|f|$ интегрируема на нем и*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx, \quad a<b. \tag{28.27}$$

Действительно, во-первых, из ограниченности функции f, очевидно, следует и ограниченность функции $|f|$, а во-вторых, для любых двух точек $\xi\in[a, b]$ и $\eta\in[a, b]$ имеет место неравенство

$$\big||f(\xi)|-|f(\eta)|\big| \leqslant |f(\xi)-f(\eta)|,$$

откуда следует, что, каково бы ни было разбиение $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$, обозначая через $\omega_i(f)$ и $\omega_i(|f|)$ соответственно колебания функций f и $|f|$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, получим

$$\omega_i(|f|) \leqslant \omega_i(f); \quad i=1, 2, \ldots, k,$$

поэтому

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{k} \omega_i(|f|)\,\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\,\Delta x_i.$$

Отсюда следует, что если

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\,\Delta x_i=0, \text{ то и } \lim_{\delta_\tau\to 0}\sum_{i=1}^{k} \omega_i(|f|)\,\Delta x_i=0.$$

Это означает (см. п. 27.4,) что из интегрируемости функции следует интегрируемость функции $|f|$.

Пусть теперь $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \ldots, k$; тогда

$$|\sigma_\tau(f)|=\left|\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |f(\xi_i)|\,\Delta x_i=\sigma_\tau(|f|).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\delta_\tau \to 0$ и замечая, что

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} |\sigma_\tau(f)| = \left| \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f) \right| = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|, \quad \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(|f|) = \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

получим неравенство (28.27). $\square$

Если отказаться от ограничения $a < b$, т. е. допускать случаи $a = b$ и $a > b$, то аналог неравенства (28.27), имеет вид

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right|. \qquad (28.28)$$

В самом деле, пусть $a < b$. Поскольку (см. свойство 8°)

$$\left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right| = \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

то неравенство (28.28) совпадает в этом случае с неравенством (28.27). Если же $a > b$, то, используя свойство (28.26) и неравенство (28.27), получим

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_b^a f(x)\,dx \right| \leqslant \int_b^a |f(x)|\,dx = \left| \int_b^a |f(x)|\,dx \right| = \left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right|.$$

Наконец, при $a = b$ неравенство (28.28) очевидно.

28.2. ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Теорема 1. *Пусть*

1) *функции f и g интегрируемы на отрезке* $[a, b]$;

2) $$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad x \in [a, b]; \qquad (28.29)$$

3) *функция g не меняет знака на отрезке* $[a, b]$, *т. е. либо неотрицательна, либо неположительна на нем; тогда существует такое число μ, что*

$$m \leqslant \mu \leqslant M \qquad (28.30)$$

и

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (28.31)$$

Следствие. *При дополнительном предположении непрерывности функции f на отрезке $[a, b]$ существует такая точка ξ на интервале (a, b), что*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (28.32)$$

В частности, при $g(x)=1$ *на* $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \tag{28.33}$$

Последняя формула в случае неотрицательной на отрезке $[a, b]$ функции f имеет простой геометрический смысл: площадь криволинейной трапеции, порожденной графиком функции f, равна площади прямоугольника с основанием длины $b-a$ и высотой длины $f(\xi)$ (рис. 106)

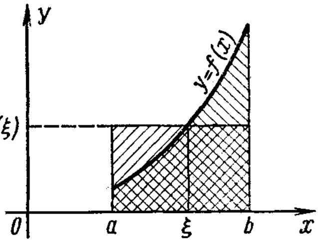

Рис. 106

Доказательство теоремы. Умножая неравенство (28.29) на $g(x)$, получаем при $g(x)\geqslant 0$

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x),$$

а при $g(x)\leqslant 0$

$$mg(x)\geqslant f(x)g(x)\geqslant Mg(x).$$

Интегрируя эти неравенства будем иметь, на основании следствия из свойства 8° (п. 28.1),

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx, \tag{28.34}$$

соответственно,

$$m\int_a^b g(x)\,dx \geqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \geqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.35}$$

Если $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, то как в первом, так и во втором случаях

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0.$$

Таким образом, если $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, то обе части равенства (28.31) при любом μ обращаются в ноль, т. е. при выполнении условия $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ равенство (28.31) справедливо при любом выборе числа μ, в частности и при $m\leqslant\mu\leqslant M$.

Если же $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, то при $g(x)\geqslant 0$, $x\in[a, b]$, имеем $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, а при $g(x)\leqslant 0$, $x\in[a, b]$, соответственно, $\int_a^b g(x)\,dx < 0$.

Деля неравенство (28.34) и (28.35) на интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$, получим в обоих случаях одно и то же неравенство

$$m \leqslant \frac{\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx} \leqslant M. \tag{28.36}$$

Полагая

$$\mu \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx}, \tag{28.37}$$

убеждаемся, что при таком выборе μ выполняются как условие (28.30) (в силу (28.36)), так и (28.31) (в силу (28.37)). $\square$

Доказательство следствия. Если $\int\limits_a^b g(x)\,dx=0$, то в силу равенства (28.31) получим $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx=0$ и, следовательно, формула (28.32) справедлива при любом выборе точки $\xi \in (a, b)$. В дальнейшем для простоты будем считать, что $g(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$ (случай $g(x) \leqslant 0$, $x \in [a, b]$, рассматривается аналогично или сводится к предыдущему заменой функции $g(x)$ на функцию $-g(x)$).

Пусть теперь $\int\limits_a^b g(x)\,dx \neq 0$; тогда в силу неотрицательности функции $g(x)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx > 0. \tag{28.38}$$

В дальнейшем будем считать, что $m=\inf\limits_{[a,\,b]} f(x)$, $M=\sup\limits_{[a,\,b]} f(x)$. Это предположение допустимо, так как при таком выборе m и M выполняется условие (28.29). В формуле (28.31) согласно условию (28.30) возможны три случая: $m<\mu<M$, $\mu=M$ и $\mu=m$.

Если $m<\mu<M$, то согласно теореме о достижении непрерывной на отрезке функции своих наибольшего и наименьшего значений (см. теорему 1 в п. 6.1) существуют такие точки $\alpha \in [a, b]$ и $\beta \in [a, b]$, что $f(\alpha)=m$, $f(\beta)=M$. Поэтому в силу теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции (см. теорему 2 и следствие 2 из нее в п. 6.2) на интервале с концами α и β найдется такая точка ξ, что $f(\xi)=\mu$. Очевидно, $\xi \in (a, b)$ (рис. 107).

Если $\mu = M$ (случай $\mu = m$ рассматривается аналогично), то равенство (28.31) принимает вид

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = M \int_a^b g(x)\, dx,$$

откуда

$$\int_a^b [M - f(x)] g(x)\, dx = 0. \tag{28.39}$$

Покажем, что существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f(\xi) = M$. Предварительно заметим, что

$$\int_a^b g(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\, dx. \tag{28.40}$$

В самом деле, функция $g(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, а поэтому и ограничена на нем, т. е. существует такая постоянная $A > 0$, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|g(x)| \leqslant A$. Отсюда имеем

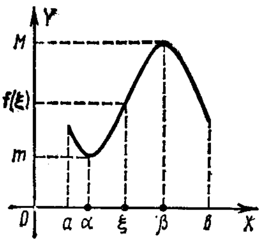

Рис. 107

$$\left| \int_a^b g(x)\, dx - \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\, dx \right| = \left| \int_a^{a+\varepsilon} g(x)\, dx + \int_{b-\varepsilon}^{b} g(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^{a+\varepsilon} |g(x)|\, dx + \int_{b-\varepsilon}^{b} |g(x)|\, dx \leqslant A \int_a^{a+\varepsilon} dx + A \int_{b-\varepsilon}^{b} dx = 2A\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < b - a.$$

Из этого неравенства сразу следует (28.40).

В силу неравенства (28.38) из (28.40) вытекает существование такого ε_0, $0 < \varepsilon_0 < b - a$, что

$$\int_{a+\varepsilon_0}^{b-\varepsilon_0} g(x)\, dx > 0.$$

Если бы не существовало точки $\xi \in (a, b)$, в которой $f(\xi) = M$, то непрерывная функция $M - f(\xi)$ была бы положительной на интервале (a, b), а, следовательно, и на отрезке $[a + \varepsilon_0, b - \varepsilon_0]$. В частности, она была бы положительной и в той точке x_0, в которой она принимает свое наименьшее значение

$$M - f(x) \geqslant \min_{[a+\varepsilon_0,\ b-\varepsilon_0]} [M - f(x)] = M - f(x_0) > 0.$$

Поэтому

$$\int_a^b [M - f(x)] g(x)\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_{a+\varepsilon_0}^{b-\varepsilon_0} [M - f(x)] g(x)\, dx \geqslant [M - f(x_0)] \int_{a+\varepsilon_0}^{b-\varepsilon_0} g(x)\, dx > 0,$$

а это противоречит равенству (28.39). □

Следствие теоремы 1 обычно называется *интегральной теоремой о среднем*. Это название объясняется тем, что в нем утверждается существование некоторой точки на отрезке — «средней точки», обладающей определенным свойством, связанным с интегралом от функции.

Формулы (28.31) и (28.32) остаются очевидным образом верными и при $a \geqslant b$.

28.3. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Обобщим теперь теорему 3 предыдущего параграфа об интегрируемости непрерывных функций на так называемые кусочно-непрерывные функции.

Определение 1. *Функция f, определенная на отрезке $[a, b]$, называется кусочно-непрерывной на нем, если существует такое разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ этого отрезка, что функция f непрерывна на каждом интервале (x_{i-1}, x_i) и существуют конечные пределы*

$$f(x_{i-1}+0) = \lim_{x \to x_{i-1}+0} f(x) \quad \text{и}$$

$$f(x_i - 0) = \lim_{x \to x_i - 0} f(x), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Короче, функция кусочно-непрерывна на отрезке, если она имеет на нем только конечное число точек разрыва и притом только первого рода (рис. 108).

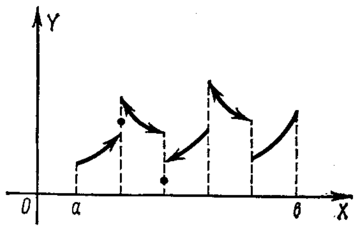

Рис. 108

Лемма 1. *Пусть функции f и φ определены на отрезке $[a, b]$ и $f(x) = \varphi(x)$ на интервале (a, b). Тогда если функция f интегрируема на $[a, b]$, то и функция φ интегрируема на $[a, b]$ и*

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Иначе говоря, изменение значений функции на концах отрезка не влияет ни на интегрируемость функции, ни на значение интеграла, если функция интегрируема. Аналогичное утверждение, конечно, справедливо при изменении значений функции в любом конечном числе точек.

Доказательство леммы. Функция f интегрируема и, следовательно, ограничена: $|f(x)| \leqslant M$, для всех $x \in [a, b]$. Пусть $M_0 = \max\{M, \varphi(a), \varphi(b)\}$. Рассмотрим какое-либо разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ и составим интегральные суммы Римана $\sigma_\tau(f)$ и $\sigma_\tau(\varphi)$, выбирая одни и те же точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Пусть, как всегда, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Поскольку

$$|f(\xi_1)\Delta x_1| \leqslant M_0\delta_\tau, \quad |f(\xi_k)\Delta x_k| \leqslant M_0\delta_\tau,$$
$$|\varphi(\xi_1)\Delta x_1| \leqslant M_0\delta_\tau \quad \text{и} \quad |\varphi(\xi_k)\Delta x_k| \leqslant M_0\delta_\tau,$$

то

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} f(\xi_1)\Delta x_1 = \lim_{\delta_\tau \to 0} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{\delta_\tau \to 0} \varphi(\xi_1)\Delta x_1 = \lim_{\delta_\tau \to 0} \varphi(\xi_k)\Delta x_k = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(\varphi) = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \varphi(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=2}^{k-1} \varphi(\xi_i)\Delta x_i =$$
$$= \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=2}^{k-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Следовательно, интеграл $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ существует и равен $\int_a^b f(x)dx$. □

Упражнение 1. Доказать, что изменение значения функции в конечном числе точек не влияет ни на интегрируемость функции, ни на значение интеграла, если он существует.

Теорема 2. *Функция f, кусочно-непрерывная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на нем.*

Доказательство. Пусть функция f *кусочно-непрерывна на отрезке* $[a, b]$ и $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — его разбиение, указанное в определении 1. Положим

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x_{i-1} < x_i < x_i, \\ f(x_{i-1}+0) & \text{при} \quad x = x_{i-1}, \\ f(x_i - 0) & \text{при} \quad x = x_i. \end{cases}$$

На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ функция отличается от непрерывной функции f_i, быть может, только на концах этого отрезка. Следовательно, по лемме, функция f интегрируема на $[x_{i-1}, x_i]$ и

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,dx, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Применяя свойство 3^0 интегралов, получим, что функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{x_{i-1}}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,dx. \ \square \tag{28.41}$$

Замечание. В п. 44.5 будет доказано более общее достаточное условие интегрируемости (см. теорему 10 в п. 44.5 и замечание 2 в п. 44.7), из которого в частности следует, что всякая ограниченная на отрезке функция, непрерывная на нем всюду, кроме конечного числа точек, интегрируема. Тем самым условие наличия у функции f только конечного числа точек разрыва первого рода не является существенным в теореме 2: они могут быть и второго рода — утверждение теоремы остается верным.

28.4*. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ГЁЛЬДЕРА*) И МИНКОВСКОГО **)

Пусть функции f и g определены и интегрируемы на отрезке $[a, b]$, $1 < p < +\infty$, а число q определяется равенством

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{28.42}$$

(см. (20.49), (20.51) и (20.52)). Тогда имеем:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{1/q}, \tag{28.43}$$

(неравенство Гёльдера)

$$\left[\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}, \tag{28.44}$$

(неравенство Минковского).

Докажем эти неравенства. Введем для краткости обозначения

$$\|f\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}, \quad \|g\|_q \stackrel{\text{def}}{=} \left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{1/q}. \tag{28.45}$$

В неравенстве (20.53)

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad a \geqslant 0, \ b \geqslant 0,$$

*) О. Л. Гёльдер (1859—1937) — немецкий математик.

**) Г. Минковский (1864—1906) — родился в России, работал в Швейцарии и Германии.

положим

$$a=\frac{|f(x)|}{\|f\|_p},\quad b=\frac{|g(x)|}{\|g\|_q},\quad x\in[a,\ b].$$

Тогда для любого $x\in[a,\ b]$

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\,\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\leqslant\frac{1}{p}\,\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}+\frac{1}{q}\,\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Проинтегрировав это неравенство по отрезку $[a,\ b]$ и использовав (28.45) и (28.42), найдем

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int\limits_a^b|f(x)g(x)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{p\|f\|_p^p}\int\limits_a^b|f(x)|_p^p\,dx+\frac{1}{q\|g\|_q^q}\int\limits_a^b|g(x)|^q\,dx=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Поэтому

$$\int\limits_a^b|f(x)g(x)|\,dx\leqslant\|f\|_p\|g\|_q,$$

т. е. неравенство (28.44) доказано.

Докажем неравенство (28.44). Легко убедиться в справедливости неравенства

$$\int\limits_a^b|f(x)+g(x)|^p\,dx=\int\limits_a^b|f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_a^b|f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx+\int\limits_a^b|g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx.$$

Применив к каждому из полученных интегралов неравенство Гельдера и заметив, что $q(p-1)=p$ (см. (28.42)), получим:

$$\int\limits_a^b|f(x)+g(x)|^p\,dx\leqslant\left[\int\limits_a^b|f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\left[\int\limits_a^b|f(x)+g(x)|^{q(p-1)}\,dx\right]^{1/q}+$$

$$+\left[\int\limits_a^b|g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\left[\int\limits_a^b|f(x)+g(x)|^{q(p-1)}\,dx\right]^{1/q}=$$

$$=\left\{\left[\int\limits_a^b|f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}+\left[\int\limits_a^b|g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\right\}\left[\int\limits_a^b|f(x)+g(x)|^p\,dx\right]^{1/q}.\quad(28.46)$$

Если левая часть этого неравенства равна нулю, то неравенство (28.44) очевидно справедливо, если же она не равна нулю, то, сократив обе части неравенства (28.46) на множитель $\left[\int\limits_a^b|f(x)+g(x)|^p\,dx\right]^{1/q}$, в силу соотношения (28.42), получим неравенство Минковского. $\square$

Отметим важный частный случай неравенства Гёльдера. При $p=q=2$ имеем

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \sqrt{\int_a^b |f(x)|\,dx}\,\sqrt{\int_a^b |g(x)|\,dx}. \qquad (28.47)$$

(*неравенство Коши*).

§ 29. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

29.1. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ИНТЕГРАЛА ПО ВЕРХНЕМУ ПРЕДЕЛУ

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда она интегрируема и на любом отрезке $[a, x]$, где $a \leqslant x \leqslant b$, т. е. для любого $x \in [a, b]$ имеет смысл интеграл $\int_a^x f(t)\,dt$.

Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \qquad (29.1)$$

Эта функция F определена на отрезке $[a, b]$ и называется *интегралом с переменным верхним пределом*. Установим ее основные свойства.

Теорема 1. *Если функция f интегрируема на отрезке* $[a, b]$, *то функция* (29.1) *непрерывна на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть $x \in [a, b]$, $x+\Delta x \in [a, b]$. Тогда из формулы (29.1) следует, что

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = F(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt,$$

поэтому (рис. 109)

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt. \qquad (29.2)$$

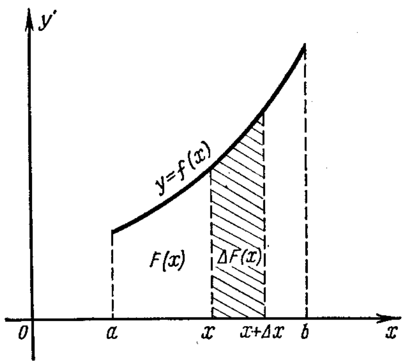

Рис. 109

Поскольку функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, она ограничена на этом отрезке, т. е. существует такая постоянная $M>0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in [a, b]$. Применяя это нера-