Отметим важный частный случай неравенства Гёльдера. При $p=q=2$ имеем

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \sqrt{\int_a^b |f(x)|\,dx}\sqrt{\int_a^b |g(x)|\,dx}. \qquad (28.47)$$

(*неравенство Коши*).

§ 29. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

29.1. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ИНТЕГРАЛА ПО ВЕРХНЕМУ ПРЕДЕЛУ

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда она интегрируема и на любом отрезке $[a, x]$, где $a \leqslant x \leqslant b$, т. е. для любого $x \in [a, b]$ имеет смысл интеграл $\int_a^x f(t)\,dt$.

Рассмотрим функцию

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt. \qquad (29.1)$$

Эта функция F определена на отрезке $[a, b]$ и называется *интегралом с переменным верхним пределом*. Установим ее основные свойства.

Теорема 1. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция* (29.1) *непрерывна на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть $x \in [a, b]$, $x+\Delta x \in [a, b]$. Тогда из формулы (29.1) следует, что

$$F(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = F(x)+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt,$$

поэтому (рис. 109)

$$\Delta F = F(x+\Delta x)-F(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt. \qquad (29.2)$$

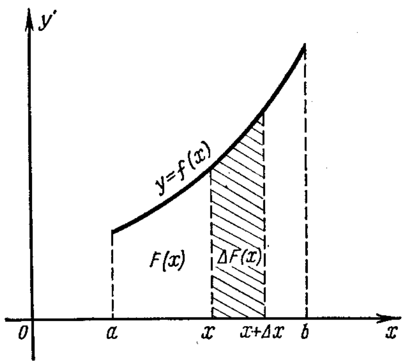

Рис. 109

Поскольку функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, она ограничена на этом отрезке, т. е. существует такая постоянная $M>0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in [a, b]$. Применяя это неравенство для оценки выражения $|\Delta F|$, получим (см. п. 28.1):

$$|\Delta F| = \left|\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int\limits_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt\right| \leqslant \left|\int\limits_x^{x+\Delta x} M\,dt\right| \leqslant M\,|\Delta x|.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F = 0$ для любого $x \in [a, b]$, а это означает непрерывность функции F в каждой точке $x \in [a, b]$. □

29.2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ИНТЕГРАЛА ПО ВЕРХНЕМУ ПРЕДЕЛУ. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ У НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема 2. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ дифференцируема в точке x_0 и*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Доказательство. Покажем, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0),$$

где $\Delta F = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$, $x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Для этого оценим модуль разности $\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)$.

Заметив, что $\frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = 1$, и следовательно $f(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt$, будем иметь

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} - f(x_0)\right| =$$

$$= \left|\frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt}{\Delta x}\right| = \left|\frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t) - f(x_0)]\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\Delta x|} \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\,dt\right|. \tag{29.3}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности функции f в точке x_0 существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что если $|x - x_0| < \delta$ и $x \in [a, b]$, то

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{29.4}$$

Выберем Δx так, что $|\Delta x| < \delta$. Тогда для значений t на отрезке, по которому ведется интегрирование, будем иметь $|t - x_0| \leq |\Delta x| < \delta$ и, следовательно, из неравенств (29.3) и (29.4), получим

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| \leq \frac{\varepsilon}{|\Delta x|}\left|\int\limits_x^{x_0+\Delta x} dt\right| = \varepsilon,$$

а это означает, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0)$.

В случае, когда точка x_0 совпадает с одним из концов отрезка $[a, b]$, под $F'(x_0)$ следует подразумевать соответствующую одностороннюю производную функции $F(x)$. □

Теперь можно решить вопрос о существовании первообразной для произвольной непрерывной функции.

Теорема 3. *Если функция интегрируема на отрезке и непрерывна в его внутренних точках, то на этом отрезке существует ее первообразная.*

Следствие. *Непрерывная на отрезке функция имеет первообразную.*

Доказательство. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна на интервале (a, b), то согласно теоремам 1 и 2 ее первообразной на отрезке $[a, b]$ является, например, функция

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt, \quad a \leq x \leq b.$$

В самом деле, во всех внутренних точках x отрезка $[a, b]$ т. е. в точках интервала (a, b), согласно теореме 2 функция F дифференцируема и $F'(x) = f(x)$, а на концах отрезка $[a, b]$ согласно теореме 1 функция F непрерывна. Это и означает (см. определение 1 в п. 22.1), что F является первообразной для f на $[a, b]$. □

Покажем справедливость следствия: если функция непрерывна на некотором отрезке, то она, согласно теореме 3 п. 27.5, интегрируема на нем и, следовательно, удовлетворяет условиям доказанной теоремы. □

Таким образом, операция интегрирования с переменным верхним пределом, примененная к непрерывной функции, приводит к первообразной функции, т. е. является операцией, обратной дифференцированию

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)\,dt = f(x), \quad a \leq x \leq b. \tag{29.5}$$

Это утверждение (называемое *формулой дифференцирования определенного интеграла по верхнему пределу*) является основополагающим для дифференциального и интегрального исчисления. Из него следует, в частности, что любая первообразная функции

$f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, имеет вид

$$\int_a^x f(t)\,dt + C, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Действительно, согласно доказанному функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ является первообразной для функции $f(x)$, а всякая другая ее первообразная может отличаться от $F(x)$ лишь на постоянную (см. п. 22.1). Таким образом установлена связь между неопределенным и определенным интегралами в виде

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C.$$

Доказанные теоремы показывают, что операция интегрирования с переменным верхним пределом приводит к «улучшению» или «сглаживанию» свойств функции: интегрируемая функция переходит в непрерывную, а непрерывная — в дифференцируемую.

Заметим, что операция дифференцирования в определенном смысле «ухудшает» свойства функции: например, призводная непрерывной функции, если она существует, может быть уже разрывной функцией.

Из формулы дифференцирования по верхнему пределу (29.5) можно легко получить и формулу дифференцирования по нижнему пределу. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда на этом отрезке определена и функция

$$G(x) = \int_x^b f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

причем из тождества

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt$$

имеем

$$G(x) = \int_a^b f(t)\,dt - F(x). \tag{29.6}$$

Если функция f непрерывна в точке $x \in [a, b]$, то, как доказано выше, функция F дифференцируема в этой точке. Из формулы (29.6) следует, что в этом случае функция $G(x)$ в точке x также дифференцируема и

$$\frac{dG(x)}{dx} = -\frac{dF(x)}{dx}.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = -f(x).$$

Замечание. Из формул дифференцирования интеграла от непрерывной функции по верхнему (нижнему) пределу интегрирования следует также, что всякая функция, непрерывная на некотором промежутке (конечном или бесконечном), имеет на нем первообразную. Действительно, пусть например, функция f непрерывна на интервале (a, b). Выберем произвольную точку $x_0 \in \in (a, b)$ и положим

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt.$$

Тогда для всех $x \in (a, b)$ справедливо равенство $F'(x) = f(x)$, т. е. $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на интервале (a, b).

Упражнение. Пусть функция $f(x)$ непрерывна, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — дифференцируемы всюду в R. Доказать следующие обобщения формулы (29.5):

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{\varphi(x)} f(t)\, dt = f(\varphi(x))\, \varphi'(x); \qquad \frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\, dt = f(\varphi(x))\, \varphi'(x) - f(\psi(x))\, \psi'(x).$$

29.3. ФОРМУЛА НЬЮТОНА—ЛЕЙБНИЦА

Теорема 4 (основная теорема интегрального исчисления). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если функция Φ является произвольной ее первообразной на этом отрезке, то*

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{29.7}$$

Эта формула называется *формулой Ньютона — Лейбница* *).

Доказательство. Положим $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\, dt$. Согласно доказательству следствия из теоремы 3 п. 29.2 функция F является первообразной для функции f на отрезке $[a, b]$. Таким образом F и Φ — две первообразные одной и той же функции f на отрезке $[a, b]$, поэтому

$$F(x) = \Phi(x) + C, \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

где C — некоторая определенная постоянная, т. е.

$$\int_{a}^{x} f(t)\, dt = \Phi(x) + C, \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

*) И. Ньютон (1643—1727) — английский физик, механик, астроном и математик.

При $x=a$ отсюда следует, что $C=-\Phi(a)$, следовательно,

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Полагая здесь $x=b$, получим формулу (25.7). $\square$

Для краткости записи часто употребляется обозначение

$$\Phi(x)\Big|_a^b \overset{\text{def}}{=} \Phi(b) - \Phi(a),$$

или

$$[\Phi(x)]_a^b \overset{\text{def}}{=} \Phi(b) - \Phi(a).$$

Если в приведенном доказательстве теоремы 4 вместо следствия из теоремы 3 использовать саму эту теорему, то получится доказательство более общего утверждения. Сформулируем его также в виде теоремы.

Теорема 4*. *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в его внутренних точках. Если функция Φ является какой-либо ее первообразной на этом отрезке, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Отметим еще, что формула Ньютона — Лейбница (29.7) справедлива и для $a > b$. Действительно, если a и b поменять местами, то обе части равенства (29.7) изменят знак.

Замечание. Можно показать, что условие интегрируемости функции на отрезке при условии ее непрерывности во внутренних его точках равносильно ограниченности функции на этом отрезке. Это непосредственно следует из ограниченности интегрируемой функции и замечания в конце п. 28.3.

Примеры. 1. Найдем $\int_0^1 x^2\,dx$. Известно, что

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C, \quad \text{поэтому} \quad \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2. Найдем $\int_0^\pi \sin x\,dx$. Имеем

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2.$$

Теорема 4* может быть усилена за счет отказа от выполнения условия $F'(x)=f(x)$ в конечном числе точек. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть f — интегрируемая, а F — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функции и пусть всюду на $[a, b]$, кроме конеч-*

ного множества точек, справедливо равенство $F'(x)=f(x)$. Тогда справедлива и формула Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{29.8}$$

Доказательство. Обозначим через $a_1, \ldots, a_m$ точки конечного множества, в которых не выполняется равенство $F'(x)=f(x)$, $a_j \in [a, b]$, $j=1, \ldots, m$, и рассмотрим какое-либо разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$, содержащее все точки $a_1, \ldots$ $\ldots, a_m$. Тогда на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция F непрерывна, а внутри него она имеет производную $F'(x)=f(x)$. Поэтому к функции F на указанном отрезке можно применить формулу конечных приращений (теорему Лагранжа о среднем значении):

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)\,\Delta x_i = f(\xi_i)\,\Delta x_i, \tag{29.9}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i=1, \ldots, k$.

Суммируя получившиеся равенства от 1 до k и замечая, что

$$\sum_{i=1}^{k} F(x_i) - F(x_{i-1}) = F(x_k) - F(x_0) = F(b) - F(a),$$

получим

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i. \tag{29.10}$$

В правой части этого равенства стоит интегральная сумма Римана функции f.

Пусть теперь $\tau = \tau_n$, $n=1, 2, \ldots$ — последовательность разбиений, содержащих точки $a_1, \ldots, a_m$, для которой $\delta_{\tau_n} \to 0$ при $n \to \infty$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в (29.10) и замечая, что левая часть этого равенства постоянна и равна $F(b) - F(a)$, а правая в силу интегрируемости функции f (см. теорему 3 в п. 28.3) стремится к интегралу $\int_a^b f(x)\,dx$ получим формулу (29.8). □

В случае, когда функция f кусочно-непрерывна, нетрудно доказать, что всегда существует функция F, удовлетворяющая условиям теоремы 5. Для этого надо взять разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$, состоящее из точек a, b и точек разрыва функции f. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ существует первообразная F_i функции f (теорема 3). При любых постоянных C_i функции $F_i + C_i$ также будут первообразными для f на $[x_{i-1}, x_i]$. Выбрав одну из постоянных C_i произвольно, остальные можно последовательно выбрать так, что в результате получится непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция F, для которой $F'(x)=f(x)$, $x \neq x_i$, $i=0,1, \ldots, k$.

Функция F, удовлетворяющая условиям теоремы 5, т. е. непрерывная на отрезке $[a, b]$ и такая, что для всех его точек, кроме конечного множества, выполняется условие $F'(x)=f(x)$, также называется *первообразной функцией* функции f. Это некоторое обобщение определения 1 п. 22.1.

§ 30. ФОРМУЛЫ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ В ИНТЕГРАЛЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

30.1. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ

Теорема 1. *Пусть*

1) *функция* $f(x)$ *непрерывна на интервале* (a, b);

2) *функция* $\varphi(t)$ *определена и непрерывна вместе со своей производной* $\varphi'(t)$ *на интервале* (α, β), *причем для всех* $t \in (\alpha, \beta)$ *выполняется неравенство* $a < \varphi(t) < b$. Тогда, если $\alpha_0 \in (\alpha, \beta)$, $\beta_0 \in (\alpha, \beta)$, $a_0=\varphi(\alpha_0)$, $b_0=\varphi(\beta_0)$, то

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)\,dx=\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \tag{30.1}$$

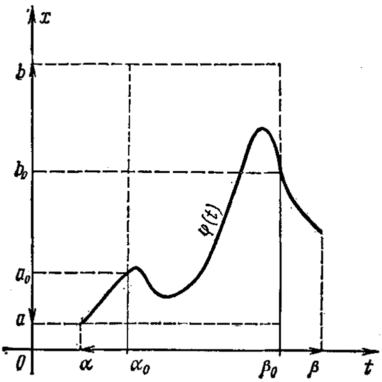

Рис. 110

Эта формула называется формулой *замены переменной* в определенном интеграле или формулой интегрирования *подстановкой*.

Доказательство. Прежде всего заметим, что, по условию, функция f заведомо определена на множестве значений функции φ (рис. 110), поэтому имеет смысл сложная функция $f[\varphi(t)]$. В силу сделанных предположений подынтегральные функции в обеих частях формулы (30.1) непрерывны, поэтому оба интеграла в этой формуле существуют.

Пусть $\Phi(x)$ — какая-либо первообразная функция $f(x)$ на интервале (a, b). Тогда для точек t интервала (α, β) имеет смысл сложная функция $\Phi[\varphi(t)]$, которая является первообразной для функции $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. По формуле Ньютона — Лейбница (см. п. 29.3),

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)\,dx=\Phi(b_0)-\Phi(a_0),$$

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt=\Phi[\varphi(\beta_0)]-\Phi[\varphi(\alpha_0)]=\Phi(b_0)-\Phi(a_0).$$

Из этих равенств и следует формула (30.1). □