Функция F, удовлетворяющая условиям теоремы 5, т. е. непрерывная на отрезке $[a, b]$ и такая, что для всех его точек, кроме конечного множества, выполняется условие $F'(x) = f(x)$, также называется *первообразной функцией* функции f. Это некоторое обобщение определения 1 п. 22.1.

§ 30. ФОРМУЛЫ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ В ИНТЕГРАЛЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

30.1. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ

Теорема 1. *Пусть*

1) *функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b);*

2) *функция $\varphi(t)$ определена и непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на интервале (α, β), причем для всех $t \in (\alpha, \beta)$ выполняется неравенство $a < \varphi(t) < b$.* Тогда, если $\alpha_0 \in (\alpha, \beta)$, $\beta_0 \in (\alpha, \beta)$, $a_0 = \varphi(\alpha_0)$, $b_0 = \varphi(\beta_0)$, то

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)\,dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{30.1}$$

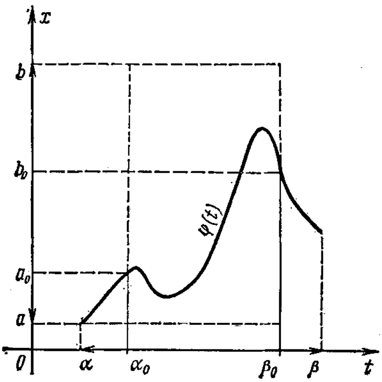

Рис. 110

Эта формула называется формулой *замены переменной* в определенном интеграле или формулой интегрирования *подстановкой*.

Доказательство. Прежде всего заметим, что, по условию, функция f заведомо определена на множестве значений функции φ (рис. 110), поэтому имеет смысл сложная функция $f[\varphi(t)]$. В силу сделанных предположений подынтегральные функции в обеих частях формулы (30.1) непрерывны, поэтому оба интеграла в этой формуле существуют.

Пусть $\Phi(x)$ — какая-либо первообразная функция $f(x)$ на интервале (a, b). Тогда для точек t интервала (α, β) имеет смысл сложная функция $\Phi[\varphi(t)]$, которая является первообразной для функции $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. По формуле Ньютона — Лейбница (см. п. 29.3),

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)\,dx = \Phi(b_0) - \Phi(a_0),$$

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \Phi[\varphi(\beta_0)] - \Phi[\varphi(\alpha_0)] = \Phi(b_0) - \Phi(a_0).$$

Из этих равенств и следует формула (30.1). □

Как видно из доказательства, формула (30.1) справедлива как при $\alpha_0 \leqslant \beta_0$, так и при $\alpha_0 > \beta_0$.

Интересно отметить, что некоторые значения функции $\varphi(t)$ могут и не принадлежать отрезку $[a_0, b_0]$, по которому происходит интегрирование (см. рис. 110) в левой части равенства (30.1).

Если воспользоваться формулой для односторонних производных сложной функции (см. замечание 2 в п. 9.7), то формулу (30.1) можно доказать для случая, когда функция f задана на отрезке $[a, b]$, функция $\varphi(t)$ — на отрезке $[\alpha, \beta]$ и множество значений функции φ содержится в отрезке $[a, b]$, причем $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ (рис. 111). В этом случае формула замены переменной может быть применена ко всему отрезку $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{30.2}$$

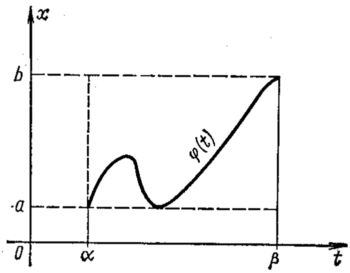

Рис. 111

При употреблении символа определенного интеграла мы всегда писали под знаком интеграла выражение $f(x)\,dx$, где x — независимая переменная. При этом, когда давалось определение определенного интеграла, не предполагалось, что $f(x)\,dx$ является дифференциалом какой-либо функции. Затем (см. п. 29.2) было показано, что, по крайней мере, для непрерывной функции f выражение $f(x)\,dx$ всегда является дифференциалом некоторой функции $F(x)$: $dF(x) = f(x)\,dx$. Поэтому естественно считать, что в этом случае записи $\int_a^b dF(x)$ и $\int_a^b f(x)\,dx$ равнозначны, т. е.

$$\int_a^b dF(x) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Будем вообще допускать под знаком определенного интеграла любую запись дифференциала, т. е. положим, по определению, для дифференцируемой функции $g(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

(если, конечно, интеграл, стоящий в правой части равенства, существует). С помощью этого обозначения, например, формула (30.2) примет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,d\varphi(t).$$

Таким образом, при замене переменного $x=\varphi(t)$ в определенном интеграле $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ следует всюду формально заменить x на $\varphi(t)$ и соответственным образом изменить пределы интегрирования.

Обратим внимание на то, что при применении формулы (30.1) (соответственно формулы (30.2)) ее, подобно случаю неопределенного интеграла, можно использовать как слева направо, так и справа налево. Однако в отличие от неопределенного интеграла, где мы в конце вычисления должны были возвращаться к первоначальной переменной интегрирования, здесь этого делать не нужно, так как наша цель найти число, которое в силу доказанных формул равно значению каждого из рассматриваемых интегралов.

Примеры. 1. Вычислим интеграл $\int\limits_0^2 e^{x^2}x\,dx$. Применив формулу (30.1) справа налево (здесь роль переменной t играет x), получим

$$\int\limits_0^2 e^{x^2}x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 e^{x^2}\,dx^2=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 e^y\,dy=\frac{1}{2}e^y\Big|_0^4=\frac{e^4-1}{2}.$$

2. Пусть требуется вычислить интеграл $\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$. Попытаемся упростить подынтегральное выражение, положив $\sqrt{e^x-1}=t$. Иначе говоря, сделаем замену переменного $x=\ln(1+t^2)$; тогда $dx=\frac{2t\,dt}{1+t^2}$ и, поскольку при $0\leqslant t\leqslant 1$ имеем $0\leqslant x\leqslant \ln 2$, то применив формулу (30.1) слева направо, получим

$$\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx=2\int\limits_0^1\frac{t^2\,dt}{1+t^2}=2\int\limits_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=$$
$$=2[t-\operatorname{arctg} t]_0^1=\frac{4-\pi}{2}.$$

Упражнение 1. Доказать, что если функция f непрерывна на $[a, b]$ и для всех $t\in[0, b-a]$ $f(a+t)=f(b-t)$, то

$$\int\limits_a^b xf(x)\,dx=\frac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

30.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Теорема 2. *Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a, b]$, то*

$$\int\limits_a^b u\,dv=[uv]_a^b-\int\limits_a^b v\,du. \qquad (30.3)$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.*

Доказательство. Имеем:

$$\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b (uv' + u'v)\,dx = \int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,du. \tag{30.4}$$

Все эти интегралы существуют, ибо подынтегральные функции непрерывны. Но согласно формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b (uv)'\,dx = [uv]_a^b. \tag{30.5}$$

Сравнив формулы (30.4) и (30.5), получим равенство

$$\int_a^b u\,du + \int_a^b v\,du = [uv]_a^b,$$

откуда и следует формула (30.3). □

Теорема 2 легко обобщается на случай так называемых кусочно-непрерывно дифференцируемых функций. Определим эти функции.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, существует такое разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$, что $f(x)$ непрерывна на каждом интервале (x_{i-1}, x_i) и существуют конечные пределы $f(x_{i-1}+0)$, $f(x_i-0)$, $i=1, 2, \ldots, k$. (Следовательно, функция f кусочно-непрерывна на отрезке $[a, b]$, см. определение 1 в п. 28.3). Введем, как и выше (см. доказательство теоремы 2 в п. 28.3), функции

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x_{i-1} < x < x_i, \\ f(x_{i-1}+0), & \text{если } x = x_{i-1}, \\ f(x_i - 0), & \text{если } x = x_i. \end{cases}$$

Определение 1. *Если каждая функция $f_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, k$, (непрерывно) дифференцируема на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, то функция $f(x)$ называется кусочно (непрерывно) дифференцируемой на отрезке $[a, b]$.*

Теорема 2'. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны и кусочно-непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$; тогда для них справедлива формула* (30.3) *интегрирования по частям.*

Доказательство теоремы 2 остается в силе и в этом случае. Действительно, произведение uv — непрерывно, а его производная $(uv)' = uv' + u'v$ — кусочно-непрерывна. Поэтому согласно теореме 5 п. 29.2 к интегралу, стоящему в левой части (30.5), можно также применить формулу Ньютона — Лейбница. □

Примеры. 1. Найдем значение интеграла $\int\limits_1^2 \ln x\,dx$. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_1^2 \ln x\,dx = x\ln x\,\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 dx = 2\ln 2 - 1.$$

2. Покажем, что для любого $n=0, 1, 2, \ldots$

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2} & \text{при } n \text{ четном}^{*)}, \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases} \qquad (30.7)$$

Заметим прежде всего, что равенство интегралов, входящих в (30.7), легко установить с помощью замены переменного $x = \pi/2 - t$. Далее, проинтегрировав по частям, получим:

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\,d(-\cos x) =$$

$$= -\sin^{n-1} x\cos x\,\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,(1-\sin^2 x)\,dx = (n-1)\,I_{n-2} - (n-1)\,I_n,$$

отсюда

$$I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2}.$$

Заметим, что $I_0 = \int\limits_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 1$. Поэтому при $n = 2k+1$, т. е. нечетном, будем иметь

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1}\,I_{2k-1} = \ldots = \frac{2k(2k-2)\ldots 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots 1}\,I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!},$$

а при $n = 2k$, т. е. четном —

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k}\,I_{2k-2} = \ldots = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 1}{2k(2k-2)\ldots 2}\,I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{\pi}{2}. \ \square$$

Из формулы (30.7) легко получается так называемая формула Валлиса**), которая нам понадобится в дальнейшем:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \qquad (30.8)$$

---

*) Под $n!!$, $n \in N$, $n > 1$, подразумевается произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и обладающих той же четностью, что и число n.

**) Дж. Валлис (1616—1703) — английский математик.

Докажем ее. Интегрируя неравенство

$$\sin^{2n+1} x \leqslant \sin^{2n} x \leqslant \sin^{2n-1} x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi/2,$$

по отрезку $[0, \pi/2]$ будем иметь

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\, dx \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\, dx \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x\, dx$$

(нетрудно показать, что в действительности здесь имеют место строгие неравенства). В силу (30.7)

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

откуда

$$x_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{1}{2n} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \overset{\text{def}}{=} y_n. \tag{30.9}$$

Поскольку в силу этого неравенства

$$y_n - x_n = \frac{1}{2n} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \leqslant \frac{1}{2n} \frac{\pi}{2} \to 0$$

при $n \to \infty$, то $\lim\limits_{n \to \infty} (y_n - x_n) = 0$, т. е. длины отрезков $[x_n, y_n] \ni \pi/2$ стремятся к нулю и, следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \pi/2, \quad \lim_{n \to \infty} y_n = \pi/2.$$

Первое из этих равенств, в силу определения x_n (см. (30.9)), и означает справедливость формулы Валлиса. □

Упражнения. Вычислить определенные интегралы:

2. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

3. $\int_0^2 |x-1|\, dx$.

4. $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2}\, dx$.

5. $\int_0^{\pi/2} x \left(\frac{\sin x}{1+\cos^2 x} + \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right) dx$.

30.3*. ВТОРАЯ ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Лемма 1. *Пусть f — непрерывная, а g — возрастающая неотрицательная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция. Тогда существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что*

$$\int_a^b g(x) f(x)\, dx = g(b) \int_\xi^b f(x)\, dx. \tag{30.10}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \int_x^b f(t)\, dt, \qquad a \leqslant x \leqslant b. \tag{30.11}$$

Функция F, являясь интегралом с переменным нижним пределом от интегрируемой (даже непрерывной) функции f, непрерывна на отрезке $[a, b]$ и поэтому достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значений. Если

$$m = \min_{[a,\, b]} F(x), \quad M = \max_{[a,\, b]} F(x), \tag{30.12}$$

то, очевидно,

$$m \leqslant F(x) \leqslant M, \quad x \in [a, b]. \tag{30.13}$$

Заметив, что $dF(x) = -f(x)\,dx$ и проинтегрировав по частям интеграл, стоящий в левой части равенства (30.10), получим

$$\int_a^b g(x) f(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\,dF(x) = g(x) F(x)\Big|_a^b + \int_a^b F(x) g'(x)\,dx =$$

$$= g(a) F(a) + \int_a^b F(x) g'(x)\,dx, \tag{30.14}$$

ибо в силу (30.11) $F(b) = 0$.

Вследствие возрастания функции g имеем $g'(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [a, b]$. Применив это неравенство, неравенства (30.13) и заметив, что из неотрицательности g на $[a, b]$ следует в частности, что и $g(a) \geqslant 0$, получим оценки

$$g(a) F(a) + \int_a^b F(x) g'(x)\,dx \leqslant Mg(a) + M\int_a^b g'(x)\,dx =$$

$$= Mg(a) + M[g(b) - g(a)] = Mg(b),$$

$$g(a) F(a) + \int_a^b F(x) g'(x)\,dx \geqslant mg(a) + m[g(b) - g(a)] = mg(b).$$

Таким образом, (см. (30.14)) имеем

$$mg(b) \leqslant \int_a^b g(x) f(x)\,dx \leqslant Mg(b).$$

Если $g(b) = 0$, то из неотрицательности и возрастания функции g следует, что $g(x) \equiv 0$ на $[a, b]$. В этом случае формула (30.10) справедлива при любом выборе $\xi \in [a, b]$.

Если же $g(b) > 0$, то

$$m \leqslant \frac{1}{g(b)} \int_a^b g(x) f(x)\,dx \leqslant M.$$

Поскольку непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция F принимает на этом отрезке любое значение, лежащее между ее минимальным значением m и максимальным M (см. (30.12)), то существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$F(\xi) = \frac{1}{g(b)} \int_a^b g(x) f(x)\, dx.$$

В силу условия (30.11) это и есть формула (30.10). $\square$

Теорема 3 (Бонне*)). *Пусть f — непрерывная, а g — монотонная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция. Тогда существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что*

$$\int_a^b g(x) f(x)\, dx = g(a) \int_a^\xi f(x)\, dx + g(b) \int_\xi^b f(x)\, dx. \tag{30.15}$$

Доказательство. Допустим сначала, что функция g возрастает на отрезке $[a, b]$; тогда функция $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(x) - g(a)$, $a \leqslant x \leqslant b$, будет неотрицательной возрастающей непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ функцией. Поэтому согласно лемме существует такое $\xi \in [a, b]$, что

$$\int_a^b h(x) f(x)\, dx = h(b) \int_\xi^b f(x)\, dx.$$

Подставив сюда выражение для $h(x)$, получим

$$\int_a^b [g(x) - g(a)] f(x)\, dx = [g(b) - g(a)] \int_\xi^b f(x)\, dx,$$

откуда

$$\int_a^b g(x) f(x)\, dx = g(a) \int_a^b f(x)\, dx - g(a) \int_\xi^b f(x)\, dx + $$
$$+ g(b) \int_\xi^b f(x)\, dx = g(a) \int_a^\xi f(x)\, dx + g(b) \int_\xi^b f(x)\, dx,$$

т. е. получилась формула (30.15).

Если функция g убывает на отрезке $[a, b]$, то для доказательства теоремы достаточно применить формулу (30.15) к функции $-g$, которая, очевидно, возрастающая. $\square$

Отметим, что теорема 2 справедлива и при более слабых ограничениях: от функции f достаточно потребовать лишь ее интегрируемость, а от g — ее монотонность.

30.4. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Аналогично тому, как были определены интегралы от числовых функций, можно определить и интегралы от вектор-функций, значения которых принадлежат n-мерному векторному пространству R^n (см. п. 18.4).

*) О. Бонне (1819—1892) — французский математик.

Пусть $\boldsymbol{r}(t) \in R^n$, $a \leqslant t \leqslant b$, — вектор-функция, $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, δ_τ — мелкость разбиения τ. Если при любом указанном выборе точек ξ_i существует предел *)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{i_0} \boldsymbol{r}(\xi_i)\, \Delta t_i,$$

не зависящий от выбора последовательности разбиений, то он называется *интегралом от функции* $\boldsymbol{r}(t)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\, dt.$$

При постоянных a и b он представляет собой постоянный вектор в R^n.

Пусть $\boldsymbol{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Поскольку при сложении векторов складываются их координаты, при умножении векторов на число их координаты умножаются на то же число, а предел вектор-функции равен вектору, координаты которого являются пределами ее соответствующих координат, то

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\, dt = \left(\int_a^b x_1(t)\, dt, \ \ldots, \int_a^b x_n(t)\, dt \right).$$

В силу этого равенства многие свойства интегралов от числовых функций переносятся на интегралы от вектор-функций. В частности, вектор-функция $\boldsymbol{F}(t)$, определенная на некотором конечном или бесконечном промежутке E числовой прямой, называется *первообразной для данной функции* $\boldsymbol{r}(t) \in R^n$, определенной на том же промежутке E, если во всех его внутренних точках t имеет место равенство $\boldsymbol{F}'(t) = \boldsymbol{r}(t)$, а на каждом конце промежутка E, входящем в E, функция $\boldsymbol{F}$ непрерывна.

Для вектор-функций справедливо предложение, аналогичное основной теореме интегрального исчисления (см. теорему 4 п. 29.3):

если вектор-функция $\boldsymbol{r}(t) \in R^n$ *интегрируема на отрезке* $[a, b]$ *и непрерывна в его внутренних точках (в частности, если она непрерывна на всем отрезке* $[a, b]$*), то у нее существует на этом отрезке первообразная, и для любой ее первообразной* $\boldsymbol{F}(t)$, *справедлива формула*

$$\int_a^b \boldsymbol{r}'(t)\, dt = \boldsymbol{F}(b) - \boldsymbol{F}(a)$$

*) Понятие предела в этом случае определяется с помощью предела векторной последовательности либо на ($\varepsilon - \delta$)-языке совершенно аналогично случаю скалярных функций, рассмотренному в п. 27.1, и предоставляется читателю.

называемая, как и в случае скалярных функций, формулой Ньютона — Лейбница.

Справедливость этого утверждения следует из справедливости формулы Ньютона — Лейбница для всех координат функции $\boldsymbol{r}(t)$.

Замечание. В п. 15.2 была доказана следующая теорема: если вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема внутри него, то существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$|\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)| \leqslant |\boldsymbol{r}'(\xi)|(b-a).$$

Приведенное в п. 15.2 доказательство этого утверждения имело несколько искусственный характер — надо было догадаться воспользоваться некоторой вспомогательной функцией. С помощью понятия интеграла (предполагая непрерывность производной рассматриваемой вектор-функции) доказательство можно провести более естественным образом.

Пусть вектор-функция $\boldsymbol{r}(t) \in R^n$ имеет непрерывную на отрезке $[a, b]$ производную. Тогда, применяя формулу Ньютона — Лейбница, получаем

$$|\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)| = \left|\int_a^b \boldsymbol{r}'(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt.$$

В правой части получился интеграл от непрерывной скалярной функции. Согласно интегральной теореме о среднем (см. следствие из теоремы 1 в п. 28.2) существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$\int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt = |\boldsymbol{r}'(\xi)|(b-a);$$

следовательно,

$$|\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)| \leqslant |\boldsymbol{r}'(\xi)|(b-a), \quad \xi \in (a, b). \ \square$$

§ 31. МЕРА ПЛОСКИХ ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ

31.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕРЫ (ПЛОЩАДИ) ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ

Рассмотрим плоскость, на которой зафиксирована некоторая прямоугольная система координат. Обозначим через T_0 разбиение этой плоскости на замкнутые квадраты, получающиеся при проведении всевозможных прямых $x = p$, $y = q$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Такое разбиение назовем *квадрильяжем плоскости ранга* 0, а указанные квадраты — *квадратами нулевого ранга*. Разобьем каждый из квадратов нулевого ранга на 100 равных квадратов прямыми, параллельными осям координат (любые две соседние параллельные прямые отстоят друг от друга на расстояние 1/10). Совокупность получившихся квадратов обо-