называемая, как и в случае скалярных функций, формулой Ньютона — Лейбница.

Справедливость этого утверждения следует из справедливости формулы Ньютона — Лейбница для всех координат функции $\boldsymbol{r}(t)$.

Замечание. В п. 15.2 была доказана следующая теорема: если вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема внутри него, то существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)| \leqslant |\boldsymbol{r}'(\xi)|(b-a).$$

Приведенное в п. 15.2 доказательство этого утверждения имело несколько искусственный характер — надо было догадаться воспользоваться некоторой вспомогательной функцией. С помощью понятия интеграла (предполагая непрерывность производной рассматриваемой вектор-функции) доказательство можно провести более естественным образом.

Пусть вектор-функция $\boldsymbol{r}(t) \in R^n$ имеет непрерывную на отрезке $[a, b]$ производную. Тогда, применяя формулу Ньютона — Лейбница, получаем

$$|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)| = \left|\int_a^b \boldsymbol{r}'(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt.$$

В правой части получился интеграл от непрерывной скалярной функции. Согласно интегральной теореме о среднем (см. следствие из теоремы 1 в п. 28.2) существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$\int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt = |\boldsymbol{r}'(\xi)|(b-a);$$

следовательно,

$$|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)| \leqslant |\boldsymbol{r}'(\xi)|(b-a), \quad \xi \in (a, b). \square$$

§ 31. МЕРА ПЛОСКИХ ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ

31.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕРЫ (ПЛОЩАДИ) ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ

Рассмотрим плоскость, на которой зафиксирована некоторая прямоугольная система координат. Обозначим через T_0 разбиение этой плоскости на замкнутые квадраты, получающиеся при проведении всевозможных прямых $x=p$, $y=q$, $p=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $q=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Такое разбиение назовем *квадрильяжем плоскости ранга* 0, а указанные квадраты — *квадратами нулевого ранга*. Разобьем каждый из квадратов нулевого ранга на 100 равных квадратов прямыми, параллельными осям координат (любые две соседние параллельные прямые отстоят друг от друга на расстояние 1/10). Совокупность получившихся квадратов обозначим T_1. Продолжая этот процесс дальше, получаем квадрильяжи T_m, $m=1, 2, \ldots$, плоскости, состоящие из квадратов, образовавшихся в результате проведения всевозможных прямых вида

$$x=\frac{p}{10^m},\quad y=\frac{q}{10^m},\quad p=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\quad q=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,$$

и, следовательно, со сторонами длины $1/10^m$. Квадраты, принадлежащие квадрильяжу T_m, будем называть *квадратами ранга* m, $m=1, 2, \ldots$

Пусть G — плоское открытое множество. Обозначим через $s_0 = s_0(G)$ совокупность точек всех квадратов нулевого ранга, лежащих вместе со своей границей во множестве G, а через $s_1 = s_1(G)$ — совокупность точек всех квадратов первого ранга, лежащих в G вместе с границей. Вообще через $s_m = s_m(G)$ обозначим совокупность всех квадратов ранга m, лежащих вместе со своей границей во множестве G, $m=0, 1, \ldots$ Очевидно, что (рис. 112)

$$s_0 \subset s_1 \subset \ldots \subset s_m \subset \ldots \subset G. \qquad (31.1)$$

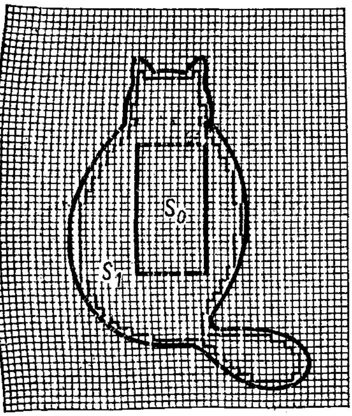

Рис. 112

Множества $s_0, s_1, \ldots, s_m, \ldots$ представляют собой «многоугольники», составленные из конечного или бесконечного числа квадратов соответствующего ранга. В случае, если s_m состоит из конечного числа квадратов, обозначим площадь многоугольника s_m через пл. s_m, если же s_m состоит из бесконечного числа квадратов, положим пл. $s_m = +\infty$. Если какое-то s_m состоит из бесконечного числа квадратов, то и все следующие s_m, $m \geqslant m_0$ также состоят из бесконечного числа квадратов.

Из включений (31.1) в силу соглашения об использовании символа $+\infty$ (см. п. 2.5) следует, что всегда

$$\text{пл. } s_0 \leqslant \text{пл. } s_1 \leqslant \ldots \leqslant \text{пл. } s_m \leqslant \ldots \qquad (31.2)$$

Возможны два случая.

1. Все пл. s_m конечны, тогда (31.2) является монотонно возрастающей последовательностью, и поэтому она имеет либо конечный предел, либо стремится к $+\infty$. Этот предел в этом случае и называется *площадью, или мерой, открытого множества* G и обозначается $\operatorname{mes} G$ *).

*) От французского слова mésure — мера, размер.

2. Если же существует такой номер m_0, что пл. $s_{m_0} = +\infty$, то пл. $s_m = +\infty$ и для всех номеров $m \geqslant m_0$. В этом случае положим

$$\operatorname{mes} G = +\infty.$$

Согласно определению предела последовательности элементов расширенной числовой прямой $\overline{R}$ (см. п. 3.2) последовательность элементов a_n, $n = 1, 2, \ldots$, принадлежащих расширенному множеству действительных чисел $\overline{R}$, таких, что начиная с некоторого номера они все равны $+\infty$, имеет своим пределом $+\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Используя это понятие, оба рассмотренных выше случая можно объединить в один. Сформулируем окончательное определение.

Определение 1. *Предел* $\lim\limits_{m\to\infty}$ пл. $s_m(G)$ *(конечный или бесконечный) называется площадью, или мерой, открытого множества* G *и обозначается* $\operatorname{mes} G$:

$$\operatorname{mes} G = \lim_{m\to\infty} \text{пл. } s_m(G). \tag{31.3}$$

Такое определение меры открытого множества естественно, так как последовательность множеств s_m, $m = 0, 1, \ldots$, исчерпывает открытое множество, т. е.

$$\bigcup_{m=0}^{\infty} s_m = G,$$

иначе говоря, для любой точки $P \in G$ существует такой многоугольник s_{m_0}, что

$$P \in s_{m_0}.$$

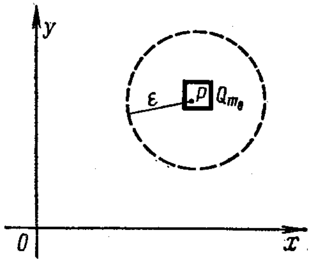

Рис. 113

Действительно, какова бы ни была точка $P \in G$, в силу открытости множества G существует сферическая окрестность $U(P;\ \varepsilon) \subset G$, $\varepsilon > 0$. Заметив теперь, что диаметр квадрата ранга m равен $\sqrt{2}/10^m$; выберем m_0 так, чтобы

$$\frac{1}{10^{m_0}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}. \tag{31.4}$$

Для всякой точки плоскости существует по крайней мере один квадрат каждого ранга, содержащий эту точку. Пусть Q_{m_0} — квадрат ранга m_0, содержащий точку P. В силу неравенства (31.4) $Q_{m_0} \subset U(P;\ \varepsilon)$, значит, $Q_{m_0} \subset G$ и, следовательно, $Q_{m_0} \subset s_{m_0}$, но $P \in Q_{m_0}$, поэтому $P \in s_{m_0}$ (рис. 113). $\square$

Если открытое множество G ограничено, то всегда $\operatorname{mes} G < +\infty$. В самом деле, если G ограничено, то существует замкнутый квадрат Q, содержащий множество G ($G \subset Q$) и являющийся объединением квадратов нулевого ранга, тогда $s_m(G) \subset Q$ при любом $m = 0, 1, \ldots$, и, значит, пл. $s_m(G) \leqslant$ пл. Q.

Таким образом, последовательность (31.2) ограничена сверху и, значит, предел (31.3) конечен.

Задача 21. Доказать, что мера плоского открытого множества не зависит от выбора прямоугольной системы координат на плоскости, на которой оно расположено.

Из курса элементарной математики известно, что в случае, если открытое множество S является многоугольником, то его площадь, являющаяся, по определению, и площадью замкнутого многоугольника $\bar{S}$, совпадает с определенной нами мерой:

$$\text{пл. } \bar{S} = \text{пл. } S = \operatorname{mes} S^{*)}.$$

31.2. СВОЙСТВА МЕРЫ ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ

Теорема 1 (монотонность меры). *Если G и Γ — плоские открытые множества и*

$$G \subset \Gamma, \tag{31.5}$$

то

$$\operatorname{mes} G \leqslant \operatorname{mes} \Gamma. \tag{31.6}$$

Доказательство. Обозначим, как и выше, через $s_m(G)$ и $s_m(\Gamma)$ совокупности квадратов ранга m, лежащих вместе со своей границей соответственно в множествах G и Γ, $m = 1, 2, \ldots$. Тогда из условия (31.5) следует, что

$$s_m(G) \subset s_m(\Gamma),$$

откуда

$$\text{пл. } s_m(G) \leqslant \text{пл. } s_m(\Gamma). \tag{31.7}$$

В случае, когда оба множества $s_m(G)$ и $s_m(\Gamma)$ состоят из конечного числа квадратов, это следует из того, что площадь объемлющего многоугольника не меньше площади объемлемого, а в случае, когда хоть одно из множеств $s_m(G)$ и $s_m(\Gamma)$ содержит бесконечно много квадратов, — из соглашения об употреблении символа $+\infty$.

Переходя к пределу в неравенстве (31.7) при $m \to \infty$ в силу (31.3) получим неравенство (31.6). $\square$

Теорема 2. *Пусть G и G_k, $k = 1, 2, \ldots$, — плоские открытые множества, $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset \ldots$ и $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$,* тогда

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = \operatorname{mes} G. \tag{31.8}$$

---

*) См. также п. 44.2 (квадрируемые множества).

Заметим, что если при некотором k_0 имеет место $\operatorname{mes} G_k = +\infty$, то, согласно теореме 1, и для всех $k \geqslant k_0$ также $\operatorname{mes} G_k = +\infty$; в этом случае равенство (31.8) означает, что $\operatorname{mes} G = +\infty$.

Докажем предварительно лемму.

Лемма 1. *Пусть G_k, $k=1, 2, \ldots,$ — открытые плоские множества,*

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset G_{k+1} \subset \ldots \tag{31.9}$$

и

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k. \tag{31.10}$$

Тогда если E — компакт и

$$E \subset G, \tag{31.11}$$

то существует номер k_0, такой, что

$$E \subset G_{k_0}. \tag{31.12}$$

Доказательство леммы. Из (31.10) и (31.11) следует, что система $\{G_k\}$, $k=1, 2, \ldots,$ образует открытое покрытие множества E. Поэтому, согласно теореме об открытых покрытиях компакта (см. теорему 4 в п. 18.3) существует конечное покрытие $\{G_{k_1}, \ldots, G_{k_m}\}$ множества E

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{m} G_{k_i}.$$

Обозначим через k_0 наибольший из номеров $k_1, \ldots, k_m$. В силу условия (31.9) имеем равенство

$$\bigcup_{i=1}^{m} G_{k_i} = G_{k_0}.$$

Следовательно, $E \subset G_{k_0}$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Предварительно заметим, что из условия $G_1 \subset G_2 \subset \ldots G_k \subset \ldots$ следует (см. теорему 1), что

$$\operatorname{mes} G_1 \leqslant \operatorname{mes} G_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{mes} G_k \leqslant \ldots, \tag{31.13}$$

поэтому последовательность G_k, $k=1, 2, \ldots,$ всегда имеет предел, конечный или равный $+\infty$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть все множества $s_m(G)$, $m=0, 1, \ldots,$ состоят из конечного числа квадратов. В этом случае каждое из множеств $s_m(G)$ является ограниченным замкнутым множеством и, следовательно, компактом. Поэтому по лемме 1, для всякого номера m существует такой номер k_m, что

$$s_m(G) \subset G_{k_m}, \quad m=1, 2, \ldots. \tag{31.14}$$

При этом выберем k_m так, что $k_{m'} > k_m$ при $m' > m$. Это всегда можно сделать, например, следующим образом. Если выбраны номера $k_1 < k_2 < \ldots < k_{m-1}$ и для множества $s_m(G)$, согласно лемме 1, найдено множество G_n такое, что

$$s_m(G) \subset G_n, \tag{31.15}$$

то обозначим через k_m какое-либо натуральное число такое, что $k_m > k_{m-1}$ и $k_m \geqslant n$; тогда $G_n \subset G_{k_m}$ и, значит, $s_m(G) \subset G_{k_m}$. Таким образом построенная последовательность k_m, $m = 1, 2, \ldots$, является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел.

Обозначим теперь через $\tilde{s}_m(G)$ совокупность всех внутренних точек множества $s_m(G)$. Очевидно, $\tilde{s}_m(G)$ — открытое множество и $\tilde{s}_m(G) \subset s_m(G) \subset G_{k_m}$, поэтому в силу теоремы 1

$$\operatorname{mes} \tilde{s}_m(G) \leqslant \operatorname{mes} G_{k_m}, \tag{31.16}$$

Поскольку $G_k \subset G$, $k = 1, 2, \ldots$, то в силу той же теоремы 1

$$\operatorname{mes} G_{k_m} \leqslant \operatorname{mes} G. \tag{31.17}$$

Объединяя неравенства (31.16) и (31.17), получим:

$$\operatorname{mes} s_m(G) = \operatorname{mes} \tilde{s}_m(G) \leqslant \operatorname{mes} G_{k_m} \leqslant \operatorname{mes} G.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, будем иметь

$$\lim_{m \to \infty} \operatorname{mes} G_{k_m} = \operatorname{mes} G,$$

ибо, согласно (31.3): $\lim\limits_{m \to \infty} \operatorname{mes} s_m(G) = \operatorname{mes} G$.

Последовательность $\{\operatorname{mes} G_k\}$, как отмечалось выше, имеет конечный или бесконечный предел, поэтому он совпадает с пределом любой ее подпоследовательности, следовательно,

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = \operatorname{mes} G.$$

т. е. выполняется равенство (31.8).

2. Пусть существует множество $s_m(G)$, содержащее бесконечно много квадратов; тогда пл. $s_m(G) = +\infty$, поэтому и $\operatorname{mes} G = +\infty$. Покажем, что в этом случае и

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = +\infty. \tag{31.18}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$ и пусть $s_m(G)$ состоит из бесконечного множества квадратов. Площадь каждого квадрата ранга m равна $\frac{1}{10^{2m}}$. Зафиксируем натуральное число n так, чтобы

$$n/10^{2m} > \varepsilon, \tag{31.19}$$

и выберем из $s_m(G)$ n каких-либо квадратов. Обозначим множество их точек через D. Множество D является многоугольником (оно является объединением конечного числа квадратов) и, следовательно, ограниченным замкнутым множеством, т. е. компактом, причем

$$\text{пл. } D = \frac{n}{10^{2m}}. \tag{31.20}$$

В силу леммы существует такой номер k, что

$$D \subset G_k. \tag{31.21}$$

Обозначим через $\tilde{D}$ множество внутренних точек многоугольника D. Согласно теореме 1 и формулам (31.19), (31.20), получим

$$\operatorname{mes} G_k \geqslant \text{пл. } \tilde{D} = \text{пл. } D > \varepsilon$$

В силу же (31.13) и для всех $k' \geqslant k$

$$\operatorname{mes} G_{k'} > \varepsilon.$$

Это и означает выполнение условия (31.18). □

Примером неограниченной плоской области, имеющей бесконечную меру, является полоса

$$G = \{(x, y) : 0 < y < 1\}.$$

Она содержит в себе бесконечное множество, например, квадратов первого ранга и потому

$$\operatorname{mes} G = +\infty.$$

Для того, чтобы построить пример неограниченной области с конечной площадью, поступим следующим образом. Пусть Q — единичный квадрат:

$$Q = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Положим

$$G_1 = \left\{(x, y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < \frac{1}{2}\right\},$$

$$G_2 = G_1 \cup \left\{(x, y) : 1 \leqslant x < 2,\ 0 < y < \frac{1}{4}\right\},$$

вообще

$$G_{k+1} = G_k \cup \left\{(x, y) : k \leqslant x < k+1,\ 0 < y < \frac{1}{2^{k+1}}\right\},\quad k = 1, 2 \dots.$$

Каждое множество G_k открыто (почему?).

Наглядно образование множеств G_k можно представить себе следующим образом: G_1 — половина квадрата Q; для получения G_2 берется половина оставшейся половины квадрата Q и прикладывается соответствующим образом к G_1, получается G_2; далее, половина оставшейся части квадрата Q прикладывается уже к G_3 (рис. 114) и т. д.

Очевидно, имеем цепочку включений

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset \ldots$$

и

$$\text{пл. } G_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^k}.$$

Положим $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$.

Множество G открыто и неограничено. Найдем, применив теорему 2, ее площадь:

$$\operatorname{mes} G = \lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = \lim_{k \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = 1.$$

Мера (объем) открытых множеств в трехмерном и вообще n-мерном пространстве ($n = 1, 2, 3, 4, \ldots$) определяется с помощью аналогичной конструкции, следует только, естественно, исходить не из разбиений плоскости на квадраты (квадрильяжей),

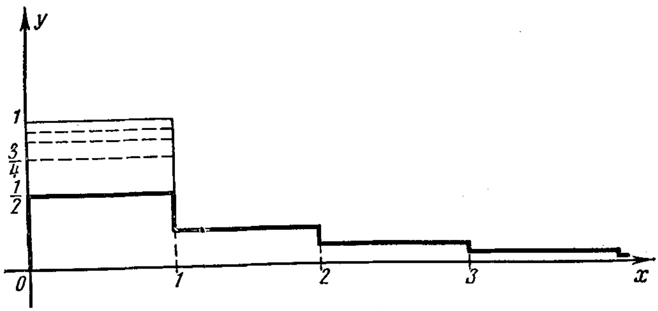

Рис. 114

а из разбиений пространства на соответствующие n-мерные кубы (кубильяжей). На n-мерный случай переносятся и теоремы, доказанные в этом параграфе. Мы вернемся еще к изучению меры множеств в дальнейших главах, см. п. 44.1. В этом пункте будут излагаться дальнейшие свойства меры (например, ее поведение при объединении множеств — так называемая аддитивность меры); его можно читать непосредственно вслед за настоящим параграфом.

Упражнение 1. Доказать, что площадь прямоугольника равна произведению его сторон.

2. Пусть G — прямой круговой цилиндр, основанием которого является круг K, а высота которого имеет длину h. Доказать, что $\operatorname{mes} G = h \operatorname{mes} K$, где $\operatorname{mes} G$ есть мера G в пространстве, а $\operatorname{mes} K$ — мера K на плоскости.