§ 32. НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

32.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ

В этом пункте будут выведены формулы для вычисления площадей некоторых плоских областей. При этом воспользуемся известными из элементарной математики свойствами площади простейших плоских фигур (многоугольников, секторов), например, тем, что при объединении таких фигур, не имеющих общих внутренних точек, их площади складываются. Впрочем, это утверждение будет строго доказано в п. 44.1.

Теорема 1. *Пусть функция f определена, неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда площадь S множества*

$$G=\{(x, y): a<x<b,\ 0<y<f(x)\}$$

выражается формулой

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{32.1}$$

Множество G является открытым ограниченным множеством. Действительно, его ограниченность следует из того, что функция f, будучи непрерывной на отрезке $[a, b]$, ограничена на нем.

Покажем, что множество G открыто. Пусть $(x_0, y_0)\in G$; тогда $0<y_0<f(x_0)$. Возьмем какое-либо число $\eta>0$, такое, что $0<y_0-\eta<y_0<y_0+\eta<f(x_0)$. В силу непрерывности функции f в точке x_0 существует такое $\delta>0$, что для всех $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ выполняется неравенство $f(x)>y_0+\eta$. Ясно, что прямоугольная окрестность $P((x_0, y_0); \delta, \eta)$ принадлежит множеству G, т. е. точка (x_0, y_0) является его внутренней точкой.

Граница множества G содержится в объединении графика функции f, отрезка $[a, b]$ оси Ox и отрезков $[0, f(a)]$ и $[0, f(b)]$ соответственно прямых $x=a$ и $x=b$. Оно обычно называется *криволинейной трапецией* (см. рис. 90), порожденной графиком функции f.

Доказательство. Пусть $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Обозначим через G_τ и g_τ замкнутые многоугольники, составленные из всех прямоугольников вида

$$G_{\tau, i}=\{(x, y): x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\ 0\leqslant y\leqslant M_i,\ i=1, 2, \ldots, k\},$$
$$g_{\tau, i}=\{(x, y): x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\ 0\leqslant y\leqslant m_i,\ i=1, 2, \ldots, k\},$$

где $m_i=\inf\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x)$, $M_i=\sup\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x)$, т. е. (рис. 115)

$$G_\tau=\bigcup_{i=1}^k G_{\tau, i},\quad g_\tau=\bigcup_{i=1}^k g_{\tau, i}. \tag{32.2}$$

Если обозначить через $\tilde{G}_\tau$ и $\tilde{g}_\tau$ множество внутренних точек многоугольников G_τ и g_τ, то

$$\tilde{g}_\tau \subset G \subset \tilde{G}_\tau. \tag{32.3}$$

Если S_τ и s_τ — соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу функции f на отрезке $[a, b]$, соответствующие его разбиению τ,

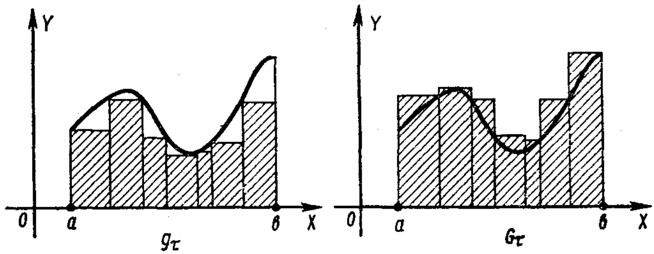

Рис. 115

то очевидно, что пл. $\tilde{g}_\tau = s_\tau$, пл. $\tilde{G}_\tau = S_\tau$. Поэтому из (32.3) в силу монотонности меры следует, что

$$s_\tau \leqslant \operatorname{mes} G \leqslant S_\tau. \tag{32.4}$$

Поскольку

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{32.5}$$

то

$$\operatorname{mes} G = \int_a^b f(x)\,dx. \ \square$$

Как известно (см. п. 27.4),

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \int_a^b f(x)\,dx,$$

поэтому в силу формулы (32.1)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \operatorname{mes} G.$$

Таким образом, геометрически интегральные суммы Римана и суммы Дарбу равны приближенному значению площади рассматриваемой криволинейной трапеции, причем любая точность достигается выбором достаточной мелкости разбиения τ, а предел интегральных сумм равен истинному значению указанной площади.

Пусть теперь функция f непрерывна и неположительна на отрезке $[a, b]$. Положим в этом случае

$$G = \{(x, y) : a < x < b,\ f(x) < y < 0\}.$$

Пусть $\hat{G}$ — множество, симметричное множеству G относительно оси Ox *) (рис. 116), тогда

$$\operatorname{mes}\hat{G} = \operatorname{mes} G. \tag{32.6}$$

В рассматриваемом случае функция $-f$ неотрицательна на отрезке $[a, b]$, поэтому

$$\operatorname{mes}\hat{G} = \int_a^b [-f(x)]\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{32.7}$$

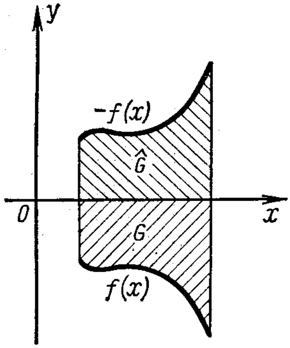

Рис. 116

Сравнив (32.6) и (32.7), получим

$$\operatorname{mes} G = -\int_a^b f(x)\,dx,$$

т. е. здесь интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ равен, с точностью до знака, значению площади криволинейной трапеции G. Если же функция f меняет знак на отрезке $[a, b]$ в конечном числе точек, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ равен алгебраической сумме площадей соответствующих криволинейных трапеций, ограниченных частями графика функции f, отрезками оси Ox и, быть может, отрезками, параллельными оси Oy (рис. 117).

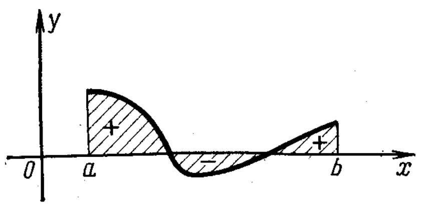

Рис. 117

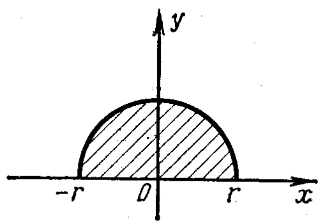

Рис. 118

Как видно, одной из задач, естественным образом приводящих к понятию определенного интеграла, является задача вычисления площадей. Развитый аппарат интегрального исчисления дает общий и единый метод вычисления площадей разнообразных плоских фигур.

Примеры. 1. Найдем площадь S круга радиуса r. Поместим начало координат в центр указанного круга. Тогда уравнение

*) Это означает, что $\hat{G} = \{(x, y) : (x, -y) \in G\}$.

полуокружности, лежащей в верхней полуплоскости, имеет вид $y=\sqrt{r^2-x^2}$ (рис. 118). Поэтому площадь полукруга радиуса r вычисляется, согласно теореме 1, по формуле (32.1)

$$S=\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=r^2\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=r^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=\frac{\pi r^2}{2}$$

(при вычислении интеграла сделана замена переменного $x=r\cos t$), откуда искомая площадь круга равна πr^2.

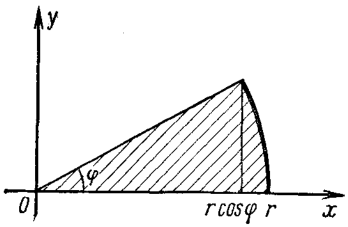

Рис. 119

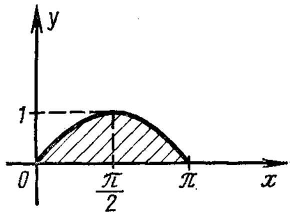

Рис. 120

Подобным же образом находится и площадь S_φ сектора круга (радиуса r), соответствующего центральному углу φ. Считая для простоты $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$, имеем (рис. 119):

$$S_\varphi=\int_0^{r\cos\varphi}x\operatorname{tg}\varphi\,dx+\int_{r\cos\varphi}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{x^2\operatorname{tg}\varphi}{2}\Big|_0^{r\cos\varphi}+$$

$$+r^2\int_0^{\varphi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=\frac{r^2\sin\varphi\cos\varphi}{2}+\frac{r^2\varphi}{2}-\frac{r^2\sin 2\varphi}{4}=\frac{r^2\varphi}{2}.$$

2. Найдем площадь S, ограниченную осью Ox и одной аркой синусоиды (рис. 120)

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=2.$$

Здесь, как и всегда в дальнейшем, говоря об области, ограниченной некоторой кривой, являющейся простым замкнутым контуром (см. п. 16.1), мы всегда будем иметь в виду ограниченную область, границей которого является данный контур. Всякую неограниченную область, границей которой является подобный контур, будем называть внешней (для данного контура). В рассматриваемом случае внешней областью является «внешность» области, заштрихованной на рис. 120. Внешняя область всегда имеет бесконечную площадь. Действительно, всякая кривая ограничена (см. п. 16.3), поэтому во внешней области любого простого контура содержится, например, квадрат со сколь угодно большой стороной. Отсюда сразу и следует бесконечность площади внешней области.

3. Найдем площадь S, ограниченную гиперболой $y=1/x$, осью Ox, отрезком прямой $x=1$ и отрезком прямой, проходящей через точку оси Ox с абсциссой, равной x и параллельной оси ординат (рис. 121):

$$S=\int_1^x \frac{dt}{t}=\ln\Big|_1^x=\ln x.$$

4. Вычислим площадь, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Поскольку лежащий выше оси абсцисс полуэллипс описывается уравнением $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, то для четверти искомой площади S имеем (см. пример 5 в п. 22.3 или пример 1 в п. 22.4):

$$\frac{1}{4}S=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a}{b}\left[\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right]_0^a=\frac{ab\pi}{4},$$

откуда $S=\pi ab$.

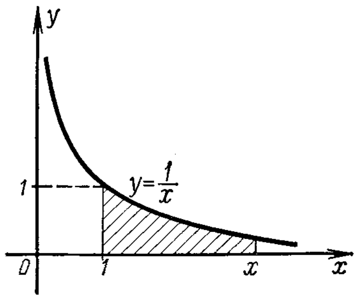

Рис. 121

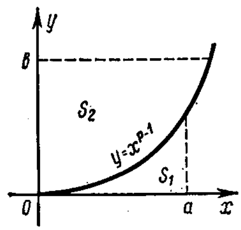

Рис. 122

5. Доказанное в п. 20.8 неравенство (20.50) имеет простой геометрический смысл. Рассмотрим кривую $y=x^{p-1}$ или, что то же, $x=y^{q-1}$, где $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (см. (20.55) и (20.56)). Выберем произвольно $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$ и подсчитаем площади S_1 и S_2 (рис. 122):

$$S_1=\int_0^a x^{p-1}\,dx=\frac{a^p}{p},\quad S_2=\int_0^b y^{q-1}\,dy=\frac{b^q}{q}.$$

Геометрически ясно, что площадь прямоугольника со сторонами a и b не превышает суммы S_1+S_2, т. е. $ab\leqslant S_1+S_2$ или, подробнее,

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\quad p>1,$$

а это и есть неравенство (20.50). При этом очевидно, что $ab = S_1 + S_2$ в том и только том случае, когда $b = a^{p-1}$.

Найдем теперь формулу для площади сектора кривой, заданной уравнением, связывающим ее полярные координаты: $\rho = \rho(\varphi)$, где $\rho = \rho(\varphi)$ — неотрицательная, непрерывная на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция, $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 2\pi$. Пусть G — открытое множество, граница которого состоит из кривой $\overset{\frown}{AB}$, описываемой в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ и, быть может, из отрезков OA и OB лучей $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ (рис. 123), $G = \{(\rho, \varphi): \alpha < \varphi < \beta, 0 < \rho < \rho(\varphi)\}$.

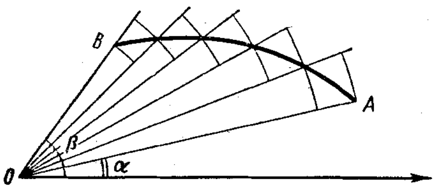

Рис. 123

Пусть $\tau = \{\varphi_i\}_{i=0}^{i=k}$ — некоторое разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$. Положим

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}, \quad m_i = \inf_{\varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i} \rho(\varphi), \quad M_i = \sup_{\varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i} \rho(\varphi),$$

$$g_{i,\tau} = \{(\rho, \varphi): \varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i, \; 0 \leqslant \rho \leqslant m_i\},$$

$$G_{i,\tau} = \{(\rho, \varphi): \varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i, \; 0 \leqslant \rho \leqslant M_i\}.$$

Впишем во множество G и опишем вокруг него ступенчатые фигуры g_τ и G_τ, составленные из круговых секторов $g_{i,\tau}$ и $G_{i,\tau}$, $i = 1, 2, \ldots, k$:

$$g_\tau = \bigcup_{i=1}^{k} g_{i,\tau}, \quad G_\tau = \bigcup_{i=1}^{k} G_{i,\tau}.$$

Обозначим через $\tilde{g}_\tau$ и $\tilde{G}_\tau$ совокупности всех внутренних точек множеств g_τ и G_τ. Очевидно, $\tilde{g}_\tau$ и $\tilde{G}_\tau$ — открытые множества и $\tilde{g}_\tau \subset G \subset \tilde{G}_\tau$; поэтому, согласно свойству монотонности площади,

$$\text{пл.}\, \tilde{g}_\tau \leqslant \operatorname{mes} G \leqslant \text{пл.}\, \tilde{G}_\tau.$$

Но пл. $\tilde{g}_\tau =$ пл. g_τ, пл. $\tilde{G}_\tau =$ пл. G_τ, следовательно,

$$\text{пл.}\, g_\tau \leqslant \operatorname{mes} G \leqslant \text{пл.}\, G_\tau. \tag{32.8}$$

Площади круговых секторов $g_{i,\tau}$ и $G_{i,\tau}$ равны соответственно $\frac{1}{2} m_i^2 \Delta\varphi_i$ и $\frac{1}{2} M_i^2 \Delta\varphi_i$. Из элементарной математики известно, что при объединении плоских фигур их площади складываются (см. об этом также в п. 44.1), значит

$$\text{пл.}\, g_\tau = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} m_i^2 \Delta\varphi_i, \quad \text{пл.}\, G_\tau = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} M_i^2 \Delta\varphi_i.$$

Из этих равенств видно, что пл. g_τ и пл. G_τ являются соответственно нижней и верхней суммами Дарбу для функции $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$: $s_\tau = $ пл. g_τ, $S_\tau = $ пл. G_τ, следовательно

$$s_\tau \leqslant \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi \leqslant S_\tau.$$

Вычитая это неравенство из неравенства (32.8), переписанного в виде $S_\tau \geqslant \operatorname{mes} G \geqslant s_\tau$, получим

$$s_\tau - S_\tau \leqslant \operatorname{mes} G - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi \leqslant S_\tau - s_\tau.$$

Отсюда, перейдя к пределу при $\delta_\tau \to 0$, имеем

$$\operatorname{mes} G = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi. \ \square \qquad (32.9)$$

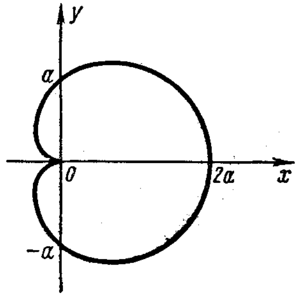

Рис. 124

В качестве примера найдем площадь S фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (см. п. 17.5), которая изображена на рис. 124. По формуле (32.9) получим

$$S = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi + a^2\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi + \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

32.2. ОБЪЕМ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

В конце п. 31.2 отмечалось, что понятие объема в пространстве вводится аналогично понятию площади на плоскости. Выведем формулу для вычисления объемов тел вращения.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x) \geqslant 0$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а Q — тело, полученное вращением криволинейной трапеции G, порожденной графиком функции f. Тогда для его объема* $\operatorname{mes} Q$ *справедлива формула*

$$\operatorname{mes} Q = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (32.10)$$

Доказательство. Обозначим через q_τ и Q_τ тела, образованные вращением вокруг оси Ox ступенчатых фигур $\tilde{g}_\tau$ и $\tilde{G}_\tau$ (см. доказательство теоремы 1). Из включения (32.3) следует, что

$q_\tau \subset Q \subset Q_\tau$, а потому и

$$\operatorname{mes} q_\tau \leqslant \operatorname{mes} Q \leqslant \operatorname{mes} Q_\tau. \tag{32.11}$$

Объемы v_τ и V_τ множеств q_τ и Q_τ равны суммам объемов цилиндров, образованных вращением прямоугольников $g_{\tau, i}$ и $G_{\tau, i}$ (рис. 125):

$$v_\tau = \operatorname{mes} q_\tau = \sum_{i=1}^{k} \pi m_i^2 \Delta x_i,$$

$$V_\tau = \operatorname{mes} Q_\tau = \sum_{i=1}^{k} \pi M_i^2 \Delta x_i.$$

Из этих равенств видно, что v_τ и V_τ являются нижними и верхними суммами Дарбу функции $\pi f^2(x)$; поэтому

$$v_\tau \leqslant \pi \int_a^b f^2(x)\, dx \leqslant V_\tau, \tag{32.12}$$

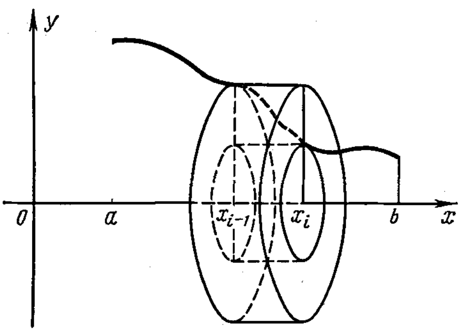

Рис. 125

и так как функция f^2 непрерывна и, следовательно, интегрируема, то

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} [V_\tau - v_\tau] = 0. \tag{32.13}$$

Из неравенств (32.11) и (32.12) следует, что

$$v_\tau - V_\tau \leqslant \pi \int_a^b f^2(x)\, dx - \operatorname{mes} Q \leqslant V_\tau - v_\tau,$$

откуда в силу (32.13) и вытекает формула (32.10).

Примеры. 1. Найдем объем V шара радиуса r. Рассматривая этот шар как тело, образованное вращением полуокружности $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leqslant x \leqslant r$ вокруг оси Ox (см. рис. 96), по формуле (32.10) получим:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi r^2 x \Big|_{-r}^{r} - \frac{\pi x^3}{3} \Big|_{-r}^{r} = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

2. Найдем объем V прямого кругового конуса с высотой, равной h, и радиусом основания r. Рассматривая указанный конус, как тело, полученное вращением треугольника с вершинами в точках $(0, 0)$, $(h, 0)$ и (h, r) вокруг оси Ox (рис. 126),

получим, согласно формуле (32.10),

$$V=\frac{\pi r^2}{h^2}\int\limits_0^h x^2\,dx=\frac{\pi r^2 x^3}{3h^2}\Big|_0^h=\frac{\pi r^2 h}{3}.$$

3. Найдем объем V тела, полученного вращением вокруг оси Ox графика функции $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $-b\leqslant x\leqslant b$. Эта кривая называется *цепной линией* (рис. 127). По формуле (32.10) имеем

$$V=\pi a^2\int\limits_{-b}^{b}\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\,dx=\frac{\pi a^2}{2}\int\limits_{-b}^{b}\left(1+\operatorname{ch}\frac{2x}{a}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{\pi a^2 x}{2}+\frac{\pi a^3}{4}\operatorname{sh}\frac{2x}{a}\right]_{-b}^{b}=\pi a^2 b+\frac{\pi a^3}{2}\operatorname{sh}\frac{2b}{a}.$$

Из рассмотренных в этом параграфе примеров уже отчетливо видна сила и общность методов интегрального исчисления: единым методом быстро и просто получаются формулы для площадей и объемов, как известные ранее из курса элементарной математики, так и совершенно новые. В ближайших пунктах мы рассмотрим еще ряд задач, также легко решаемых методами интегрального исчисления.

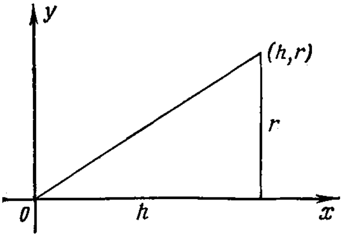

Рис. 126

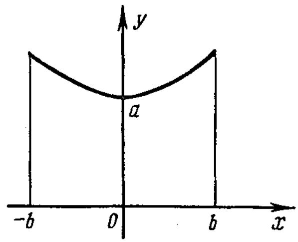

Рис. 127

32.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ КРИВОЙ

Мы рассмотрели ряд задач, приводящих к понятию определенного интеграла. Все они имеют то общее, что в них нахождение значения какой-то величины приводилось к определению предела некоторой интегральной суммы при стремлении мелкости разбиения к нулю, т. е. к определенному интегралу.

Существует, однако, и другой круг задач, приводящих к понятию определенного интеграла. В них известна скорость изменения одной величины относительно другой и требуется найти первую величину или, говоря точнее, дана производная функции, а требуется найти саму функцию, т. е. по заданной функции найти одну из ее первообразных. Эта задача также решается с помощью определенного интеграла, так как такой первообразной является, например, определенный интеграл с переменным верхним пределом. В качестве примера подобной задачи рассмотрим вычисление длины дуги кривой.

Пусть кривая Γ задана параметрическим векторным представлением

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b,$$

где функция $\boldsymbol{r}(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда, как мы знаем, кривая Γ спрямляема и переменная длина дуги $s(t)$, отсчитываемая от начальной точки (ее радиус-вектором служит $\boldsymbol{r}(a)$) кривой Γ, является также непрерывно дифференцируемой функцией параметра t на отрезке $[a, b]$, причем (см. п. 16.3)

$$\frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|.$$

Поэтому в силу формулы Ньютона — Лейбница, замечая, что $s(a)=0$) для длины $S=s(b)$ кривой Γ, получим

$$S=s(b)-s(a)=\int_a^b \frac{ds}{dt}\,dt, \quad \text{откуда} \quad S=\int_a^b \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt.$$

Если $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$, то

$$S=\int_a^b \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt. \tag{32.14}$$

В случае, когда кривая Γ является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y=f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, формула (32.14) принимает вид

$$S=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \tag{32.15}$$

Примеры. 1. Найдем длину S дуги параболы $y=ax^2$, $0 \leqslant x \leqslant b$. Замечая, что $y'=2ax$, согласно формуле (32.15), имеем

$$S=\int_0^b \sqrt{1+4a^2x^2}\,dx. \tag{32.16}$$

Неопределенный интеграл $I=\int \sqrt{1+4a^2x^2}\,dx$ вычислим следующим образом: проинтегрируем его сначала по частям; затем к числителю дроби, получившейся под знаком интеграла, прибавим и вычтем единицу, произведем деление и проинтегрируем (подстановкой $y=2ax$) получившуюся дробь:

$$I=\int\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx=x\sqrt{1+4a^2x^2}-\int\frac{4a^2x^2}{\sqrt{1+4a^2x^2}}\,dx=$$

$$=x\sqrt{1+4a^2x^2}-\int\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx+\int\frac{dx}{\sqrt{1+4a^2x^2}}=$$

$$=x\sqrt{1+4a^2x^2}-I+\frac{1}{2a}\ln\left|2ax+\sqrt{1+4a^2x^2}\right|.$$

Это равенство, рассматриваемое как уравнение относительно интеграла I, дает возможность найти его значение:

$$I=\frac{1}{2}x\sqrt{1+4a^2x^2}+\frac{1}{4a}\ln\left|2ax+\sqrt{1+4a^2x^2}\right|+C.$$

Теперь легко получить величину интеграла (32.16):

$$S=\frac{1}{2}b\sqrt{1+4a^2b^2}+\frac{1}{4a}\ln\left|2ab+\sqrt{1+4a^2b^2}\right|.$$

2. Найдем длину астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ (см. рис. 75). Астроида симметрична относительно начала координат. Ее части, лежащей в первой четверти, соответствует изменение параметра t от 0 до $\pi/2$. Вычислим длину S этой части (равной, очевидно, одной четвертой длины всей астроиды). Заметив, что

$$x'=-3a\cos^2 t\sin t,\quad y'=3a\sin^2 t\cos t,$$

по формуле (32.14) (в которой следует положить $z'=0$) получим:

$$S=\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=\frac{3a}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt=\frac{3a}{2}.$$

3. Найти длину S дуги эллипса $x=a\sin t$, $y=b\cos t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, $0<b\leqslant a$ от верхнего конца малой полуоси до его точки, соответствующей значению параметра $t\in[0,2\pi]$. Положим $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ (ε — эксцентриситет эллипса), тогда

$$\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}=a\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t},$$

поэтому

$$S=a\int_0^t\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt,\qquad 0\leqslant\varepsilon<1. \tag{32.17}$$

Мы получили эллиптический интеграл второго ряда, который, как известно (см. п. 26.6), не выражается через элементарные функции, т. е. формула (32.17) в данном случае является окончательным ответом. Приближенные значения длин дуг эллипса можно получить, либо непосредственно, вычислив приближенно интеграл (32.17), либо воспользовавшись имеющимися таблицами значений эллиптических интегралов.

Упражнения. 1. Доказать, что если плоская кривая задана в полярных координатах непрерывно дифференцируемым представлением $r=r(\varphi)$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$, то для ее длины S справедлива формула

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi. \qquad (32.18)$$

2. Найти длину дуги *логарифмической спирали* $r=ae^{b\varphi}$ от точки (φ_0, r_0) до точки (φ, r).

Интегральная формула для длины кривой позволяет выразить ее длину не только как верхнюю грань длин всевозможных вписанных в нее ломаных, но и как их предел при условии, что мелкости соответствующих разбиений стремятся к нулю. Чтобы это доказать, нам потребуется одна лемма.

Лемма. *Пусть* $\gamma=\{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),\ 0\leqslant s\leqslant S\}$ — *непрерывно дифференцируемая кривая в* R^3, s — *ее переменная длина дуги и* $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s)$. *Тогда отношение* $\frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{|\Delta s|}$ *стремится к единице при* $\Delta s\to 0$ *равномерно на отрезке* $[0, S]$. *Это означает, что для любого* $\varepsilon>0$ *существует такое* $\delta>0$, *что для любой точки* $s\in[0, S]$ *и для любого приращения* Δs $(s+\Delta s\in[0, S])$, *удовлетворяющего неравенству* $|\Delta s|<\delta$, *выполняется неравенство*

$$\left|\left|\frac{\Delta r}{\Delta s}\right|-1\right|<\varepsilon.$$

Доказательство. Допустим противное, т. е. что существует такое $\varepsilon_0>0$, что для любого $\delta>0$ найдется такая точка $s_\delta\in[0, S]$ и такое приращение Δs_δ, $|\Delta s_\delta|<\delta$, что для $\Delta\boldsymbol{r}_\delta=\boldsymbol{r}(s_\delta+\Delta s_\delta)-\boldsymbol{r}(s_\delta)$ выполняется неравенство

$$\left|\left|\frac{\Delta\boldsymbol{r}_\delta}{\Delta s_\delta}\right|-1\right|\geqslant\varepsilon_0.$$

Будем брать последовательно $\delta=1/n$, $n=1, 2, \ldots$, причем соответствующие точки s_δ и приращения Δs_δ будем обозначать через s_n и Δs_n. Тогда для всех натуральных n будут выполняться неравенства

$$\left|\left|\frac{\Delta\boldsymbol{r}_n}{\Delta s_n}\right|-1\right|\geqslant\varepsilon_0,\quad |\Delta s_n|<\frac{1}{n},$$

где $\Delta\boldsymbol{r}_n=\boldsymbol{r}(s_n+\Delta s_n)-\boldsymbol{r}(s_n)$.

Выделим из последовательности $\{s_n\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{s_{n_k}\}$, тогда $s_0\overset{\text{def}}{=}\lim\limits_{k\to\infty}s_{n_k}\in[0, S]$. В силу непрерывности производной $\boldsymbol{r}'(s)$ в точке s_0 существует такое $\delta_0>0$, что при $|s-s_0|<\delta_0$ справедливо неравенство

$$|\boldsymbol{r}'(s)-\boldsymbol{r}'(s_0)|<\frac{\varepsilon_0}{2}$$

или, что то же самое,

$$\boldsymbol{r}'(s)=\boldsymbol{r}'(s_0)+\alpha(s), \quad |\alpha(s)|<\frac{\varepsilon_0}{2} \quad \text{при} \quad |s-s_0|<\delta, \quad s\in[0, S].$$

Выберем теперь натуральное k_0 так, чтобы имели место неравенства

$$|s_{n_{k_0}}-s_0|<\frac{\delta_0}{2}, \quad \frac{1}{n_{k_0}}<\frac{\delta_0}{2};$$

тогда, замечая, что согласно выбору приращений Δs_n выполняется неравенство $|\Delta s_{n_{k_0}}|<\frac{1}{n_{k_0}}$, имеем $|\Delta s_{n_{k_0}}|<\frac{\delta_0}{2}$. Следовательно, для всех s, лежащих на отрезке с концами в точках $s_{n_{k_0}}$ и $s_{n_{k_0}}+\Delta s_{n_{k_0}}$, будем иметь

$$|s-s_0|\leqslant|s-s_{n_{k_0}}|+|s_{n_{k_0}}-s_0|<|\Delta s_{n_{k_0}}|+\frac{\delta_0}{2}<\delta_0.$$

Поэтому, заметив, что $|\boldsymbol{r}'(s_0)|=1$ и что

$$\Delta\boldsymbol{r}_{n_{k_0}}=\boldsymbol{r}(s_{n_{k_0}}+\Delta s_{n_{k_0}})-\boldsymbol{r}(s_{n_{k_0}})=\int\limits_{s_{n_{k_0}}}^{s_{n_{k_0}}+\Delta s_{n_{k_0}}}\boldsymbol{r}'(s)\,ds=$$

$$=\int\limits_{s_{n_{k_0}}}^{s_{n_{k_0}}+\Delta s_{n_{k_0}}}[\boldsymbol{r}'(s_0)+\alpha(s)]\,ds=\boldsymbol{r}'(s_0)\Delta s_{n_{k_0}}+\int\limits_{s_{n_{k_0}}}^{s_{n_{k_0}}+\Delta s_{n_{k_0}}}\alpha(s)\,ds,$$

получим

$$\left|\left|\frac{\Delta\boldsymbol{r}_{n_{k_0}}}{\Delta s_{n_{k_0}}}\right|-1\right|=\left|\left|\boldsymbol{r}'(s_0)+\frac{1}{\Delta s_{n_{k_0}}}\int\limits_{s_{n_{k_0}}}^{s_{n_{k_0}}+\Delta s_{n_{k_0}}}\alpha(s)\,ds\right|-|\boldsymbol{r}'(s_0)|\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{|\Delta s_{n_{k_0}}|}\int\limits_{s_{n_{k_0}}}^{s_{n_{k_0}}+\Delta s_{n_{k_0}}}|\alpha(s)|\,ds\right|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{2}<\varepsilon_0.$$

Это противоречит сделанному предположению. □

Теорема 3. *Пусть* $\gamma=\{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),\ 0\leqslant s\leqslant S\}$ — *непрерывно дифференцируемая кривая в* R^3, s — *ее переменная длина дуги,* $\tau=\{s_i\}_{i=0}^{i=k}$ — *разбиение отрезка* $[0, S]$, $\lambda_\tau=\sum\limits_{i=1}^{k}|\boldsymbol{r}(s_i)-\boldsymbol{r}(s_{i-1})|$; *тогда*

$$S=\lim_{\delta_\tau\to 0}\lambda_\tau.$$

Здесь λ_τ является, очевидно, длиной вписанной в кривую γ ломаной с вершинами в точках $r(s_i)$, $i=0, 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. Положим $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$, $\Delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}(s_i) - \boldsymbol{r}(s_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Заметив, что $s = \sum_{i=1}^{k} \Delta s_i$ и $\lambda_\tau = \sum_{i=1}^{k} |\Delta \boldsymbol{r}_i|$, получим

$$|S - \lambda_\tau| = \left| \sum_{i=1}^{k} \Delta s_i - \sum_{i=1}^{k} |\Delta \boldsymbol{r}_i| \right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \left| 1 - \left| \frac{\Delta \boldsymbol{r}_i}{\Delta s_i} \right| \right| \Delta s_i.$$

Согласно лемме для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что как только $|\Delta s_i| < \delta$, то имеет место неравенство

$$\left| \left| \frac{\Delta \boldsymbol{r}_i}{\Delta s_i} \right| - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{S}.$$

Поэтому для всякого разбиения τ мелкости $\delta_\tau < \delta$ выполняется неравенство

$$|S - \lambda_\tau| < \frac{\varepsilon}{S} \sum_{i=1}^{k} \Delta s_i = \varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \lambda_\tau = S$. $\square$

32.4. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Понятие поверхности и ее площади будет специально изучаться в § 50. Здесь же мы ограничимся специальным случаем поверхностей, образованных вращением кривых вокруг некоторых осей. Как всегда будем предполагать, что в пространстве R^3 фиксирована прямоугольная декартова система координат.

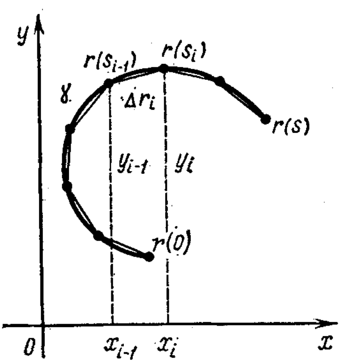

Рис. 128

Пусть $\gamma = \{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — кривая, лежащая в полуплоскости $y > 0$ плоскости переменных x, y, $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=k}$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Впишем в кривую γ ломаную с вершинами в точках $r(t_i) = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ (рис. 128). При вращении звена $\Delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})$ этой ломаной вокруг оси Ox получится поверхность усеченного конуса (в частности, быть может, цилиндра) с площадью

$$l_i = \pi (y_{i-1} + y_i) |\Delta r_i|,$$

а при вращении всей ломаной — поверхность с площадью

$$L_\tau = \sum_{i=1}^{k} l_i = \pi \sum_{i=1}^{k} (y_{i-1} + y_i) \, |\Delta \boldsymbol{r}_i|.$$

Определение 1. *Если существует предел $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} L_\tau$, то он называется площадью L поверхности, образованной вращением кривой γ вокруг оси Ox.*

Таким образом,

$$L \overset{\text{def}}{=} \lim_{\delta_\tau \to 0} L_\tau. \tag{32.19}$$

Теорема 4. *Пусть $\gamma = \{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек, лежащая в полуплоскости $y > 0$ плоскости переменных x, y. Тогда для площади L поверхности, полученной вращением кривой γ вокруг оси x-ов, справедлива формула*

$$L = 2\pi \int_a^b y \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt = 2\pi \int_0^S y(s)\, ds, \tag{32.20}$$

где s — переменная длина дуги кривой γ, $0 \leqslant s \leqslant S$.

Доказательство. Как известно, при сделанных в теореме предположениях (см. п. 16.5) функция $s = s(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, является допустимым преобразованием параметра, и, следовательно, длина дуги s может быть принята за параметр:

$$\gamma = \{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s) = (x(s),\ y(s)),\quad 0 \leqslant s \leqslant S\}.$$

Пусть $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i=k}$ — разбиение отрезка $[0, S]$,

$$\Delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}(s_i) - \boldsymbol{r}(s_{i-1}),\quad \Delta s_i = s_i - s_{i-1},\quad i = 1,\ 2,\ \ldots k.$$

Сравним сумму

$$L_\tau = \pi \sum_{i=1}^{k} (y_{i-1} + y_i) \, |\Delta r_i|,\quad y_i \overset{\text{def}}{=} y_i(s),\quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ k, \tag{32.21}$$

с интегральной суммой (функции $2\pi y(s)$)

$$\sigma_\tau = 2\pi \sum_{i=1}^{k} y_i \, \Delta s_i. \tag{32.22}$$

Для этого заметим, что функция $y(s)$, будучи непрерывной на отрезке $[0, S]$ ограничена на нем, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $s \in [0, S]$ выполняется неравенство $|y(s)| \leqslant M$. Обозначая через $\omega(\delta;\ y)$ модуль непрерывности функции $y(s)$, а через λ_τ — длину ломаной с вершинами в точках

$r(s_i)$ и заметив, что $|\Delta r_i| \leqslant \Delta s_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, получим

$$|\sigma_\tau - L_\tau| = \left| \pi \sum_{i=1}^{k} 2y_i \Delta s_i - \pi \sum_{i=1}^{k} [2y_i + (y_{i-1} - y_i)] |\Delta \boldsymbol{r}_i| \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \sum_{i=1}^{k} |y_i| (\Delta s_i - |\Delta \boldsymbol{r}_i|) + \pi \sum_{i=1}^{k} |y_i - y_{i-1}| |\Delta \boldsymbol{r}_i| \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi M \left(\sum_{i=1}^{k} \Delta s_i - \sum_{i=1}^{k} |\Delta \boldsymbol{r}_i| \right) + \pi \omega (\delta_\tau; y) \sum_{i=1}^{k} |\Delta \boldsymbol{r}_i| =$$

$$= 2\pi M (S - \lambda_\tau) + \pi\omega(\delta_\tau; y) \lambda_\tau.$$

Здесь $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (S - \lambda_\tau) = 0$ (см. теорему 3), $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \omega(\delta_\tau, y) = 0$ (см. теорему 5 в п. 19.6) и $0 \leqslant \lambda_\tau \leqslant S$. Поэтому $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (\sigma_\tau - L_\tau) = 0$, а поскольку $\lim \sigma_\tau = 2\pi \int\limits_0^S y(s)\, ds$, то и $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} L_\tau = 2\pi \int\limits_0^S y(s)\, ds$. Сделав в последнем интеграле замену переменного $s = s(t)$ и вспоминая, что $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$, получим:

$$L = 2\pi \int\limits_a^b y \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

Если кривая γ задана явным уравнением $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, то формула для площади поверхности, образованной вращением графика функции f вокруг оси Ox, имеет вид

$$L = 2\pi \int\limits_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{32.23}$$

Вспоминая, что (см. п. 16.4) $\sqrt{1 + y'^2}\, dx = ds$, формулу (32.23) можем переписать в виде

$$L = 2\pi \int\limits_0^S y\, ds.$$

Предложенный вывод формулы (32.20) имеет некоторый недостаток, так как в этом выводе по ходу дела уже использовалось понятие площади поверхности и ее аддитивность, правда, лишь в простейшем случае — для поверхностей усеченного конуса и их объединений. Можно ввести общее понятие площади поверхности, не используя понятие площади поверхности для каких-либо элементарных поверхностей, и получить ее необходимые свойства. Эти вопросы будут рассмотрены в дальнейшем в п. 50.5.

Примеры. 1. Найдем площадь S сферы радиуса r. Указанная сфера может быть получена вращением полуокружности $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $-r\leqslant x\leqslant r$, вокруг оси Ox. Однако это явное представление полуокружности не является непрерывно дифференцируемым: производная $y'=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ обращается в бесконечность при $x=\pm r$. Гораздо удобнее взять параметрическое представление полуокружности

$$x=r\cos t,\quad y=r\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant\pi.$$

Тогда $x'=-r\sin t$, $y'=r\cos t$; поэтому площадь S поверхности сферы радиуса r легко вычисляется по формуле (32.20):

$$S=\int_0^\pi y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=2\pi r^2\int_0^\pi \sin t\,dt=4\pi r^2.$$

2. Найдем площадь S поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги цепной линии (см. рис. 107) $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $-b\leqslant x\leqslant b$ (эта поверхность называется *катеноидом*). По формуле (32.23) имеем:

$$S=2\pi a\int_{-b}^{b}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx=$$

$$=2\pi a\int_{-b}^{b}\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\,dx=\pi a\int_{-b}^{b}\left(1+\operatorname{ch}\frac{2x}{a}\right)dx=\pi a\left(2b+a\operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right).$$

32.5. РАБОТА СИЛЫ

Пусть материальная точка M движется по непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma=\{r=r(s)\}$, где s — переменная длина дуги, $0\leqslant s\leqslant S$. Пусть на рассматриваемую материальную точку, находящуюся в положении $r(s)$, действует сила $F(s)$, направленная по касательной к траектории в направлении движения.

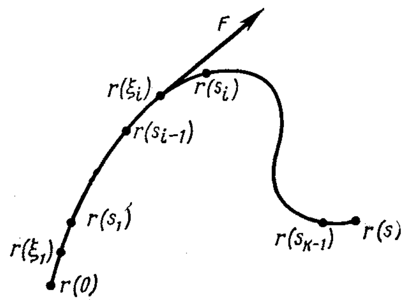

Рис. 129

Возьмем какое-либо разбиение $\tau=\{s_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[0, S]$. Ему соответствует разбиение траектории Γ на части

$$\Gamma_i=\{r(s),\quad s_{i-1}\leqslant s\leqslant s_i\},\quad i=1,\ldots,k.$$

Выберем произвольно по точке $\xi_i\leqslant[s_{i-1}, s_i]$, $i=1, 2, \ldots, k$ (рис. 129). Величина $F(\xi_i)\Delta s_i$, $\Delta s_i=s_i-s_{i-1}$, $i=1, 2, \ldots, k$ называется *эле-*

ментарной работой силы F на участке Γ_i и принимается за приближенное значение работы, которую производит сила F, воздействующая на материальную точку, когда последняя проходит кривую Γ_i. Сумма всех элементарных работ $\sum_{i=1}^{k} F(\xi_i)\Delta s_i$ является интегральной суммой Римана функции $F(s)$.

Определение 2. *Предел, к которому стремится сумма $\sum_{i=1}^{k} F(\xi_i)\Delta s_i$ всех элементарных работ, когда мелкость δ_τ разбиения τ стремится к нулю, называется работой силы F вдоль кривой* Γ.

Таким образом, если обозначить эту работу буквой W, то в силу данного определения

$$W = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} F(\xi_i)\Delta s_i$$

и, следовательно,

$$W = \int_0^S F(s)\,ds. \tag{32.24}$$

Если положение точки на траектории ее движения описывается с помощью какого-либо другого параметра t (например, времени) и если величина пройденного пути $s = s(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, является непрерывно дифференцируемой функцией, то из формулы (32.24) получим:

$$W = \int_a^b F[s(t)]\,s'(t)\,dt.$$

32.6. ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ И ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ КРИВОЙ

Пусть M — материальная точка массы m с координатами x и y. Произведения my и mx называются ее *моментами* соответственно *относительно осей* Ox и Oy.

Пусть $\Gamma = \{r(s),\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$ — спрямляемая кривая, где s — переменная длина дуги. Будем считать, что кривая Γ имеет массу и что масса ее дуги прямо пропорциональна длине дуги; если Δm — масса дуги длиной Δs, то $\Delta m = \rho\Delta s$, где ρ — некоторая постоянная, называемая *линейной плотностью кривой* Γ. Такие кривые в механике называются *однородными*. Поскольку $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta s}$, то плотность равна массе длины дуги кривой, приходящейся на единицу длины дуги. Будем считать для простоты, что $\rho = 1$, т. е. что масса части кривой длины Δs также равна Δs, в частности, что масса всей кривой численно равна S.

Пусть теперь $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i=k}$ — какое-либо разбиение отрезка $[0, S]$, $\Delta s = s_i - s_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Разбиению τ соответствует разбиение кривой Γ на части $\Gamma_i = \{r(s), s_{i-1} \leqslant s \leqslant s_i\}$. Выберем по какой-либо точке $\xi_i \in [s_{i-1}, s_i]$ и положим $x_i = x(\xi_i)$, $y_i = y(\xi_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Величины $y_i \Delta s_i$ при любом выборе указанных точек ξ_i называются *элементарными статическими моментами* части Γ_i кривой Γ относительно оси Ox. Очевидно, элементарный статический момент Γ_i численно равен моменту материальной точки массы Δs с ординатой y_i, т. е. мы как бы заменили данную непрерывную кривую Γ k материальными точками.

Определение 3. *Предел, к которому стремится сумма*

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \Delta s_i \tag{32.25}$$

всех элементарных моментов, когда мелкость разбиения τ стремится к нулю, называется моментом M_x кривой Γ относительно оси Ox.

Этот предел всегда существует, ибо, по определению кривой, функция $r = r(s)$, а значит, и координатные функции $x = x(s)$, $y = y(s)$ непрерывны на отрезке $[0, S]$; сумма же (32.25) является интегральной суммой Римана функции $y(s)$ и потому при $\delta \to 0$ стремится к интегралу $\int_0^S y(s)\,ds$. Таким образом,

$$M_x = \int_0^S y\,ds. \tag{32.26}$$

Аналогично определяется и вычисляется момент M_y кривой Γ относительно оси Ox:

$$M_y = \int_0^S x\,ds. \tag{32.27}$$

Определение 4. *Точка плоскости $P = (x_0, y_0)$, обладающая тем свойством, что если в нее поместить материальную точку массы, равной массе кривой (в рассматриваемом нами случае массы S), то эта точка относительно любой координатной оси имеет статический момент, численно равный статическому моменту кривой относительно той же оси, называется центром тяжести данной кривой.*

Таким образом,

$$Sx_0 = M_y, \quad Sy_0 = M_x.$$

откуда в силу формул (32.26) и (32.27) для координат центра тяжести получаем формулы

$$x_0 = \frac{1}{S}\int_0^S x\,ds, \quad y_0 = \frac{1}{S}\int_0^S y\,ds. \tag{32.28}$$

Сравнивая формулы для ординаты центра тяжести кривой $y_0 S = \int_0^S y\,ds$ и для площади L поверхности, полученной от вращения этой кривой вокруг некоторой оси $L = 2\pi \int_0^S y\,ds$, получим интересное соотношение $L = 2\pi y_0 S$ (здесь под кривой понимается непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек), составляющее содержание так называемой первой теоремы Гульдина*).

Теорема 5 (Гульдин). *Площадь поверхности, полученной от вращения кривой около некоторой не пересекающей ее оси, равна длине этой кривой, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести этой кривой.*

В случае, когда известно положение центра тяжести кривой, теорема Гульдина позволяет просто находить площадь соответствующей поверхности вращения. Например, площадь поверхности, полученной от вращения окружности $(x-a)^2 + y^2 = r^2$, $0 < r < a$, вокруг оси Oy (такая поверхность называется *тором*) легко вычисляется указанным способом: $L = 2\pi a \cdot 2\pi r = 4\pi^2 ar$, так как центр тяжести окружности совпадает с ее центром.

В качестве примера вычисления центра тяжести кривой по формуле (32.28) найдем центр тяжести цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $-b \leqslant x \leqslant b$. В силу симметрии цепной линии относительно оси Oy имеем $M_y = 0$. Действительно, выбирая за начало отсчета дуг точку цепной линии, лежащую на оси Oy, и обозначив длину всей цепной линии через $2S$, получим

$$M_y = \int_{-S}^{S} x(s)\,ds = 0,$$

ибо $x(s)$ — нечетная функция. Из равенства $M_y = 0$ в силу формулы (32.28) следует, что $x_0 = 0$. Далее,

$$M_x = \int_{-S}^{S} y\,ds.$$

Как отмечалось выше, $2\pi M_x = L_x$, где L_x — площадь поверхности, образованной вращением цепной линии вокруг оси Ox, и, следовательно (см. п. 32.4),

$$L_x = \pi a \left(2b + a \operatorname{sh} \frac{2b}{a}\right), \text{ поэтому } M_x = \frac{a}{2}\left(2b + a \operatorname{sh} \frac{2b}{a}\right).$$

*) П. Гульдин (1577—1643) — швейцарский математик.

С другой стороны, заметив, что длина $2S$ цепной линии легко вычисляется по формуле (32.15):

$$S=\int_{-b}^{b}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{-b}^{b}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx=$$

$$=\int_{-b}^{b}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx=a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_{-b}^{b}=2a\operatorname{sh}\frac{b}{a};$$

в силу формулы (32.28) получим

$$y_0=\left(2b+a\operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right)\Big/4\operatorname{sh}\frac{b}{a}.$$

Упражнения. 3. Найти площадь конечной области, ограниченной параболой $y^2=2x+1$ и прямой $y=x-1$.

4. Найти площадь области, ограниченной циклоидой

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

и прямой $y=0$.

5. Найти площадь области, ограниченной кривой $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ (эта кривая называется лемнискатой).

6. Найти объем тела вращения, образованного вращением одной арки синусоиды $y=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant \pi$ вокруг оси Ox.

7. Найти длину кривой $y=\ln\cos x$, $0\leqslant x\leqslant a<\frac{\pi}{2}$.

8. Найти длину дуги *спирали Архимеда* $\rho=a\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ вокруг оси Ox.

10. Найти координаты центра тяжести дуги круга

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad |\varphi|\leqslant\alpha\leqslant\pi.$$

11. Доказать существование центра тяжести для непрерывно дифференцируемой кривой, иначе говоря, доказать, что точка плоскости, определяемая формулами (32.28), не зависит от выбора декартовых координат на плоскости.

§ 33. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

33.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Функция, неограниченная на отрезке, не интегрируема на нем по Риману (теорема 1, п. 27.2). Если функция определена на бесконечном промежутке, то нельзя говорить о ее интегрируемости по Риману просто потому, что определение интеграла относится только к функциям, заданным на отрезке. В настоящем параграфе понятие интеграла обобщается как на случай функций, определенных на неограниченных промежутках, так и на случай функций, определенных на ограниченных промежутках, но неограниченных на них. Это делается с помощью предельного перехода, дополнительного к пределу, с помощью которого вводится интеграл Римана.