С другой стороны, заметив, что длина $2S$ цепной линии легко вычисляется по формуле (32.15):

$$S=\int_{-b}^{b}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{-b}^{b}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx=$$

$$=\int_{-b}^{b}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx=a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_{-b}^{b}=2a\operatorname{sh}\frac{b}{a};$$

в силу формулы (32.28) получим

$$y_0=\left(2b+a\operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right)\Big/4\operatorname{sh}\frac{b}{a}.$$

Упражнения. 3. Найти площадь конечной области, ограниченной параболой $y^2=2x+1$ и прямой $y=x-1$.

4. Найти площадь области, ограниченной циклоидой

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

и прямой $y=0$.

5. Найти площадь области, ограниченной кривой $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ (эта кривая называется лемнискатой).

6. Найти объем тела вращения, образованного вращением одной арки синусоиды $y=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$ вокруг оси Ox.

7. Найти длину кривой $y=\ln\cos x$, $0\leqslant x\leqslant a<\frac{\pi}{2}$.

8. Найти длину дуги *спирали Архимеда* $\rho=a\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ вокруг оси Ox.

10. Найти координаты центра тяжести дуги круга

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad |\varphi|\leqslant\alpha\leqslant\pi.$$

11. Доказать существование центра тяжести для непрерывно дифференцируемой кривой, иначе говоря, доказать, что точка плоскости, определяемая формулами (32.28), не зависит от выбора декартовых координат на плоскости.

§ 33. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

33.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Функция, неограниченная на отрезке, не интегрируема на нем по Риману (теорема 1, п. 27.2). Если функция определена на бесконечном промежутке, то нельзя говорить о ее интегрируемости по Риману просто потому, что определение интеграла относится только к функциям, заданным на отрезке. В настоящем параграфе понятие интеграла обобщается как на случай функций, определенных на неограниченных промежутках, так и на случай функций, определенных на ограниченных промежутках, но неограниченных на них. Это делается с помощью предельного перехода, дополнительного к пределу, с помощью которого вводится интеграл Римана.

Определение 1. *Пусть функция f определена на конечном или бесконечном полуинтервале $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b$. Если существует $\lim\limits_{\eta \to b} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx$, то функция f называется интегрируемой в несобственном смысле на промежутке $[a, b)$, а указанный предел называется ее несобственным интегралом и обозначается через $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.*

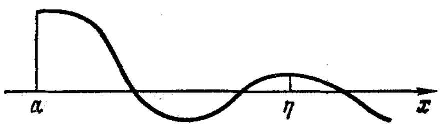

Рис. 130

Таким образом (рис. 130)

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\eta \to b} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx. \quad (33.1)$$

Если предел (33.1) существует (и, следовательно, конечен), то говорят также, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ **сходится**, в противном случае — что он **расходится**. В отличие от несобственного интеграла обычный интеграл Римана называют иногда **собственным интегралом**.

Существование несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ эквивалентно существованию несобственного интеграла $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ при любом $c \in (a, b)$. В самом деле, интеграл $\int\limits_c^\eta f(x)\,dx$ отличается от интеграла $\int\limits_c^\eta f(x)\,dx$ (при $c < \eta < b$) на конечную, не зависящую от η, величину $\int\limits_a^c f(x)\,dx$:

$$\int\limits_a^\eta f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^\eta f(x)\,dx.$$

Поэтому при $\eta \to b$ оба интеграла $\int\limits_a^\eta$ и $\int\limits_c^\eta$ одновременно имеют или не имеют предел, причем в случае его существования

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \quad (33.2)$$

Из определения (33.1) несобственного интеграла и из (33.2) следует, что если интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, то

$$\lim_{c\to b}\int\limits_c^b f(x)\,dx=0. \qquad (33.3)$$

Отметим, что выполнение этого условия нельзя принять в качестве определения сходящегося интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, так как интеграл $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ также является несобственным и говорить о его стремлении к нулю при $c\to b$ можно лишь уже обладая определением сходящегося несобственного интеграла.

Если функция f неотрицательна и непрерывна на промежутке $[a, b)$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равен площади неограниченного открытого множества

$G=\{(x, y): a<x<b;\ 0<y<f(x)\}$,

т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\operatorname{mes} G. \qquad (33.4)$$

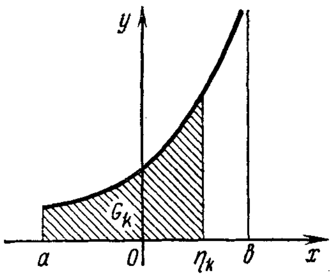

Рис. 131

Действительно (на рис. 131 изображен случай конечного b), выберем какую-либо последовательность $\eta_k\in[a, b)$, $k=1, 2, \ldots$ так, чтобы $\lim\limits_{k\to\infty}\eta_k=b$ и положим

$$G_k=\{(x, y): a<x<\eta_k,\quad 0<y<f(x)\}.$$

Тогда согласно теореме 1 из п. 32.1

$$\operatorname{mes} G_k=\int\limits_a^{\eta_k} f(x)\,dx. \qquad (33.5)$$

Поскольку G_k — открытые множества, $k=1, 2, \ldots$, и

$$G_1\subset G_2\subset\ldots\subset G_k\subset\ldots \quad \text{и} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k=G,$$

то, в силу теоремы 2 п. 31.2

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{mes} G_k=\operatorname{mes} G.$$

Согласно же определению несобственного интеграла

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^{\eta_k} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Поэтому, перейдя к пределу в равенстве (33.5) при $k\to\infty$, получим (33.4).

Отметим, что определение (33.1) несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ в случае конечного промежутка $[a, b)$ содержательно лишь в случае, когда функция f неограничена в любой окрестности точки $x=b$, т. е. на любом интервале $(b-\varepsilon, b)$ $(0<\varepsilon<<b-a)$. Это связано с тем, что (как нетрудно показать) всякая функция, интегрируемая по Риману на любом отрезке $[a, \eta]$, $a\leqslant\eta<b<+\infty$, и ограниченная на полуинтервале $[a, b)$ будет интегрируемой по Риману и на отрезке $[a, b]$ при любом ее доопределении в точке $x=b$. При этом интеграл Римана от таким образом доопределенной функции равен пределу (33.1) и, тем самым, не зависит от выбора дополнительного значения функции при $x==b$. В этом смысле интеграл Римана является частным случаем несобственного интеграла. Поэтому все дальнейшее изложение содержательно лишь когда функция определена на бесконечном промежутке или конечном, причем в последнем случае неограничена (рис. 132). Содержательность здесь понимается в том смысле, что для ограниченных подынтегральных функций, определенных на ограниченных промежутках, доказываемые ниже теоремы либо тривиальны, либо доказаны раньше.

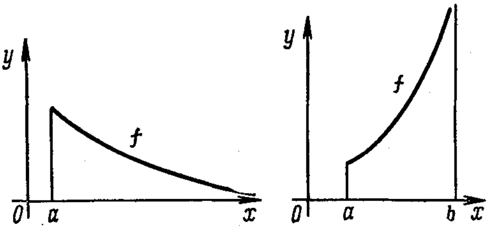

Рис. 132

Упражнения. 1. Пусть функция f ограничена на полуинтервале $[a, b)$, $-\infty<a<b<+\infty$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, \eta]$, $a\leqslant\eta<b$. Доказать, что в этом случае предел $\lim\limits_{\eta\to b}\int_a^{\eta} f(x)\,dx$ всегда существует, причем если функцию f произвольным образом доопределить при $x=b$, то этот предел будет равен интегралу Римана по отрезку $[a, b]$ от доопределенной функции.

2. Привести пример неотрицательной при $x\geqslant 1$ и неограниченной в любой окрестности $+\infty$ функции f, для которой сходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Если функция f определена на полуинтервале вида $(a, b]$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, и интегрируема по Риману на всех отрезках $[\xi, b]$, $a < \xi \leqslant b$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ определяется по формуле

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\xi \to a} \int\limits_\xi^b f(x)\,dx. \tag{33.6}$$

Если же функция f определена на интервале (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, и при некотором выборе точки $c \in (a, b)$ существуют несобственные интегралы $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ (в смысле (33.6)) и $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ (в смысле (33.1)), то по определению полагается

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \tag{33.7}$$

При этом существование и значение интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ не зависит от выбора точки $c \in (a, b)$. В самом деле, в рассматриваемом случае функция f очевидно интегрируема по Риману на любом отрезке $[\xi, \eta]$, $a < \xi < \eta < b$, и определение (33.7) в силу определений (33.1) и (33.6) равносильно следующему:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\xi \to a \\ \eta \to b}} \int\limits_\xi^\eta f(x)\,dx, \quad a < \xi < \eta < b.$$

Здесь правая часть является пределом функции двух переменных ξ и η. Образно говоря, переменные ξ и η стремятся соответственно к a и b независимо друг от друга.

Пусть теперь существует конечное число точек x_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, $-\infty \leqslant a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b \leqslant +\infty$ (под x_0 можно подразумевать также $-\infty$, а под x_k — $+\infty$) таких, что все несобственные интегралы

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx, \qquad i = 1, 2, \ldots, k,$$

существуют. Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ определяется по формуле

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx. \tag{33.8}$$

Из этого определения и определения (33.7) следует, что несобственный интеграл в общем случае сводится к интегралам вида (33.1) и (33.6). Поэтому в дальнейшем ограничимся лишь изучением несобственных интегралов двух указанных видов.

Упражнение 3. Доказать, что существование и значение несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ в определении (33.8) не зависит от выбора точек x_i, $i=0, 1, 2, \ldots, k$, удовлетворяющих сформулированным выше условиям.

Примеры. 1. Покажем, что несобственный интеграл от функции $f(x)=\frac{1}{x}$ по полуинтервалу $(0, 1]$ расходится. Действительно,

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi\to+0}\int\limits_\xi^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi\to+0} \ln x\Big|_\xi^1 = -\lim_{\xi\to+0}\ln\xi = +\infty.$$

Обычно проведенные вычисления записываются короче:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_0^1 = +\infty.$$

2. Выясним при каких $\alpha\neq 1$ сходится, а при каких — расходится интеграл от функции $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ по промежутку $(0, 1]$. Имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_0^1 = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{при} \quad \alpha<1, \\ +\infty & \text{при} \quad \alpha>1. \end{cases}$$

Отметим, что при $\alpha\leqslant 0$ рассматриваемый интеграл является собственным. Объединив результаты, полученные в примерах 1 и 2, получим

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{сходится} & \text{при} \quad \alpha<1, \\ \text{расходится} & \text{при} \quad \alpha\geqslant 1. \end{cases} \tag{33.9}$$

3. Рассмотрим теперь функцию $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ на бесконечном промежутке $[1, +\infty)$. Если $\alpha=1$, то

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^{+\infty} = +\infty.$$

Если же $\alpha\neq 1$, то

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^{+\infty} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при} \quad \alpha>1, \\ +\infty & \text{при} \quad \alpha<1. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{сходится} & \text{при} \quad \alpha > 1, \\ \text{расходится} & \text{при} \quad \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$

Мы ввели новое понятие — понятие несобственного интеграла. Прежде всего естественно выяснить, какими свойствами обладает этот интеграл. Сохраняются ли для него свойства обычного интеграла? Возникают ли для несобственного интеграла (а если возникают, то такие) новые задачи и вопросы, специфические именно для него? Мы получим ответы на эти вопросы в дальнейших пунктах этого параграфа.

33.2. ФОРМУЛЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В этом и в дальнейших пунктах при рассмотрении свойств несобственных интегралов будем останавливаться более подробно лишь на интегралах от функций, определенных на конечных или бесконечных промежутках вида $[a, b)$ и интегрируемых по Риману на всех отрезках $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b$. Любые другие предположения будут специально оговариваться.

В силу свойств предела и определения несобственного интеграла, как предела обычного интеграла Римана, на несобственные интегралы переносятся многие свойства определенного интеграла. Рассмотрим некоторые из них.

1° **(Формула Ньютона — Лейбница для несобственных интегралов).** *Если функция f непрерывна на полуинтервале $[a, b)$ и F — какая-либо ее первообразная на нем, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} F(b-0) - F(a), & \textit{если } b \textit{ конечно} \\ F(+\infty) - F(a), & \textit{если } b = +\infty \end{cases} \tag{33.11}$$

Здесь $F(b-0) = \lim\limits_{x \to b-0} F(x)$ в случае, когда b конечно, и $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$, а под первообразной F функции f на промежутке $[a, b)$ понимается функция F, непрерывная на нем, дифференцируемая во всех его внутренних точках и такая, что $F'(x) = f(x)$, $a < x < b$.

Равенство (33.11) понимается в том смысле, что либо обе его части одновременно имеют смысл, и тогда они равны, либо они одновременно не имеют смысла, т. е. стоящие в них пределы не существуют. Действительно, согласно формуле Ньютона — Лейбница для функций, интегрируемых по Риману (см. п. 29.3), для любого $\eta \in [a, b)$ имеем

$$\int\limits_a^\eta f(x)\,dx = F(\eta) - F(a).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\eta \to b$, $a \leqslant \eta < b$, получаем формулу (33.11).

Подчеркнем, что эта формула доказана в предположении, что функция f интегрируема в обычном смысле на каждом отрезке вида $[a, \eta)$, $a \leqslant \eta < b$. Для интегралов вида (33.8) в случае, когда в правой части имеется более чем одно слагаемое, аналогичная формула верна не всегда. Образно говоря, если в некоторой внутренней точке данного промежутка функция обращается в бесконечность, то на всем этом промежутке нельзя, вообще говоря, применять формулу Ньютона — Лейбница. Например, если к интегралу $\int\limits_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}$ формально применить формулу Ньютона — Лейбница, то он будет равен числу $-\left.\frac{1}{x}\right|_{-1}^{1} = -2$. Однако, как мы уже знаем, рассматриваемый интеграл не существует. Таким образом, в этом примере применение формулы Ньютона — Лейбница сразу на всем промежутке интегрирования невозможно по существу.

Формула, аналогичная (33.11), справедлива, конечно, для несобственных интегралов вида (33.6). Если же несобственный интеграл определяется равенством (33.8), то формулу Ньютона — Лейбница следует применять (если это возможно) отдельно к каждому слагаемому правой части.

2°. **(Линейность несобственного интеграла).** *Если несобственные интегралы* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *сходятся, то для любых чисел* λ, μ *сходится и несобственный интеграл* $\int\limits_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx$, *причем*

$$\int\limits_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)\,dx + \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

В самом деле

$$\int\limits_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lim_{\eta \to b} \int\limits_a^\eta [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx =$$

$$= \lim_{\eta \to b} \left[\lambda \int\limits_a^\eta f(x)\,dx + \mu \int\limits_a^\eta g(x)\,dx\right] =$$

$$= \lambda \lim_{\eta \to b} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx + \mu \lim_{\eta \to b} \int\limits_a^\eta g(x)\,dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)\,dx + \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx,$$

$$a \leqslant \eta < b.$$

Подобным же образом доказываются и нижеследующие свойства несобственных интегралов, аналогичные соответствующим свойствам интеграла Римана.

3° **(Интегрирование неравенств).** *Если интегралы* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *сходятся, и для всех* $x \in [a, b)$ *выполняется неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$, *то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

4° **(Правило интегрирования по частям).** *Если функции* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *непрерывно дифференцируемы на промежутке* $[a, b)$, *то*

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du, \tag{33.12}$$

причем, если любые два из выражений $\int\limits_a^b u\,dv$, $uv\Big|_a^b$ и $\int\limits_a^b v\,du$ *имеют смысл* (т. е. соответствующие пределы конечны), *то имеет смысл и третье.*

5° **(Замена переменного в несобственном интеграле).** *Пусть функция* f *непрерывна на* $[a, b)$, *функция* $\varphi(t)$ *непрерывно дифференцируема на полуинтервале* $[\alpha, \beta)$, $-\infty < \alpha < \beta \leqslant +\infty$, *причем* $a = \varphi(\alpha) \leqslant \varphi(t) < b = \lim\limits_{t \to \beta} \varphi(t)$ при $\alpha \leqslant t < \beta$; *тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{33.13}$$

При этом интегралы в обеих частях этой формулы одновременно сходятся или нет.

Может случиться, что с помощью замены переменного несобственный интеграл превратится в обычный. Например, выполняя в несобственном интеграле $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ замену переменной $x = \sin t$, $0 \leqslant t < \frac{\pi}{2}$, получаем собственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Отметим, что всякий несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ по конечному промежутку $[a, b)$ может быть заменой переменной сведен к несобственному интегралу по неограниченному промежутку. Действительно, сделав, например, замену переменной

$$x=\frac{bt+a}{t+1},\quad dx=\frac{b-a}{(t+1)^2}\,dt,$$

получим

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=(b-a)\int\limits_0^{+\infty} f\left(\frac{bt+a}{t+1}\right)\frac{dt}{(t+1)^3}.$$

По аналогии с интегралом Римана для сходящегося несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, $a<b$, по определению полагается:

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx=-\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Следует обратить внимание на то, что не все свойства определенного интеграла Римана переносятся на несобственные интегралы. Так, например, произведение двух функций, интегрируемых по Риману на некотором отрезке, является функцией, также интегрируемой по Риману на нем. Аналог этого утверждения для несобственных интегралов не всегда справедлив. Существуют функции f и g, интегралы от которых на некотором промежутке сходятся, а интеграл от их произведения на том же промежутке расходится. В самом деле, пусть например, $f(x)=g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Как мы знаем (п. 33.1) интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, а интеграл

$$\int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,dx=\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}\ \text{расходится.}$$

Сделанное замечание еще раз напоминает о том, что, используя при обращении с несобственным интегралом аналоги свойств интеграла Римана, следует всегда не забывать о необходимости проверки справедливости для несобственного интеграла всякого утверждения, аналогичного соответствующему утверждению для собственного интеграла.

Примеры. Вычислим нижеследующие несобственные интегралы, используя сформулированные выше свойства:

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. Посредством замены переменной $x=\frac{1}{t}$, полу-

чим

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2};$$

2. $I_n = \int\limits_0^1 (\ln x)^n\, dx$. $n = 0, 1, 2, \ldots$ Интегрируя по частям (при $n > 0$), имеем

$$I_n = x(\ln x)^n \Big|_0^1 - n \int\limits_0^1 (\ln x)^{n-1}\, dx = -nI_{n-1},$$

ибо $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\ln x)^n = 0$. Это равенство легко получить, если применить n раз правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} x(\ln x)^n = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)^n}{1/x} = -n \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)^{n-1}}{1/x} = \ldots =$$
$$= (-1)^{n+1} n! \lim_{x\to 0} x = 0)$$

Заметив, что $I_0 = \int\limits_0^1 dx = 1$, получим $I_n = (-1)^n n!$*⁾;

3. $J_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Снова проинтегрировав по частям заданный интеграл при $n > 0$, получим

$$J_n = -x^n e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + n \int\limits_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx = nI_{n-1}$$

и поскольку

$$J_0 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

то $J_n = n!$

4. Остаются справедливыми для несобственных интегралов неравенства Минковского и Гельдера (см. п. 28.4*):

$$\left(\int\limits_a^b |f(x) + g(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int\limits_a^b |(x)|^p\, dx\right)^{1/p} + \left(\int\limits_a^b |g(x)|^p\, dx\right)^{1/p},$$

$$\left|\int\limits_a^b f(x) g(x)\, dx\right| \leqslant \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{1/q},$$

$$1 < p < +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

*⁾ Напомним, что по определению $0! = 1$.

Для доказательства достаточно написать соответствующие неравенства для интегралов на отрезке $[a, \eta]$ и перейти к пределу при $\eta \to b$.

В следующем пункте мы займемся специфической задачей теории несобственных интегралов: установлением признаков их сходимости.

Упражнения. Вычислить несобственные интегралы:

4. $\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}}, \quad a>0.$

5. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^3+a^3}, \quad a>0.$

6. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx.$

7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+ax+a^2}, \quad a>0.$

8. $\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad 0 \leqslant a < b.$

9. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\int\limits_0^x (t^p+a^p)^q\,dt}{x^{pq+1}}, \quad a, p, q>0.$

Указание: воспользоваться правилом Лопиталя.

33.3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Изучение признаков сходимости несобственных интегралов начнем со случая, когда подынтегральная функция неотрицательна. При этом будем придерживаться соглашения, сформулированного в начале предыдущего пункта.

Лемма 1. *Если функция f неотрицательна на полуинтервале $[a, b)$, то для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы все интегралы*

$$\int\limits_a^\eta f(x)\,dx, \quad a \leqslant \eta < b$$

были ограниченными в совокупности, т. е. чтобы существовала такая постоянная $M>0$, что для всех $\eta \in [a, b)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_a^\eta f(x)\,dx \leqslant M. \tag{33.14}$$

При выполнении этого условия

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sup_{a\leqslant\eta<b} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx. \tag{33.15}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(\eta)=\int_a^\eta f(x)\,dx,\quad a\leqslant\eta<b. \tag{33.16}$$

В силу того, что $f\geqslant 0$ функция φ возрастает: действительно, если $a\leqslant\eta<\eta'<b$, то (см. свойство 8° интеграла в п. 28.1)

$$\int_\eta^{\eta'} f(x)\,dx\geqslant 0,$$

и поэтому

$$\varphi(\eta')=\int_a^{\eta'} f(x)\,dx=\int_a^\eta f(x)\,dx+\int_\eta^{\eta'} f(x)\,dx\geqslant\int_a^\eta f(x)\,dx=\varphi(\eta).$$

Теперь заметим, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует предел $\lim\limits_{\eta\to b}\int_a^\eta f(x)\,dx=\lim\limits_{\eta\to b}\varphi(\eta)$, а последний предел существует в том и только том случае (см. теорему 5 в п. 4.10), когда функция φ ограничена сверху, т. е. когда выполняется условие (33.14). При этом,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\eta\to b}\varphi(\eta)=\sup_{a\leqslant\eta<b}\int_a^\eta f(x)\,dx. \ \square$$

Из доказанной леммы следует, что для того чтобы несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ от неотрицательной функции расходился, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(\eta)$ (см. (33.16)) была неограниченной сверху; но тогда в силу ее возрастания

$$\lim_{\eta\to b}\int_a^\eta f(x)\,dx=\lim_{\eta\to b}\varphi(\eta)=+\infty.$$

Поэтому, если несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ от неотрицательной функции расходится, то пишут $\int_a^b f(x)\,dx=+\infty$. При таком соглашении остается справедливым равенство (33.15).

Теорема 1 (признак сравнения). *Пусть функции f и g неотрицательны на полуинтервале* $[a, b)$ и

$$f(x)=O(g(x))\ \text{при}\ x\to b^{*)}. \tag{33.17}$$

*) В частности $f(x)\leqslant g(x)$, $x\in[a, b)$.

Тогда

1) *если интеграл* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *сходится, то сходится и интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$;

2) *если интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *расходится, то расходится и интеграл* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Следствие. *Пусть функции* f, g *неотрицательны на полуинтервале* $[a, b)$, $g(x) \neq 0$, $x \in [a, b)$ *и существует*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad a \leqslant x < b. \tag{33.18}$$

Тогда

1) *если интеграл* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *сходится и* $0 \leqslant k < +\infty$, *то интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *также сходится,*

2) *если интеграл* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *расходится и* $0 < k \leqslant +\infty$, *то интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *также расходится.*

В частности, если f *и* g — *эквивалентные при* $x \to b$ *функции:* $f \sim g$, $x \to b$ (см. п. 8.2), *то интегралы* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство теоремы. Пусть интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится. Из условия (33.17) следует существование такого η_0, $a \leqslant \eta_0 < b$, и такого $c > 0$, что для всех $x \in [\eta_0, b)$ выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant cg(x) \tag{33.19}$$

(см. п. 8.2). Из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ следует и сходимость интеграла $\int\limits_{\eta_0}^b g(x)\,dx$. В силу же необходимости условий леммы для сходимости интеграла, существует такое число $M > 0$, что для любого $\eta \in [\eta_0, b)$ справедливо неравенство

$$\int_{\eta_0}^{\eta} g(x)\,dx \leqslant M.$$

Отсюда и из неравенства (33.19) имеем

$$\int_{\eta_0}^{\eta} f(x)\,dx \leqslant c \int_{\eta_0}^{\eta} g(x)\,dx \leqslant cM.$$

Из этого неравенства, в силу достаточности условий леммы для сходимости интеграла от неотрицательной функции получаем, что интеграл $\int_{\eta_0}^{b} f(x)\,dx$, а, следовательно, и интеграл $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ сходятся.

Первое утверждение теоремы доказано. Второе — логически равносильно первому. В частности, если интеграл $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ расходится, то $\int_{a}^{b} g(x)\,dx$ не может сходиться, так как если он был бы сходящимся, то в силу уже доказанного первого утверждения теоремы, сходился бы и интеграл $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$. Таким образом, интеграл $\int_{a}^{b} g(x)\,dx$ расходится. □

Доказательство следствия. Из выполнения условия (33.18) для k, удовлетворяющего условию $0 \leqslant k < +\infty$, следует, что существует такое $\eta \in [a, b)$, что если $\eta < x < b$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} < k + 1, \text{ т. е. } f(x) < (k+1)\,g(x),$$

а это означает, что

$$f(x) = O(g(x)), \qquad x \to b.$$

Поэтому утверждение 1) следствия непосредственно вытекает из утверждения теоремы 1) теоремы 1.

Пусть теперь условие (33.18) выполнено при некотором k, удовлетворяющем условию $0 < k \leqslant +\infty$. Тогда для любого $k' \in (0, k)$ существует такое $\eta \in [a, b)$, что если $\eta < x < b$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} > k', \quad \text{или} \quad g(x) < \frac{1}{k'} f(x).$$

Это и означает, что $g(x) = O(f(x))$, $x \to b$. Поэтому утверждение 2) следствия непосредственно вытекает из утверждения 2) теоремы 1. □

Функция $g(x)$ в утверждении 1 теоремы 1 и в ее следствии, с помощью которой устанавливается сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, называется *функцией сравнения*. Если, в частности, $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in [a, b)$, то говорят также, что $f(x)$ мажорируется функцией $g(x)$ или что $g(x)$ служит *мажорантой* для $f(x)$.

Эффективность использования критерия сравнения для решения вопроса о сходимости интеграла зависит, конечно, от запаса функций сравнения, о которых известно, сходится или расходится несобственный интеграл от них, взятый по рассматриваемому промежутку, и которые, тем самым, можно пытаться использовать для исследования сходимости данного интеграла. Заметим, что утверждение, аналогичное теореме 1, справедливо, конечно, и для несобственных интегралов типа (33.6).

В качестве функций сравнения $g(x)$ часто достаточно брать степенные функции. Именно, в случае конечных промежутков $[a, b)$ и $(a, b]$ берутся, соответственно, функции $g(x)=\frac{1}{(b-x)^\alpha}$ и $g(x)=\frac{1}{(x-a)^\alpha}$, интегралы от которых $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ сходятся при $\alpha < 1$ и расходятся при $\alpha \geqslant 1$ (в этом легко убедиться, сведя указанные интегралы линейной заменой переменной к интегралам $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, рассмотренным в п. 33.1). В случае же бесконечных промежутков $[a, +\infty)$ и $(-\infty, b]$ за функции сравнения берутся, соответственно, $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ и $g(x)=\frac{1}{|x|^\alpha}$, интегралы от которых $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ и $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{|x|^\alpha}$ сходятся при $\alpha > 1$ и расходятся при $\alpha \leqslant 1$ (см. примеры в п. 33.1).

Отметим еще, что, очевидным образом, все сформулированные признаки сходимости и расходимости интегралов остаются в силе (с очевидными изменениями), если в них условие неотрицательности функции f заменить условием ее неположительности (это следует из того, что интеграл $\int\limits_a^b (-f(x))\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$).

Примеры. 1. Интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx \qquad (33.20)$$

сходится. В самом деле, обозначая через f подынтегральную функцию $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ и беря в качестве функции сравнения

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}, \text{ здесь } \alpha=\frac{1}{3},$$

имеем

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1-0}\sqrt[3]{1-x}\frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

поэтому, согласно следствию из теоремы 1, интеграл (33.20) сходится.

2. Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{1-x^2}dx$ расходится. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять в качестве функции сравнения $g(x)=\frac{1}{1-x}$, здесь $\alpha=1$.

В рассмотренных примерах выбор показателя α у функции сравнения можно было сделать сразу, исходя из конкретного вида заданной подынтегральной функции. Иногда, когда такой выбор сразу не ясен, приходится предварительно проделывать некоторые дополнительные исследования, например, попытаться выделить ее главную часть, прибегнув к формуле Тейлора. Рассмотрим подобные примеры.

3. Интеграл

$$\int\limits_0^1 \ln x\,dx \tag{33.21}$$

сходится. Действительно, по правилу Лопиталя при любом $\alpha>0$, в частности при $0<\alpha<1$, имеем

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^\alpha}}=\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=$$

$$=-\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to+0}x^\alpha=0,$$

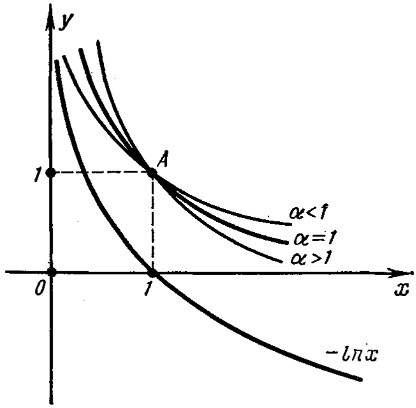

Рис. 133

поэтому, согласно следствию из теоремы 1 (точнее, его аналогу для неположительных функций), интеграл (33.21) сходится.

Геометрически сходимость и расходимость интегралов (33.9), (33.10) и (33.21) означает конечность или бесконечность площадей соответствующих «бесконечных криволинейных трапеций», сравнительное расположение которых изображено на рис. 133.

4. Для выяснения вопроса о сходимости интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{\ln x} \tag{33.22}$$

заметим, что $\ln x = \ln[1+(x-1)] \sim x-1$ при $x \to 1$, и возьмем за функцию сравнения $g(x) = \frac{1}{x-1}$, $(\alpha = 1)$. Тогда $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x}{\ln x} = -1$, и, следовательно, интеграл (33.22) расходится.

5. Интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+1}}\,dx \tag{33.23}$$

сходится. Действительно, возьмем $\alpha = \frac{3}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тогда, применив снова правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}-\varepsilon}\ln x}{\sqrt{x^3+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^3+1}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon} = 0.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\frac{3}{2} - \varepsilon > 1$; в этом случае интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2-\varepsilon}}$ сходится, а потому, в силу следствия из теоремы 1, сходится и интеграл (33.23).

6. Исследуем сходимость интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p}\,dx. \tag{33.24}$$

Здесь подынтегральная функция всюду отрицательна. Очевидно, интеграл (33.24) сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int_1^{+\infty} \left(-\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p}\right) dx, \tag{33.25}$$

у которого подынтегральная функция всюду положительна. Разложив функцию $\ln\cos\frac{1}{x}$ по формуле Тейлора, получим

$$-\ln\cos\frac{1}{x} = -\frac{\ln\left[1-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]}{x^p} =$$

$$= -\frac{-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^p} = \frac{1}{2x^{2+p}} + o\left(\frac{1}{x^{2+p}}\right), \quad x \to +\infty.$$

Таким образом, $-\dfrac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p} \sim \dfrac{1}{2x^{2+p}}$ при $x \to +\infty$ и, следовательно, интеграл (33.24) сходится при $2+p>1$, т. е. при $p>-1$, и расходится при $p \leqslant -1$.

В примерах 2 и 3 сходимость рассмотренных там интегралов можно было бы установить, вычислив их по формуле Ньютона — Лейбница. Однако, выяснение сходимости интегралов с помощью признака сравнения обычно требует меньше вычислений, чем посредством предварительного их нахождения по формуле Ньютона — Лейбница. Важно отметить, что используя признак сравнения, можно выяснить сходимость интегралов, конечно, и в случае, когда первообразная подынтегральной функции не является элементарной, и, следовательно, обычным приемом, с помощью формулы Ньютона — Лейбница, интеграл заведомо не вычисляется, как это было в примерах 4 и 5.

Подчеркнем еще раз, что признак сравнения для выяснения вопроса о сходимости несобственного интеграла можно применять только для функций, не меняющих знака. Возникает вопрос: как выяснить, сходится или расходится несобственный интеграл в случае, когда подынтегральная функция меняет знак? В следующих пунктах мы и займемся изучением этого вопроса.

33.4. КРИТЕРИЙ КОШИ СХОДИМОСТИ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Теорема 2. *Для сходимости интеграла* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *существовало такое число* $\eta=\eta(\varepsilon)$, $a \leqslant \eta < b$, *что если* $\eta<\eta'<b$, $\eta<\eta''<b$, *то*

$$\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon. \qquad (33.26)$$

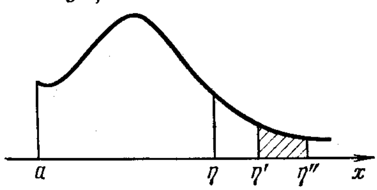

Рис. 134

Доказательство. Положим $\varphi(\eta)=\int\limits_a^{\eta} f(x)\,dx$, $a \leqslant \eta < b \leqslant +\infty$. Тогда сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, т. е. существование предела (33.1), означает существование предела $\lim\limits_{\eta\to b}\varphi(\eta)$.

В силу же критерия Коши для наличия конечного предела функции $\varphi(\eta)$ при $\eta \to b$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовала такая левосторонняя проколотая окрестность $\mathring{U}(b;\ \eta)=\{x: \eta<x<b\}$ точки b, т. е. существовало такое число η_0,

$a \leqslant \eta < b$, что для всех $\eta' \in \mathring{U}(b;\ \eta)$ и $\eta'' \in \mathring{U}(b;\ \eta)$ (что равносильно условию: $\eta < \eta' < b$, $\eta < \eta'' < b$) выполнялось бы неравенство

$$|\varphi(\eta'') - \varphi(\eta')| < \varepsilon. \tag{33.27}$$

Поскольку

$$\varphi(\eta'') - \varphi(\eta') = \int_a^{\eta''} f(x)\,dx - \int_a^{\eta''} f(x)\,dx = \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx,$$

то неравенство (33.27) равносильно условию (33.26) (рис. 134). $\square$

Теорема 2 называется *критерием Коши сходимости интеграла.*

33.5. АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИЕСЯ ИНТЕГРАЛЫ

Важным понятием для несобственных интегралов от функций, меняющих знак, является понятие абсолютно сходящегося интеграла.

Определение 2. *Несобственный интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл* $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Функции, для которых интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ абсолютно сходится называются абсолютно интегрируемыми (в несобственном смысле) на промежутке с концами a и b. В случае, когда a и b конечны, говорят также, что функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[a,\ b]$.

Из теоремы 2 непосредственно следует критерий абсолютной сходимости интеграла.

Теорема 3. *Для того чтобы интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое* $\eta = \eta(\varepsilon)$, *что если* $\eta < \eta' < b$ и $\eta < \eta'' < b$, *то*

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\,dx \right| < \varepsilon.$$

Эта теорема называется *критерием Коши абсолютной сходимости интеграла.*

Напомним, что, как всегда, здесь предполагается, что функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,\ \eta]$, где $a \leqslant \eta < b$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.

Признак сходимости интегралов от неотрицательных функций, очевидно, применим также и для выяснения абсолютной сходимости интегралов. Пусть, например, требуется выяснить: сходится или нет интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx. \tag{33.28}$$

Поскольку $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$, и интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то согласно признаку сравнения сходится и интеграл $\int_{1}^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$, т. е. интеграл (33.28) абсолютно сходится.

Важная связь между сходимостью и абсолютной сходимостью интегралов устанавливается следующей теоремой.

Теорема 4. *Если интеграл абсолютно сходится, то он и просто сходится.*

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Если интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ абсолютно сходится, то в силу критерия Коши абсолютной сходимости интеграла (см. теорему 3) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta = \eta(\varepsilon)$, что если $\eta < \eta' < b$, $\eta < \eta'' < b$, то

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\,dx \right| < \varepsilon. \tag{33.29}$$

Поскольку $\left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx \right| \leqslant \left| \int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\,dx \right|$, то в силу неравенства (33.29) для любых указанных η' и η'' имеем

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon,$$

поэтому в силу критерия Коши сходимости интегралов (см. теорему 2) интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится. $\square$

Упражнение 10. Если несобственный интеграл от функции, определенной на отрезке абсолютно сходится, то он и просто сходится. Интеграл Римана является частным случаем несобственного интеграла. Следовательно, если существует интеграл Римана от абсолютной величины функции, то существует и интеграл Римана от самой функции. Это неверно (привести соответствующий пример!). Где ошибка в проведенном рассуждении?

Существенно отметить, что интеграл может сходиться, но не сходиться абсолютно. В качестве примера рассмотрим интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \tag{33.30}$$

Прежде всего, заметим, что поскольку $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то подынтегральная функция, доопределенная единицей при $x = 0$, будет непрерывной на полупрямой $x \geqslant 0$ и, значит, интегрируемой, по Риману на любом отрезке $[0, \eta]$, в частности — на отрезке $[0, 1]$. Поэтому вопрос о сходимости, соответственно абсолютной сходимости, интеграла (33.30) эквивалентен вопросу о сходимости, соответственно абсолютной сходимости, интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \tag{33.31}$$

Для исследования его сходимости выполним интегрирование по частям:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} d(\cos x) =$$

$$= -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \cos x d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

В правой части получился интеграл (33.28), который, как известно, абсолютно, а значит и просто, сходится.

Таким образом, оба получившихся выражения в правой части имеют смысл, и следовательно, конечны. Поэтому, во-первых, проделанное интегрирование по частям законно, а во-вторых, левая часть также конечна, т. е. интеграл (33.31) сходится.

Заметим, что в результате интегрирования по частям мы заменили интеграл (33.31) суммой некоторого конечного выражения и другого несобственного интеграла, у которого в знаменателе подынтегрального выражения стоит более высокая степень переменной интегрирования, чем в (33.31), а в числителе — ограниченная, как в (33.31), функция. В получившемся интеграле подынтегральная функция быстрее стремится к нулю, чем в исходном, в том смысле, что

$$\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ при } x \to \infty.$$

Поэтому его сходимость оказалось легче непосредственно исследовать, чем сходимость исходного интеграла: он оказался даже не просто сходящимся, а абсолютно сходящимся.

Метод, позволяющий свести исследование сходимости данного интеграла к исследованию сходимости другого интеграла, который в каком-то смысле «лучше сходится», чем данный, называется *методом улучшения сходимости.*

Покажем теперь, что интеграл (33.31) не сходится абсолютно, т. е. что интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \tag{33.32}$$

расходится. Действительно, из неравенства

$$|\sin x| \geqslant \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

при любом $\eta > 1$ имеем:

$$\int_1^{\eta} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \frac{1}{2}\int_1^{\eta}\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^{\eta}\frac{\cos 2x}{x}\,dx. \tag{33.33}$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ расходится и равен $+\infty$. Интеграл же $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,dx$ сходится. Чтобы в этом убедиться, проинтегрируем его по частям:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,d(\sin 2x) = \frac{\sin 2x}{2x}\Big|_1^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\sin 2x\,d\left(\frac{1}{x}\right) =$$
$$= \frac{\sin 2}{2} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}\,dx.$$

В силу этой формулы сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,dx$ непосредственно следует из абсолютной сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}\,dx$, которая в свою очередь вытекает из очевидного неравенства

$$\left|\frac{\sin 2x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

Перейдя теперь к пределу при $\eta \to +\infty$ в неравенстве (33.33), получаем, что правая, а следовательно, и левая части этого неравенства стремятся к $+\infty$ и потому интеграл (33.32) расходится.

Таким образом, интеграл (33.31), значит, и интеграл (33.30) не сходятся абсолютно.

Докажем еще одно полезное для дальнейшего вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Если функция f абсолютно интегрируема, а функция g интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то их произведение gf также абсолютно интегрируемо на $[a, b]$.*

Доказательство. Как было договорено выше, рассматриваются только такие функции f, которые при любом $\eta \in [a, b)$ интегрируемы по Риману на отрезке $[a, \eta]$. Поскольку по условию функция g интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема по Риману и на всяком отрезке $[a, \eta]$, $\eta \in \in [a, b)$ (см. свойство 2 в п. 28.1). Поэтому произведение gf также интегрируемо по Риману на любом указанном отрезке $[a, \eta]$ (см. свойство 6 в п. 28.1). Это означает, что имеет смысл рассмотрение несобственного интеграла $\int\limits_a^b g(x) f(x)\, dx$.

В силу интегрируемости по Риману функции g на отрезке $[a, b]$, она ограничена на нем, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|g(x)| \leqslant M$. Следовательно, для всех $x \in [a, b)$ справедливо и неравенство $|g(x) f(x)| \leqslant M |f(x)|$. Заметив, что, в силу абсолютной интегрируемости функции f на отрезке $[a, b]$ интеграл $\int\limits_a^b M |f(x)|\, dx = M \int\limits_a^b |f(x)|\, dx$ сходится, получим по признаку сравнения, что сходится и интеграл $\int\limits_a^b |g(x) f(x)|\, dx$, т. е., что произведение gf абсолютно интегрируемо на отрезке $[a, b]$. $\square$

Все сказанное в этом пункте естественным образом переносится и на несобственные интегралы других видов, рассмотренных в п. 33.1, т. е. на интегралы вида (33.6), а также на интегралы общего типа (33.8).

33.6. ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛОВ

Докажем один достаточный признак сходимости интегралов, называемый обычно *признаком Дирихле.*

Теорема 5 (признак Дирихле). *Пусть*

1) *функция f непрерывна и имеет ограниченную первообразную F при $x \geqslant a$;*

2) *функция g непрерывно дифференцируема и убывает при $x \geqslant a$;*

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$;

тогда интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x) g(x)\, dx \tag{33.34}$$

сходится.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу сделанных предположений функция fg непрерывна, а значит, и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, b]$, $a<b<+\infty$, и поэтому имеет смысл говорить о несобственном интеграле (33.34).

Проинтегрировав по частям произведение $f(x)g(x)$ на отрезке $[a, b]$, получим:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dF(x)=g(x)F(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)g'(x)\,dx. \qquad (33.35)$$

Исследуем поведение обоих слагаемых правой части при $b\to+\infty$. В силу ограниченности функции F (см. условие 1 теоремы)

$$M=\sup|F(x)|<+\infty, \text{ поэтому } |g(b)F(b)|\leqslant Mg(b).$$

В силу же условия 3 теоремы $\lim\limits_{b\to+\infty} g(b)F(b)=0$.

Далее, из монотонного убывания функции g следует, что $g'(x)\leqslant 0$ при $x\geqslant a$ и поэтому

$$\int_a^b |F(x)g'(x)|\,dx\leqslant M\int_a^b |g'(x)|\,dx=$$
$$=-M\int_a^b g'(x)\,dx=M[g(a)-g(b)]\leqslant Mg(a),$$

ибо из условий 2 и 3 теоремы следует, что $g(x)\geqslant 0$, в частности, что $g(b)\geqslant 0$.

Таким образом, интегралы $\int_a^b |F(x)g'(x)|\,dx$ ограничены в совокупности при всех $b>a$, и поэтому интеграл

$$\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)\,dx$$

абсолютно, а значит, и просто сходится, т. е. существует конечный предел

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b F(x)g'(x)\,dx.$$

Мы доказали, что в правой части равенства (33.35) оба слагаемых при $b\to+\infty$ имеют конечный предел, а значит, и предел левой части при $b\to+\infty$ конечен, что означает сходимость интеграла (33.34). $\square$

Примеры 1. Применим признак Дирихле к исследованию сходимости интеграла

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx, \qquad \alpha>0, \qquad (33.36)$$

Функция $f(x)=\sin x$ имеет ограниченную первообразную $F(x)=-\cos x$, а непрерывно дифференцируемая функция $g(x)=1/x^{\alpha}$ при $\alpha>0$ монотонно убывает и стремится к нулю при $x\to+\infty$. Все условия теоремы 5 выполнены, поэтому интеграл (33.36) сходится.

2. Следует, однако, иметь в виду, что признак Дирихле дает только достаточные, а не необходимые условия сходимости интеграла; поэтому не всегда с помощью его можно решить вопрос о сходимости интеграла. Например, исследуем сходимость интеграла

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{x^{\alpha}-\sin x},\qquad \alpha>0. \tag{33.37}$$

Попытаемся применить признак Дирихле, положив $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\frac{1}{x^{\alpha}-\sin x}$. Очевидно, что $g(x)\to 0$ при $x\to+\infty$. Найдем производную:

$$g'(x)=\frac{-\alpha x^{\alpha-1}+\cos x}{(x^{\alpha}-\sin x)^2}.$$

Отсюда видно, что при $\alpha<1$ эта производная при $x\to+\infty$ бесконечно много раз меняет знак и, следовательно, сама функция $g(x)$ не является монотонно убывающей функцией.

Таким образом, при $\alpha<1$ признак Дирихле не применим указанным способом к выяснению вопроса о сходимости интеграла (33.37). В этом случае естественно попробовать прибегнуть снова к методу выделения главной части.

Применяя разложение функции $(1-t)^{-1}$, $-1<t<1$, по формуле Тейлора (см. п. 13.3), получим, при $x\to+\infty$

$$\frac{\sin x}{x^{\alpha}-\sin x}=\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\frac{1}{1-\frac{\sin x}{x^{\alpha}}}=\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\left[1+\frac{\sin x}{x^{\alpha}}+o\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right)\right]=$$

$$=\frac{\sin x}{x^{\alpha}}+\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)=\frac{\sin x}{x^{\alpha}}+\frac{1}{2x^{2\alpha}}-\frac{\cos 2x}{2x^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right). \tag{33.38}$$

Интегралы

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\,dx \quad\text{и}\quad \int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^{2\alpha}}\,dx \tag{33.39}$$

сходятся по признаку Дирихле при всех $\alpha>0$. Интеграл же

$$\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{2x^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)\right]dx \tag{33.40}$$

сходится при $2\alpha>1$, т. е. при $\alpha>\frac{1}{2}$, и расходится при $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$.

Действительно, из формулы (33.38) следует, что функция $o(1/x^{2\alpha})$ в указанной формуле непрерывна по x при $x \geqslant 1$, $\alpha > 0$, и, следовательно, имеет смысл говорить об интеграле (33.40). Функции $\frac{1}{2x^{2\alpha}}$ и $\frac{1}{2x^{2\alpha}} + o(1/x^{2\alpha})$ неотрицательны в некоторой окрестности $+\infty$ и эквивалентны при $x \to +\infty$, поэтому интеграл (33.40) сходится и расходится при тех же значениях параметра α, что и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\alpha}}$ (см. следствие из теоремы 1 в п. 33.3).

Таким образом, при $\alpha > \frac{1}{2}$ все интегралы (33.39) и (33.40) сходятся, а значит, в силу (33.38) сходится и интеграл (33.37). При $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ интегралы (33.39) сходятся, а интеграл (33.40) расходится, следовательно, расходится и интеграл (33.37).

Заметим, что при $\alpha \leqslant 0$ интеграл (33.37) расходится. Действительно, в этом случае знаменатель подынтегральной функции обращается в ноль бесконечно много раз; причем, если $x_0^\alpha - \sin x_0 = 0$, то функция $x^\alpha - \sin x$ в окрестности точки x_0, согласно формуле Тейлора, имеет вид (почему?) $x^\alpha - \sin x = (x - x_0)^k \varphi(x)$, где k — некоторое натуральное число, а $\varphi(x_0) \neq 0$. Поскольку $\sin x_0 \neq 0$, то в каждой подобной точке x_0 мы имеем неинтегрируемую особенность.

Следует обратить внимание на то, что для каждого фиксированного $\alpha > 0$ функции

$$\frac{\sin x}{x^\alpha - \sin x} \quad \text{и} \quad \frac{\sin x}{x^\alpha}$$

эквивалентны при $x \to +\infty$, т. е.

$$\frac{\sin x}{x^\alpha} = \varepsilon(x) \frac{\sin x}{x^\alpha - \sin x},$$

где $\varepsilon(x) = 1 - \frac{\sin x}{x^\alpha} \to 1$ при $x \to +\infty$, однако если $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, то интеграл (33.37) от первой из них расходится, а интеграл (33.36) от второй из них сходится.

Таким образом, замена подынтегральной функции на эквивалентную может изменить сходимость интеграла (если, конечно, интеграл не сходится абсолютно).

3. Исследуем на сходимость и абсолютную сходимость интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\sin x}{x}\right) dx. \tag{33.41}$$

Поскольку $\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right| \sim \frac{|\sin x|}{x}$ при $x \to +\infty$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$

расходится (см. (33.32)), то расходится и интеграл

$$\int_1^{+\infty} \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\sin x}{x}\right) \right| dx,$$

т. е. интеграл (33.41) не сходится абсолютно.

Легко проверить, что при $y \to 0$

$$\operatorname{tg} y = y + O(y^3), \tag{33.42}$$

причем в качестве окрестности, участвующей в определении символа O (см. определение 1 в п. 8.2), здесь можно взять интервал $(-1, 1)$: существует такая постоянная $c > 0$, что

$$|O(y^3)| \leqslant c|y|^3, \qquad |y| < 1.$$

Далее, в силу формулы (33.42) при $y = \frac{\sin x}{x}$ интеграл (33.41) можно представить в виде

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\sin x}{x}\right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^{+\infty} O\left(\frac{1}{x^3}\right) dx. \tag{33.43}$$

Поскольку интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится (например, по признаку Дирихле), а интеграл $\int_1^{+\infty} O\left(\frac{1}{x^3}\right)$ абсолютно сходится, то интеграл (33.41) — сходящийся.

Упражнения. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость следующие интегралы:

11. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{x^4 + x^2 + 1}$.

12. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

13. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$.

14. $\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$.

15. $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\, dx$.

16. $\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x^{10}}\, dx$.

17. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\, dx$.

18. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$.

19. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

20. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

21. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2\,dx.$

22. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{1+x}}\,dx.$

23. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{\alpha} x\,dx, \quad -\infty<\alpha<+\infty.$

24. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+(\ln x)^p}, \; -\infty<p<+\infty.$

25. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}}\,dx.$

26. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+\cos x)^{\alpha}}\,dx.$

27. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx.$

§ 34*. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Часто при решении задач оказывается необходимым не только установить сходимость или расходимость рассматриваемого интеграла, но и уметь оценить в определенном смысле порядок «скорости» его сходимости или характер расходимости. Мы не будем здесь доказывать каких-либо общих теорем, относящихся к этому вопросу (о некоторых общих методах изучения асимптотического поведения функций см. в п. 37.10*), и формулировать определение скорости сходимости, а лишь проиллюстрируем его на отдельных примерах нахождения порядка убывания сходящихся и роста расходящихся интегралов с переменными пределами интегрирования.

Примеры. 1. Исследуем интеграл

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^{\beta} t} \tag{34.1}$$

при различных действительных значениях параметров α и β. Рассмотрим сначала случай $\alpha>0$ и любого $\beta\in\boldsymbol{R}$. При таких значениях параметров интеграл (34.1) сходится, что легко устанавливается по признаку сравнения, если в качестве функции сравнения взять, например, функцию $g(t)=t^{-\frac{\alpha}{2}-1}$, интеграл от которой $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dt}{t^{\frac{\alpha}{2}+1}}$ сходится.

В силу сходимости интеграла (34.1) при указанных значениях параметров α и β в равенстве $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^{\beta} t}=\int\limits_{2}^{x}\frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^{\beta} t}+\int\limits_{x}^{+\infty}\frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^{\beta} t}$ второе слагаемое его правой части стремится к 0 при $x\to\infty$.