21. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2\, dx.$

22. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{1+x}}\, dx.$

23. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^\alpha x\, dx, \quad -\infty<\alpha<+\infty.$

24. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+(\ln x)^p}, \quad -\infty<p<+\infty.$

25. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}}\, dx.$

26. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+\cos x)^\alpha}\, dx.$

27. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\, dx.$

§ 34*. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Часто при решении задач оказывается необходимым не только установить сходимость или расходимость рассматриваемого интеграла, но и уметь оценить в определенном смысле порядок «скорости» его сходимости или характер расходимости. Мы не будем здесь доказывать каких-либо общих теорем, относящихся к этому вопросу (о некоторых общих методах изучения асимптотического поведения функций см. в п. 37.10*), и формулировать определение скорости сходимости, а лишь проиллюстрируем его на отдельных примерах нахождения порядка убывания сходящихся и роста расходящихся интегралов с переменными пределами интегрирования.

Примеры. 1. Исследуем интеграл

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t} \tag{34.1}$$

при различных действительных значениях параметров α и β. Рассмотрим сначала случай $\alpha>0$ и любого $\beta\in \boldsymbol{R}$. При таких значениях параметров интеграл (34.1) сходится, что легко устанавливается по признаку сравнения, если в качестве функции сравнения взять, например, функцию $g(t)=t^{-\frac{\alpha}{2}-1}$, интеграл от которой $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{\alpha}{2}+1}}$ сходится.

В силу сходимости интеграла (34.1) при указанных значениях параметров α и β в равенстве $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t}=\int\limits_2^{x} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t}+\int\limits_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t}$ второе слагаемое его правой части стремится к 0 при $x\to\infty$.

Изучим порядок его убывания, а именно, покажем справедливость асимптотического равенства

$$\int\limits_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t} \sim \frac{1}{\alpha x^\alpha \ln^\beta x}, \quad x \to +\infty. \tag{34.2}$$

Для доказательства положим

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t}, \quad \Phi(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\alpha x^\alpha \ln^\beta x}.$$

В силу сходимости интеграла (34.1) при $\alpha > 0$, $\beta \in \boldsymbol{R}$, имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$. Очевидно и $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 0$. Поскольку

$$F'(x) = -\frac{1}{x^{\alpha+1}\ln^\beta x}, \quad \Phi'(x) = -\frac{1}{x^{\alpha+1}\ln^\beta x} - \frac{1}{\alpha x^{\alpha+1}\ln^{\beta+1} x},$$

то, применив правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Phi(x)}{F(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\Phi'(x)}{F'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha \ln x}\right) = 1,$$

т. е. соотношение (34.2) доказано.

В случае $\alpha = 0$, $\beta > 1$ непосредственным интегрированием получим даже явное выражение интересующего нас интеграла:

$$\int\limits_x^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^\beta t} = \int\limits_x^{+\infty} \frac{d\ln t}{\ln^\beta t} = \frac{1}{(1-\beta)\ln^{\beta-1} t}\Bigg|_x^{+\infty} = \frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1} x}. \tag{34.3}$$

Покажем теперь, что для $\alpha < 0$ и любого $\beta \in \boldsymbol{R}$ интеграл (34.1) расходится и, более того, имеет место асимптотическое равенство

$$\int\limits_2^x \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t} \sim -\frac{1}{\alpha x^\alpha \ln^\beta x}, \quad x \to +\infty. \tag{34.4}$$

Положив в этом случае

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_2^x \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t}, \quad \Phi(x) \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{\alpha x^\alpha \ln^\beta x},$$

и применив правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Phi(x)}{F(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\Phi'(x)}{F'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha \ln x}\right) = 1,$$

т. е. равенство (34.4) доказано.

Для оставшихся значений параметров α и β интеграл

$$\int\limits_2^x \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t} \tag{34.5}$$

вычисляется в элементарных функциях. Если $\alpha=0$ и $\beta<1$, то

$$\int_2^x \frac{dt}{t\ln^\beta t}=\int_2^x \frac{d\ln t}{\ln^\beta t}=\frac{1}{(1-\beta)\ln^{\beta-1} t}\Big|_2^x=\frac{\ln^{1-\beta} x-\ln^{1-\beta} 2}{1-\beta},$$

а если $\alpha=0$, $\beta=1$, то

$$\int_2^x \frac{dt}{t\ln t}=\int_2^x \frac{d\ln t}{\ln t}=\ln\ln t\Big|_2^x=\ln\frac{\ln x}{\ln 2}.$$

Итак, интеграл (34.1) сходится при $\alpha>0$ любом $\beta\in\boldsymbol{R}$, а также при $\alpha=0$ и $\beta>1$; при этом установлены асимптотическое, соответственно точное, равенства (34.2) и (34.3) для интеграла $\int\limits_x^{+\infty}\frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t}$. При остальных значениях параметров α и β интеграл (34.1) расходится и получена асимптотическая или точная характеристика интеграла (34.5).

2. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t}\,dt.$$

Покажем, что он расходится и что имеет место асимптотическое равенство

$$\int_0^x \frac{\sin^2 t}{t}\,dt \asymp \ln x,\qquad x\to+\infty \tag{34.6}$$

т. е. функции в левой и правой частях этой формулы одного порядка (см. п. 8.2).

С одной стороны, принимая во внимание неравенство $|\sin t|\leqslant\leqslant|t|$, получим при $x>\pi/2$,

$$\int_0^x \frac{\sin^2 t}{t}\,dt=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 t}{t}\,dt+\int_{\pi/2}^x \frac{\sin^2 t}{t}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{\pi/2} t\,dt+\int_{\pi/2}^x\frac{dt}{t}=\frac{\pi^2}{8}+\ln x-\ln\frac{\pi}{2}=O(\ln x),\quad x\to+\infty. \tag{34.7}$$

С другой стороны, для любого натурального n имеем

$$\int_0^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 t}{t}\,dt=\sum_{k=0}^{n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin^2 t}{t}\,dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 u}{u+k\pi}\,du\geqslant\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\int_0^{\pi}\sin^2 u\,du=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}.$$

В дальнейшем (см. п. 35.7) независимо от содержания настоящего пункта будет показано, что

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} = O(\ln n), \qquad n \to \infty.$$

Таким образом,

$$\int_0^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t}\, dt \geqslant O(\ln n), \qquad n \to \infty.$$

Это означает, что существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ имеет место неравенство

$$\int_0^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t}\, dt \geqslant c \ln n. \tag{34.8}$$

Заметим еще, что из легко проверяемого, например с помощью правила Лопиталя соотношения

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{\ln (n+2)\pi} = 1$$

следует существование такого натурального n_0, что при $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство

$$\frac{\ln n}{\ln (n+2)\pi} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{34.9}$$

Далее, для каждого $x > 0$ найдется такое целое n, что

$$(n+1)\pi \leqslant x < (n+2)\pi.$$

Теперь для любого $x \geqslant n_0$ согласно неравенствам (34.8) и (34.9) получим

$$\int_0^x \frac{\sin^2 t}{t}\, dt \geqslant \int_0^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t}\, dt \geqslant c \ln n = c \frac{\ln n}{\ln (n+2)\pi} \ln (n+2)\pi \geqslant \frac{c}{2} \ln x,$$

т. е.

$$\int_0^x \frac{\sin^2 t}{t}\, dt \geqslant O(\ln x), \qquad x \to +\infty. \tag{34.10}$$

Из (34.7) и (34.10) непосредственно следует (34.6).

В рассмотренных примерах асимптотическое поведение интегралов было установлено с помощью более или менее специальных методов, оказавшихся удобными в рассмотренных конкретных случаях. Более общим методом, дающим часто возможность находить асимптотическое поведение интегралов, является обычное интегрирование по частям.

3. Рассмотрим в качестве примера так называемые **интегралы Френеля** *.

$$\int_0^\infty \cos\theta^2\,d\theta, \qquad \int_0^\infty \sin\theta^2\,d\theta,$$

скорость сходимости которых определяется порядком убывания интегралов.

$$\int_x^{+\infty} \cos\theta^2\,d\theta, \qquad \int_x^{+\infty} \sin\theta^2\,d\theta, \qquad x>0. \tag{34.11}$$

Изучение асимптотического поведения интегралов (34.11) при $x\to+\infty$ проводится одинаковым методом. Поэтому рассмотрим только один из них, например, первый. Сделав в нем замену переменной $\theta^2=t$, сразу убеждаемся по признаку Дирихле, что он сходится. Затем дважды проинтегрировав по частям получившийся интеграл, будем иметь

$$\int_x^{+\infty} \cos\theta^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{x^2}^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt=\frac{1}{2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\cdot\Big|_{x^2}^{+\infty}+\frac{1}{4}\int_{x^2}^{+\infty}\frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\,dt=$$

$$=-\frac{\sin x^2}{2x}+\frac{1}{4}\int_{x^2}^{+\infty}\frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\,dt=-\frac{\sin x^2}{2x}+\frac{\cos x^2}{4x^3}-\frac{3}{8}\int_{x^2}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2\sqrt{t}}\,dt \tag{34.12}$$

(согласно прежней терминологии, см. п. 33.5, мы посредством интегрирования по частям улучшили сходимость интеграла).

Поскольку $\frac{\cos x^2}{4x^3}=O\left(\frac{1}{x^3}\right)$, $x\to\infty$, и

$$\left|\int_{x^2}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2\sqrt{t}}\,dt\right|\leqslant\int_{x^2}^{+\infty}\frac{dt}{t^2\sqrt{t}}=-\frac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}\Big|_{x^2}^{+\infty}=\frac{2}{3x^3},$$

то будем иметь

$$\int_{x^2}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2\sqrt{t}}\,dt=O\left(\frac{1}{x^3}\right), \qquad x\to+\infty.$$

Следовательно,

$$\int_x^{+\infty}\cos\theta^2\,d\theta=-\frac{\sin x^2}{2x}+O\left(\frac{1}{x^3}\right), \qquad x\to+\infty.$$

Таким образом, нам удалось с точностью до $O\left(\frac{1}{x^3}\right)$, $x\to+\infty$, найти простое выражение для интеграла $\int_x^{+\infty}\cos\theta^2\,d\theta$, дающее,

* А. Френель (1788—1827) — французский физик.

в частности, представление о характере его убывания при $x \to +\infty$. Если произвести дальнейшее интегрирование по частям интеграла, стоящего в правой части формулы (34.11), то можно получить асимптотические формулы для интеграла $\int\limits_x^{+\infty} \cos\theta^2\,d\theta$ с точностью до $O\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$, $x \to +\infty$, при любом натуральном n.

Упражнения. Исследовать скорость сходимости (расходимости) следующих интегралов при различных действительных значениях параметров α и β:

1. $\int\limits_0^{\infty} e^{-2\alpha t - t^2} t^{\beta-1}\,dt$.

2. $\int\limits_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + \alpha t\right) dt$.

3. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{t^2(\alpha + \ln t)^{1/3}}$.

4. Доказать, что $\int\limits_0^x \frac{\sin^2 t}{t}\,dt \sim \frac{1}{2}\ln x$ при $x \to +\infty$ (см. пример 2).

Указание. Воспользоваться тождеством $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$.