

Если последовательность частичных сумм ряда (35.1) сходится, то он называется *сходящимся рядом*, а если она расходится, то *расходящимся*.

Определение 2. Ряд, членами которого являются члены ряда (35.1), начиная с $(n+1)$ -го взятые в том же порядке, что и в исходном ряде, называется *n -м остатком ряда (35.1)* и обозначается через

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \text{ или } u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

Определение 3. Если ряд (35.1) сходится, то предел

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

называется его суммой.

В этом случае пишут

$$s = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

или

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \quad (35.3)$$

Таким образом, мы будем употреблять один и тот же символ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ как для обозначения самого ряда (35.1), так и для обозначения его суммы, если он сходится.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, или $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$, или $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$, то соответственно пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} u_n = -\infty.$$

Итак, каждый ряд является парой двух последовательностей, таких, что первая может быть взята произвольной (последовательность членов ряда), а вторая составлена определенным образом из членов первой (последовательность частичных сумм членов ряда). Однако ряд однозначно определяется каждой из этих последовательностей. Действительно, если задана последовательность членов u_n ряда, то члены последовательности его частичных сумм находятся согласно определению 1 по формулам $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, $n = 1, 2, \dots$. Если же задана последовательность $\{s_n\}$ частичных сумм ряда, то его члены определяются по формулам $u_1 = s_1$, $u_n = s_n - s_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$. Отсюда следует, что для всякой последовательности всегда можно найти такой ряд, что она будет последовательностью его частичных сумм.

Действительно, пусть дана последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$. Положим

$$u_1 = z_1, \quad u_2 = z_2 - z_1, \quad \dots, \quad u_n = z_n - z_{n-1}, \quad \dots$$

и рассмотрим ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Тогда для его частичных сумм имеем:

$$\begin{aligned} s_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n = \\ &= z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \dots + (z_n - z_{n-1}) = z_n. \end{aligned}$$

Это означает, что рассмотрение рядов эквивалентно рассмотрению последовательностей. Всякий вопрос, сформулированный в терминах рядов, можно перефразировать в вопрос, сформулированный в терминах последовательностей и наоборот. Например, задача изучения сходимости рядов равносильна задаче изучения сходимости последовательностей.

Подчеркнем, что всюду, где не оговорено противное, члены рассматриваемых рядов подразумеваются комплексными.

Если n -й остаток ряда (35.1) (см. определение 2) сходится, то его сумму будем обозначать через r_n :

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k, \quad (35.4)$$

и называть для краткости просто *остатком ряда*.

Всякую сумму конечного числа слагаемых

$$s_{n_0} = u_1 + u_2 + \dots + u_{n_0}$$

можно рассматривать как ряд, добавив к ней члены

$$u_{n_0+1} = u_{n_0+2} = \dots = 0.$$

Сумма получившегося ряда, очевидно, будет совпадать с заданной суммой, ибо при всех $n \geq n_0$ его частичные суммы равны s_{n_0} .

Если заранее неизвестно, содержит ли сумма конечное или бесконечное число слагаемых, то иногда удобно в обоих случаях называть ее рядом, считая, что конечная сумма является рядом в вышеуказанном смысле.

Отметим одно существенное свойство сходящихся рядов.

Теорема 1 (необходимое условие сходимости ряда). Если ряд (35.1) сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0. \quad (35.5)$$

Доказательство. Если ряд (35.1) сходится, то последовательности его частичных сумм s_n , $n=1, 2, \dots$, и s_{n-1} , $n=2, 3, \dots$,

очевидно имеют один и тот же предел, равный сумме s этого ряда. Поэтому, замечая, что $u_n = s_n - s_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = 0. \quad \square$$

С помощью теоремы 1 иногда удается установить расходимость рассматриваемого ряда: *если для данного ряда условие (35.5) не выполняется, то он расходится.*

Примеры 1. Пусть q — комплексное число и $|q| < 1$. Тогда ряд $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots$ с членами $u_n = q^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, образующими бесконечную убывающую геометрическую прогрессию, сходится.

Действительно,

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q},$$

и так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{n+1}}{1 - q} = 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - q}.$$

2. Ряд, члены которого образуют геометрическую прогрессию, $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots$, при $|q| \geq 1$ расходится, ибо его общий член $u_n = q^n$ не стремится к нулю: $|u_n| = |q|^n \geq 1$.

3. Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$ с членами $u_n = (-1)^{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, расходится.

В самом деле, в этом случае

$$s_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad s_{2k+1} = 1, \quad k = 0, 1, \dots,$$

поэтому последовательность частичных сумм $\{s_n\}$ не имеет предела.

Расходимость рассматриваемого ряда, следует, конечно, и из того, что все его члены по абсолютной величине равны единице, и поэтому не выполняется необходимое условие (35.5) сходимости ряда.

35.2. СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

Теорема 2. Пусть c — комплексное число. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,

$u_n \in \mathbb{C}$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$, называемый произведением данного ряда на число c , также сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \quad (35.6)$$

Эта теорема означает, что числовой множитель «можно выносить за скобку» и в случае бесконечного множества слагаемых, если они образуют сходящийся ряд. «Можно» в том смысле, что справедливо равенство (35.6).

Доказательство. Пусть $s_n = \sum_{k=1}^n u_k$ и $s'_n = \sum_{k=1}^n cu_k$, тогда, очевидно,

$$s'_n = cs_n. \quad (35.7)$$

По условию, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ существует, поэтому в силу (35.7) $\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n$ также существует и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Согласно определению суммы ряда отсюда сразу следует (35.6). \square

Теорема 3. Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$, называемый суммой данных рядов, также сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \quad (35.8)$$

Эта теорема означает, что сходящиеся ряды «можно складывать почленно» (n -й член с n -м) «можно» в том смысле, что справедливо равенство (35.8).

Доказательство. Пусть

$$s_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad s'_n = \sum_{k=1}^n v_k \quad \text{и} \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^n (u_k + v_k),$$

тогда $\sigma_n = s_n + s'_n$, и так как $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n$, по условию, существуют, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$ также существует и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + s'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n + \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n.$$

Это равенство эквивалентно равенству (35.8). \square

Теорема 4. Если ряд сходится, то любой его остаток сходится. Если какой-либо остаток ряда (35.1) сходится, то и сам ряд также сходится. При этом если

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad s_m = \sum_{k=1}^m u_k, \quad r_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} u_k,$$

то

$$s = s_m + r_m.$$

Доказательство. Пусть $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, $n = 1, 2, \dots$, — частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а $s_k^{(m)} = u_{m+1} + \dots + u_{m+k}$ — частичные суммы его m -го остатка

$$u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_{m+k} + \dots$$

Очевидно, что

$$s_n = s_m + s_k^{(m)}, \quad n = m + k, \quad (35.9)$$

откуда при фиксированном m следует, что предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

существует тогда и только тогда, когда существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k^{(m)}.$$

Иначе говоря, ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится некоторый его остаток $r_m = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k^{(m)}$. Поскольку натуральное число m было произвольным, то первая часть теоремы доказана.

Наконец, переходя к пределу в равенстве (35.9) при $k \rightarrow \infty$ и фиксированном m , имеем $s = s_m + r_m$, так как $n = m + k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k^{(m)} = r_m$. \square

Из этой теоремы следует, что отбрасывание или добавление конечного числа членов к данному ряду не влияет на его сходимость.

Из формулы $s = s_m + r_m$, очевидно, следует, что если ряд сходится, то его остаток стремится к нулю:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m = \lim_{m \rightarrow \infty} (s - s_m) = 0 \quad (35.10)$$

Отметим, что само собой разумеется, что условие (35.10) нельзя принять в качестве определения сходящегося ряда, так как остаток ряда сам является рядом, и говорить о его стремлении к нулю, можно лишь уже обладая определением сходимости ряда.

35.3. КРИТЕРИЙ КОШИ СХОДИМОСТИ РЯДА

Критерий Коши для сходимости последовательностей может быть легко перефразирован применительно к рядам. Действительно, как известно (см. п. 3.7 и 23.3), для того чтобы последовательность комплексных чисел $\{s_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер n_ε , что для любых номеров $n \geq n_\varepsilon$ и любых целых $p \geq 0$

выполнялось неравенство

$$|s_{n+p} - s_{n-1}| < \varepsilon.$$

Для удобства использования этого критерия в случае рядов мы пишем здесь разность $s_{n+p} - s_{n-1}$ вместо разности $s_{n+p} - s_n$, которую писали раньше в п. 3.7. Это, конечно, не влияет на суть дела. При этом, поскольку сумма s_0 не определена, мы всегда будем считать, по определению, что $s_0 = 0$.

Если теперь под $\{s_n\}$ подразумевать последовательность частичных сумм ряда (35.1), то

$$s_{n+p} - s_{n-1} = u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p},$$

и сформулированный критерий в этих обозначениях принимает следующий вид.

Теорема 5 (критерий Коши). *Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сошелся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер n_ε , что при любом $n \geq n_\varepsilon$ и любом целом $p \geq 0$ выполнялось неравенство*

$$|u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon. \quad (35.11)$$

Из критерия Коши сходимости ряда легко можно получить снова необходимое условие (35.5) сходимости ряда. Действительно, в этом случае неравенство (35.11) выполняется для любого $p \geq 0$ и, в частности, для $p=0$. Поэтому для всех $n \geq n_\varepsilon$ имеем $|u_n| < \varepsilon$, а это в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Кратко свойство (35.5) выражают, говоря, что «общий член сходящегося ряда стремится к нулю».

Примеры 1. Рассмотрим так называемый гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Здесь n -й член $u_n = 1/n$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, но ряд расходится. Действительно, для любого $n = 1, 2, \dots$ имеем

$$\begin{aligned} u_n + u_{n+1} + \dots + u_{2n-1} &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} > \\ &> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (35.12)$$

т. е. для любого n при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и $p = n - 1$ неравенство (35.11) не выполняется.

Таким образом, из критерия Коши следует, что гармонический ряд расходится. Этот пример показывает, что условие (35.5),

будучи необходимым для сходимости ряда, не является вместе с тем достаточным.

Из рассмотренного примера следует также, что ряд

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots \quad (35.13)$$

при $\alpha < 1$ расходится. В самом деле, замечая, что при $\alpha < 1$ для любого $n = 2, 3, \dots$ справедливо неравенство $n^\alpha < n$, имеем в силу (35.12) неравенства

$$\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} > \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)} + \dots + \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2}.$$

Поэтому в случае ряда (35.13) при $\alpha < 1$ для любого $n = 1, 2, \dots$ при $\varepsilon = 1/2$ и $p = n - 1$ неравенство (35.11) также не выполняется, и, следовательно, в силу критерия Коши, ряд (35.13) при $\alpha < 1$ также расходится.

2. Рассмотрим теперь ряд (35.13) при $\alpha > 1$. Покажем, что в этом случае он сходится. Возьмем сначала частичные суммы этого ряда порядков $n = 2^k - 1$, $k = 1, 2, 3, \dots$, объединив их слагаемые в k групп, общий вид которых

$$\frac{1}{2^{p\alpha}} + \frac{1}{(2^p+1)^\alpha} + \frac{1}{(2^p+2)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^{p+1}-1)^\alpha}, \quad p = 0, 1, \dots, k-1,$$

т. е.

$$s_{2^k-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{(k-1)\alpha}} + \dots + \frac{1}{(2^k-1)^\alpha} \right).$$

Заметив, что для каждого слагаемого p -й группы справедливо неравенство

$$\frac{1}{(2^p+m)^\alpha} \leq \frac{1}{2^{p\alpha}}, \quad m = 0, 1, \dots, 2^p - 1,$$

и что в этой группе 2^p слагаемых, получим

$$\begin{aligned} s_{2^k-1} &< 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2^2}{2^{2\alpha}} + \dots + \frac{2^{k-1}}{2^{(k-1)\alpha}} < \\ &< \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{(k-1)(\alpha-1)}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1}. \end{aligned}$$

Таким образом последовательность частичных сумм s_{2^k-1} ряда (35.13) при $\alpha > 1$ ограничена сверху. Далее, в силу положительности членов рассматриваемого ряда последовательность его частичных сумм возрастает. Поэтому существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$. Но тогда и любая подпоследователь-

ность $\{s_n\}$, в частности последовательность $\{s_{2^k-1}\}$ имеет тот же предел s , а поскольку по доказанному эта последовательность ограничена, то предел s конечен.

Упражнения. Доказать, исходя из определения 1, что следующие ряды — сходящиеся и найти сумму каждого из них:

$$1. \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \dots + \frac{1}{(a+(n-1)b)(a+nb)} + \dots \quad (a, b > 0).$$

$$2. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$$

$$3. a + (a+d)q - (a+2d)q^2 + \dots + (a+nd)q^n + \dots, \quad |q| < 1.$$

Задача 22. Доказать, что для всякого сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами $a_n \geq 0$, существует такая возрастающая бесконечно большая последовательность $\{b_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, $b_n \leq b_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ также сходится.

35.4. РЯДЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

В этом пункте займемся изучением рядов, все члены которых неотрицательные действительные числа.

Лемма 1. Пусть все члены ряда (35.1) неотрицательны:

$$u_n \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (35.14)$$

Для того, чтобы этот ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы существовала хотя бы одна сходящаяся подпоследовательность последовательности его частичных сумм.

Действительно, из условия (35.14) следует, что

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k = s_n + u_{n+1} \geq s_n,$$

т. е. последовательность частичных сумм $\{s_n\}$ рассматриваемого ряда является возрастающей. Монотонная же последовательность сходится в том и только том случае, когда сходится хотя бы одна ее подпоследовательность (см. замечание после теоремы 3 в п. 3.5). \square

Лемма 2. Для того чтобы ряд (35.1) с неотрицательными членами сходился, необходимо, чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченной сверху и достаточно, чтобы была ограниченной сверху хотя бы одна подпоследовательность $\{s_{n_k}\}$

последовательности $\{s_n\}$ его частичных сумм, причем если

$$s = \sup_k \{s_{n_k}\}$$

то s является суммой ряда (35.1).

В самом деле, сходимость ряда означает сходимость последовательности его частичных сумм, а всякая сходящаяся последовательность ограничена, в частности, ограничена сверху. Таким образом, первая часть леммы справедлива и без предположения неотрицательности членов ряда.

Однако, в общем случае условие ограниченности даже всех частичных сумм ряда (а не только некоторой их подпоследовательности) не является достаточным для сходимости ряда, как это показывает, например, пример 3, разобранный в п. 35.1. Поэтому условие неотрицательности членов ряда существенно для справедливости второй части леммы 2. Докажем ее.

Из неотрицательности членов ряда, как мы убедились при доказательстве предыдущей теоремы, следует, что последовательность его частичных сумм — неубывающая. Поэтому, если существует ограниченная сверху подпоследовательность $\{s_{n_k}\}$ последовательности частичных сумм $\{s_n\}$ рассматриваемого ряда, то она тоже не убывает (как всякая подпоследовательность неубывающей последовательности) и, следовательно (см. теорему 3 в п. 3.5) сходится, причем

$$s = \sup_k \{s_{n_k}\} = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{n_k}.$$

Согласно предыдущей лемме из сходимости подпоследовательности частичных сумм $\{s_{n_k}\}$ следует сходимость ряда, т. е. существование конечного предела $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, и поскольку предел сходящейся последовательности совпадает с пределом любой ее подпоследовательности, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{n_k} = s. \quad \square$$

Из леммы 2 следует, что если ряд с неотрицательными членами расходится, то последовательность его частичных сумм не ограничена сверху и в силу ее монотонности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty.$$

Поэтому для расходящихся рядов с неотрицательными членами, согласно сделанному в п. 35.1 соглашению, пишем

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty$$

Доказанные леммы по своей формулировке внешне напоминают соответствующие утверждения для несобственных интегралов (см. п. 33.3). Между сходимостью рядов с неотрицательными членами и сходимостью несобственных интегралов от неотрицательных функций можно иногда установить и более непосредственную связь. Для убывающих функций это будет сделано в п. 35.7.

35.5. ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ ДЛЯ РЯДОВ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ. МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ГЛАВНОЙ ЧАСТИ ЧЛЕНА РЯДА

Перейдем теперь к признакам сравнения для рядов, также по своей форме весьма напоминающих соответствующие признаки сходимости несобственных интегралов.

Теорема 6 (признак сравнения). Пусть

$$u_n \geq 0, \quad v_n \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (35.15)$$

и

$$u_n = O(v_n) \text{ *).} \quad (35.16)$$

Тогда, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (35.17)$$

сходится, то сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad (35.18)$$

а если ряд (35.18) расходится, то расходится и ряд (35.17).

Доказательство. Пусть выполнено условие (35.16). Тогда существует такое $c > 0$, что

$$u_k \leq cv_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (35.19)$$

Если теперь ряд (35.17) сходится, то, согласно лемме 2, последовательность $\{s_n\}$ его частичных сумм ограничена, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что

$$s_n = \sum_{k=1}^n v_k \leq M, \quad n = 1, 2, \dots \quad (35.20)$$

Обозначим через σ_n частичную сумму ряда (35.18). Тогда в силу неравенств (35.19) и (35.20]

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n u_k \leq c \sum_{k=1}^n v_k = cs_n \leq cM, \quad n = 1, 2, \dots$$

*) В частности, $u_n \leq v_n$. Объяснение обозначения « O » см. в п. 23.3.

Согласно лемме 2, из ограниченности сверху частичных сумм ряда (35.18) следует его сходимость. Итак, если ряд (35.17) сходится, то ряд (35.18) также сходится.

Если же ряд (35.18) расходится, то и ряд (35.17) расходится, так как если бы он сходился, то, по доказанному, сходилась бы и ряд (35.18), что противоречит условию. \square

Следствие. Пусть $v_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k, \quad (35.21)$$

тогда

1) если ряд (35.17) сходится и $0 \leq k < +\infty$, то ряд (35.18) также сходится;

2) если ряд (35.17) расходится и $0 < k \leq +\infty$, то ряд (35.18) также расходится.

В частности, если $u_n \sim v_n$ (u_n и v_n эквивалентны, см. п. 23.3, то ряды (35.17) и (35.18) сходятся или расходятся одновременно.

Из выполнения условия (35.21) для $0 \leq k < +\infty$ следует существование такого n_0 , что если $n \geq n_0$, то

$$\frac{u_n}{v_n} < k + 1, \quad \text{т. е.} \quad u_n < (k + 1)v_n,$$

а это означает, что

$$u_n = O(v_n).$$

Поэтому утверждение 1 следствия непосредственно вытекает из утверждения 1 теоремы.

Из выполнения условия (35.21) для $0 < k \leq +\infty$ следует, что если зафиксировать такое k' , что $0 < k' < k$, то существует номер $n_0 = n_0(k')$, обладающий тем свойством, что если $n \geq n_0$, то

$$\frac{u_n}{v_n} > k', \quad \text{т. е.} \quad v_n < \frac{1}{k'} u_n,$$

а это означает, что

$$v_n = O(u_n).$$

Поэтому утверждение 2 следствия непосредственно вытекает из утверждения 2 теоремы. \square

Примеры. 1. Пусть $u_n = \frac{\sin^2 n\alpha}{2^n}$.

Тогда $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \dots$, и так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится (см. п. 35.1), то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{2^n}$.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt[n]{n}}$ расходится, ибо $\frac{1}{1+\sqrt[n]{n}} \geq \frac{n}{2\sqrt[n]{n}}$, $p = 1, 2, \dots$,

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, как мы видели (см. исследование ряда (35.13)), расходится.

Эффективность использования критерия сравнения для исследования сходимости ряда зависит, конечно, от запаса «рядов сравнения», т. е. рядов, о которых мы уже знаем, сходятся ли они или расходятся, и которые мы тем самым можем пытаться использовать для исследования сходимости данного ряда.

Если в качестве «ряда сравнения» (35.17) взять ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$,

о котором мы уже знаем, при каких α он сходится, то из теоремы 6 непосредственно следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 7. Пусть $u_n \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда если $u_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ и $\alpha > 1$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (35.22)$$

сходится; если же $\frac{1}{n^{\alpha}} = O(u_n)$ и $\alpha \leq 1$, то ряд (35.22) расходится.

Следствие. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} u_n = k$, тогда

- 1) если $\alpha > 1$ и $0 \leq k < +\infty$, то ряд (35.22) сходится;
- 2) если $\alpha \leq 1$ и $0 < k \leq +\infty$, то ряд (35.22) расходится.

В частности, если $u_n \sim \frac{1}{n^{\alpha}}$, то ряд (35.22) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Если члены u_n ряда (35.22) заданы с помощью формулы, представляющей собой функцию от n , которая имеет смысл для всех действительных достаточно больших неотрицательных значений переменной n и, более того, является «достаточно гладкой» функцией этой переменной, то для практического применения теоремы 7 обычно бывает целесообразно разложить член u_n с помощью формулы Тейлора по степеням $1/n$.

Если главный член получившегося разложения будет иметь вид $1/n^{\alpha}$, то, беря в качестве ряда сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ и применив теорему 7, можно определить, сходится ли данный ряд или расходится.

В известном смысле можно сказать, что этот метод исследования сходимости ряда является наиболее удобным и вместе с тем достаточно общим.

Примеры. Исследуем сходимость рядов, общие члены u_n которых задаются нижеуказанными формулами.

1) $u_n = 1 - \cos \frac{\pi}{n}$. Очевидно, $u_n > 0$. Так как (см. замечание в конце п. 13.3) $\cos x = 1 + O(x^2)$, $x \rightarrow 0$, и, следовательно,

$$u_n = 1 - \left[1 + O\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right) \right] = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

то в силу теоремы 7 ряд с общим членом u_n сходится.

2) $u_n = \ln \cos \frac{1}{n}$. Здесь $u_n < 0$. Вспомнив, что $\ln(1+x) = O(x)$, $x \rightarrow 0$, и применив последовательно формулу Тейлора для косинуса и логарифма, получим:

$$u_n = \ln \cos \frac{1}{n} = \ln \left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

и поэтому в силу теоремы 7 ряд с положительными членами

$\sum_{n=1}^{\infty} (-u_n)$ сходится, а вместе с ним сходится и данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

3) $u_n = \ln \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$, $n = 3, 4, \dots$. Имеем $u_n \geq 0$ и $\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} +$

$+ o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \rightarrow \infty$, поэтому

$$u_n = \ln \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right) - \ln \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right) = 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} + o\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}\right) = \frac{2\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом, $u_n \sim \frac{2\pi}{n}$; так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n}$ расходится, то

расходится и ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \ln \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$.

35.6. ПРИЗНАКИ ДАЛАМБЕРА И КОШИ ДЛЯ РЯДОВ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Иногда оказываются полезными некоторые специальные признаки сходимости ряда. Отметим среди них так называемый признак Даламбера *) и признак Коши, непосредственно получающиеся

*) Ж. Даламбер (1717—1783) — французский философ и математик.

Следовательно, не выполняется необходимое условие сходимости ряда (см. теорему 1 этого параграфа), и потому ряд (35.23) расходится. \square

Следствие. Пусть существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Тогда если $l < 1$, то ряд (35.23) сходится, а если $l > 1$, то ряд (35.23) расходится. Это вытекает непосредственно из доказанной теоремы.

В качестве примера рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Здесь $u_n = \frac{1}{n!}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$, поэтому, согласно следствию теоремы 10, данный ряд сходится. Его сходимость, конечно, можно установить и сравнив его, например со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Более содержательные примеры на применение признака Даламбера будут даны в дальнейшем (см., например, п. 36.1).

Теорема 9 (признак Коши). Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (35.24)$$

Тогда

1) если существуют такое q , $0 \leq q < 1$, и такое n_0 , что для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{u_n} \leq q,$$

то данный ряд сходится;

2) если существует такой номер n_0 , что для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1,$$

то данный ряд расходится.

Доказательство. Если при $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{u_n} \leq q, \quad \text{т. е. } u_n \leq q^n,$$

то по признаку сравнения ряд (35.24) сходится, ибо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ при $0 < q < 1$ сходится.

Если же

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1, \quad n \geq n_0,$$

то $u_n \geq 1$, и, значит, ряд (35.24) расходится (см. теорему 1). \square

Следствие. Пусть существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

Тогда если $l < 1$, то ряд (35.24) сходится, а если $l > 1$, он расходится.

Доказательство следствия очевидно.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, то, согласно следствию из теоремы 9, данный ряд сходится. Его сходимость легко устанавливается и с помощью теоремы 7.

Замечание. Если о ряде $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$, $n=1, 2, \dots$, известно лишь, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \text{ или } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1, \quad (35.25)$$

то ничего определенного о его сходимости сказать нельзя: ряд может как сходиться, так и расходиться. Например, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

удовлетворяют обоим условиям (35.25), однако первый из них расходится, а второй сходится.

35.7. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ РЯДОВ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Если для данного ряда (35.1) удастся подобрать функцию, определенную при $x \geq 1$ и такую, что $f(n) = u_n$, то при определенных условиях из сходимости или расходимости интеграла

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

можно судить и о сходимости или расходимости ряда (35.1).

Теорема 10 (интегральный признак сходимости рядов). Если функция $f(x)$, определенная при всех $x \geq 1$, неотрицательна и убывает, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad (35.26)$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx. \quad (35.27)$$

Доказательство. Если $k \leq x \leq k+1$, то в силу убывания

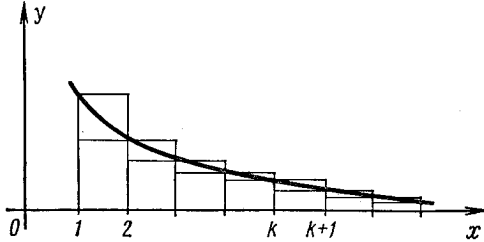


Рис. 135

функция $f(x)$ (рис. 135)

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1), \quad k=1, 2, \dots;$$

поэтому, интегрируя по отрезку $[k, k+1]$, будем иметь

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1), \quad k=1, 2, \dots$$

Суммируя эти неравенства от $k=1$ до $k=n$, получим

$$\sum_{k=1}^n f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x) dx \geq \sum_{k=1}^n f(k+1),$$

и, полагая

$$s_n = \sum_{k=1}^n f(k),$$

будем иметь

$$s_n \geq \int_1^{n+1} f(x) dx \geq s_{n+1} - f(1), \quad n=1, 2, \dots \quad (35.28)$$

Если интеграл (35.27) сходится, то в силу леммы 1 п. 33.3 при любом $n=1, 2, \dots$

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq \int_1^{+\infty} f(x) dx.$$

Отсюда и из неравенства (35.28) следует, что

$$s_{n+1} \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x) dx,$$

т. е. последовательность частичных сумм ряда (35.26) ограничена сверху, а значит, согласно предыдущей теореме, этот ряд сходится.

Если ряд (35.26) сходится и его сумма равна s , то, согласно той же теореме, $s_n \leq s$ для всех $n = 1, 2, \dots$, и, значит, в силу неравенства (35.17) для всех $n = 1, 2, \dots$,

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq s.$$

Если теперь $\xi \geq 1$, то, беря n так, чтобы $n \geq \xi$, получим в силу неотрицательности функцию f

$$\int_1^{\xi} f(x) dx \leq \int_1^n f(x) dx \leq s.$$

Итак, совокупность всех интегралов $\int_1^{\xi} f(x) dx$, $\xi \geq 1$, ограничена сверху, а потому интеграл (35.27) сходится (см. лемму 1 п. 33.3). \square

Эта теорема часто существенно облегчает исследование сходимости рядов, так как, если для данного ряда удастся подобрать соответствующую функцию f , а значит, свести вопрос об изучении сходимости ряда к изучению сходимости интеграла, то это дает возможность применить развитый в предшествующей главе аппарат интегрального исчисления.

Примеры. 1. Рассмотрим снова (см. п. 35.3) ряд

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots \quad (35.13)$$

с n -м членом $u_n = 1/n^\alpha$, $n = 1, 2, \dots$.

В данном случае функция $f(x)$, указанная в теореме, подбирается легко:

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \geq 1.$$

Так как интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$, то и ряд (35.13) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Эти факты были установлены ранее другим методом в п. 35.3 (см. там примеры 1 и 2). Как видно из вышеизложенного, применение к изучению ряда (35.13) интегрального признака сходимости рядов значительно упростило задачу исследования сходимости этого ряда.

2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}. \quad (35.29)$$

Этот ряд легко можно исследовать с помощью интегрального признака сходимости: из того, что интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1) \ln(x+1)} =$

$= \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t}$ расходится, следует, что и ряд (35.29) расходится.

Сформулируем теперь одно простое, но часто полезное в приложениях следствие из теоремы 10.

Если существует такое натуральное n_0 , что неотрицательная функция f убывает при $x \geq n_0$, то ряд

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(x) dx.$$

Этот случай сводится к рассмотренному в теореме заменой переменного $x = y + n_0 - 1$.

У п р а ж н е н и я. Исследовать сходимость рядов:

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}.$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi \sqrt{n^2 + a^2} \quad (a = \text{const} \in \mathbb{R}).$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{n}{n+1} \right).$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \ln \frac{2n+1}{2n-1} \right).$

10. Пусть $0 < p < q < 1$. Доказать, что ряд

$$p + q^2 + p^3 + q^4 + \dots$$

сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} = \infty$.

11. Пусть $0 < \alpha < \beta < 1$. Доказать, что ряд

$$\frac{1}{1^{\alpha}} + \frac{1}{2^{\beta}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\beta}} + \dots$$

сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \infty$.

35.8*. НЕРАВЕНСТВА ГЕЛЬДЕРА И МИНКОВСКОГО ДЛЯ КОНЕЧНЫХ И БЕСКОНЕЧНЫХ СУММ

Пусть заданы числа (вообще говоря, комплексные) $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, $1 < p < +\infty$, и число q определяется равенством $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (см. п. 20.8 и п. 28.4*). Тогда справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q} \quad (35.30)$$

(неравенства Гёльдера) и

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} \quad (35.31)$$

(неравенство Минковского).

Их доказательство проводится по той же схеме, что и в случае соответствующих интегральных неравенств (см. п. 28.4*).

Введем для краткости обозначения

$$\|x\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad \|y\|_q \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}. \quad (35.32)$$

Применив неравенство (20.53) $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, $a \geq 0, b \geq 0$ к

$$a = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}, \quad b = \frac{|y_i|}{\|y\|_q}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

будем иметь

$$\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}.$$

Просуммировав эти неравенства по i от 1 до n , в силу (35.32) и условия $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, получим:

$$\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \frac{1}{p \|x\|_p^p} \sum_{i=1}^n |x_i|^p + \frac{1}{q \|y\|_q^q} \sum_{i=1}^n |y_i|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q;$$

тем самым неравенство (35.30) доказано.

Неравенство Минковского (35.31) следует из неравенства Гёльдера (35.30): из очевидного соотношения

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1},$$

применив к каждому слагаемому в правой части неравенство Гёльдера, получим:

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{1/q} + \\ + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{1/q}.$$

Если левая часть равна нулю, то неравенство Минковского очевидно справедливо; если же она не равна нулю, то, сокращая обе части на множитель $\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/q}$ и заметив, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $q(p-1) = p$, получим неравенство (35.31).

Для любых двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ справедливы аналогичные неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{1/q}. \quad (35.33)$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right)^{1/p}. \quad (35.34)$$

Действительно, для всех частичных сумм одного и того же порядка заданных рядов справедливы неравенства Гёльдера и Минковского. Переходя в них к пределу при $n \rightarrow \infty$, мы и получим неравенства (35.33) и (35.34).

Из доказанных неравенств следует, в частности, что если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q$$

сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|$ сходится, а если сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p,$$

то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p$.

35.9. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

В этом пункте рассматриваются ряды с действительными членами, знаки которых, вообще говоря, изменяются при изменении номера; такие ряды называются *знакопеременными*.

Рассмотрим прежде всего так называемые *знакочередующиеся* ряды, т. е. ряды, члены которых поочередно то положительны, то отрицательны.

Теорема 11 (Лейбниц). *Если*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \quad (35.35)$$

и

$$u_n \geq u_{n+1} > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (35.36)$$

то знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \quad (35.37)$$

сходится. При этом любая частичная сумма s_n ряда (35.37) отличается от его суммы s на величину, меньшую следующего члена u_{n+1} , иначе говоря, абсолютная величина остатка ряда r_n в этом случае не превышает абсолютной величины его первого члена, т. е.

$$|r_n| = |s - s_n| \leq u_{n+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы четного порядка ряда (35.37)

$$s_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} u_n.$$

Их можно записать в виде

$$s_{2k} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2k-1} - u_{2k}), \quad k = 1, 2, \dots$$

В силу условия (35.36) выражения в круглых скобках неотрицательны и потому $s_{2k} \leq s_{2k+2}$, т. е. последовательность частичных сумм четного порядка ряда (35.37) возрастает.

Замечая, что частичные суммы s_{2k} можно записать также и в виде

$$s_{2k} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и что выражения в круглых скобках в силу условия (35.36) неотрицательны, а $u_{2k} > 0$, получаем, что $s_{2k} < u_1$, т. е. последовательность $\{s_{2k}\}$ ограничена сверху. Из монотонного возрастания и ограниченности сверху последовательности $\{s_{2k}\}$ следует, что она сходится:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} = s. \quad (35.38)$$

Покажем, что и частичные суммы нечетного порядка ряда (35.37) стремятся к тому же пределу. Действительно,

$$s_{2k+1} = s_{2k} + u_{2k+1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (35.39)$$

и так как, согласно (35.35), $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k+1} = 0$, то в силу (35.38) и (35.39) имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k+1} = s. \quad (35.40)$$

Из (35.38) и (35.40) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s.$$

Теперь отметим, что для ряда (35.37) справедливо неравенство

$$s_{2k} \leq s \leq s_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (35.41)$$

Действительно, с одной стороны, мы уже видели, что s является пределом монотонно возрастающей последовательности $\{s_{2k}\}$, поэтому $s_{2k} \leq s$. С другой стороны,

$$s_{2k+1} = s_{2k-1} - (u_{2k} - u_{2k+1}) \leq s_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

т. е. последовательность $\{s_{2k-1}\}$ монотонно убывает, и так как s является пределом и последовательности $\{s_{2k-1}\}$ (см. (35.40), то $s \leq s_{2k-1}$. Из неравенства (35.41) следует

$$s - s_{2k} \leq s_{2k+1} - s_{2k} = u_{2k+1},$$

$$s_{2k-1} - s \leq s_{2k-1} - s_{2k} = u_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

а это и означает, что для всех $n = 1, 2, \dots$, выполняется неравенство $|s - s_n| \leq u_{n+1}$. \square

Если условия чередования знаков ряда и монотонности будут выполняться не с первого члена, а лишь начиная с некоторого номера n_0 , то при выполнении условия (35.35), т. е. при стремлении общего члена ряда к нулю, рассматриваемый ряд будет также сходиться. Это следует из того, что отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (см. теорему 4 в п. 35.2).

В качестве примера рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \quad (35.42)$$

Его члены удовлетворяют, очевидно, условиям теоремы 11, и поэтому он сходится. Замечая, что у него $s_1 = 1$ и $s_2 = 1/2$, для его суммы S имеем оценку

$$1/2 \leq S \leq 1. \quad (35.43)$$

На ряды переносятся не все свойства конечных сумм. Поясним это на примере того же ряда (35.42). Если

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots, \quad (35.44)$$

то

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots,$$

сложив этот ряд с рядом (35.44), получим равенство

$$\frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{8} + \dots, \quad (35.45)$$

т. е. ряд, составленный из тех же членов, что и данный ряд (35.44), взятых только в несколько другом порядке, поэтому $\frac{3}{2}S = S$, откуда следует, что $S = 0$, что противоречит неравенству (35.43).

Несмотря на кажущуюся очевидность законности наших рассуждений, мы где-то совершили грубую ошибку. Где? Подробный анализ этого будет дан в одном из следующих пунктов.

35.10. АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ.

ПРИМЕНЕНИЕ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ СХОДИМОСТИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ РЯДОВ

В этом пункте снова изучаются ряды, члены которых, вообще говоря, комплексные числа.

Определение 4. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \in \mathbb{C}, \quad (35.46)$$

называется абсолютно сходящимся, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \quad (35.47)$$

сходится.

Применяя критерий Коши сходимости ряда к ряду (35.47), получим: для того, чтобы ряд (35.46) абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер n_ε , что для всех $n \geq n_\varepsilon$ и всех целых $p \geq 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

Примеры. 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^n} \sin \frac{\pi n}{n+1}$ абсолютно сходится, ибо

$$\left| \frac{i^n}{2^n} \sin \frac{\pi n}{n+1} \right| \leq \frac{1}{2^n}, \text{ а ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ сходится.}$$

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, как мы знаем, сходится, однако не абсолютно, ибо ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т. е. гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, расходится.

Теорема 12. Если ряд абсолютно сходится, то он и просто сходится.

Доказательство. Пусть ряд (35.46) абсолютно сходится, т. е. ряд (35.47) сходится. Тогда в силу необходимости выполнения условия Коши для сходимости ряда (см. теорему 5), для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_ε , что для всех $n \geq n_\varepsilon$ и всех целых $p \geq 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

Отсюда и из неравенства $\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |u_k|$ следует, что для всех номеров $n \geq n_\varepsilon$ и всех $p = 0, 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon.$$

А это и означает в силу достаточности выполнения условия Коши для сходимости ряда, что ряд (35.46) сходится. \square

Замечание. Следует иметь в виду, что свойство абсолютной величины суммы не превышать сумму абсолютных величин слагаемых остается справедливым и для сходящихся рядов:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \quad (35.48)$$

Это неравенство содержательно, когда его правая часть конечна, т. е. когда рассматриваемый ряд абсолютно сходится. В этом случае левая часть неравенства всегда имеет смысл, так как из абсолютной сходимости ряда следует и его обычная сходимость. Формально неравенство (35.48), по нашему соглашению об употреблении символа $+\infty$ (см. с. 33 и с. 546), верно и для любого сходящегося ряда, у которого ряд, стоящий в правой части (35.48), расходится.

Для доказательства неравенства (35.48) в случае сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ заметим, что для любого натурального m

$$\left| \sum_{n=1}^m u_n \right| \leq \sum_{n=1}^m |u_n|.$$

Переходя здесь к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим неравенство (35.44).
Обозначим через

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^* \quad (35.49)$$

ряд, составленный из тех же членов, что и ряд (35.46), но взятых, вообще говоря, в другом порядке.

Теорема 13. *Если ряд (35.46) абсолютно сходится, то ряд (35.49) также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.*

Доказательство. Пусть ряд (35.46) абсолютно сходится, т. е. сходится ряд (35.47), и пусть $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \delta$. Обозначим частичные суммы ряда (35.47) через \tilde{s}_n . Тогда (см. п. 35.4)

$$\tilde{s}_n \leq \delta, \quad n = 1, 2, \dots$$

Далее, какова бы ни была частичная сумма $\tilde{s}_m^* = \sum_{k=1}^m |u_k^*|$ ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} |u_m^*|, \quad (35.50)$$

найдется номер $n = n(m)$ такой, что все члены ряда (35.50), входящие в сумму \tilde{s}_m^* (таких членов конечное число), имеют в ряде (35.47) номера, не превышающие n , а поэтому

$$\tilde{s}_m^* \leq \tilde{s}_n,$$

где $n = n(m)$, $m = 1, 2, \dots$. Следовательно,

$$\tilde{s}_m^* \leq \delta, \quad m = 1, 2, \dots$$

Отсюда (см. лемму 2 в п. 35.4) и следует сходимость ряда (35.50), т. е. абсолютная сходимость ряда (35.49).

Покажем теперь, что если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$, то и сумма ряда (35.49) также равна s . Обозначим частичные суммы ряда (35.46) через s_n . Пусть фиксировано $\varepsilon > 0$. Тогда в силу сходимости ряда (35.47)

существует такой номер n_ε , что

$$\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| = \tilde{s} - \tilde{s}_{n_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (35.51)$$

следовательно, выполняется и неравенство

$$|s - s_{n_\varepsilon}| = \left| \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (35.52)$$

Выберем, далее, номер m_ε так, чтобы частичная сумма $s_{m_\varepsilon}^*$ ряда (35.49) содержала в качестве слагаемых все члены ряда (35.46), входящие в сумму s_{n_ε} (иначе говоря, номер m_ε таков, что все члены ряда (35.46) с номерами, не превышающими n_ε , имеют в ряде (35.49) номера, не превышающие m_ε). Пусть $m \geq m_\varepsilon$. Положим $s_m^{**} = s_m^* - s_{n_\varepsilon}$. Поскольку $|s_m^{**}|$ не превышает сумму абсолютных величин слагаемых, входящих в s_m^{**} , и поскольку номера этих слагаемых больше, чем n_ε , а следовательно, все они содержатся в сумме $\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n|$, то в силу (35.51) имеем

$$|s_m^{**}| \leq \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (35.53)$$

Используя (35.52) и (35.53), получим при $m \geq m_\varepsilon$,

$$|s - s_m^*| = |s - (s_{n_\varepsilon} + s_m^{**})| \leq |s - s_{n_\varepsilon}| + |s_m^{**}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и означает, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^* = s. \quad \square$$

Теорема 14. Если ряд (35.46) абсолютно сходится и s — какое-либо число, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ также абсолютно сходится.

Это следует из критерия Коши сходимости рядов и равенства

$$\sum_{k=n}^{n+p} |cu_k| = |c| \sum_{k=n}^{n+p} |u_k|.$$

Теорема 15. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютно сходятся, то их сумма $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ также абсолютно сходится.

Это следует из критерия Коши сходимости рядов и из неравенства

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k + v_k| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |u_k| + \sum_{k=n}^{n+p} |v_k|.$$

Теорема 16. Если ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (35.54)$$

абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всевозможных попарных произведений $u_m v_n$ членов этих рядов, расположенных в произвольном порядке, также абсолютно сходится. Если сумма этого ряда равна s , а суммы рядов (35.54) равны соответственно s' и s'' , т. е.

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m = s', \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = s'',$$

то

$$s = s's''. \quad (35.55)$$

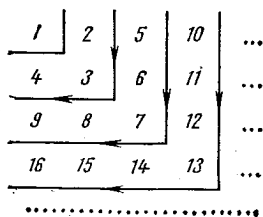
Доказательство. Образует следующую таблицу попарных произведений членов рядов (35.54):

$u_1 v_1$	$u_1 v_2$...	$u_1 v_n$...
$u_2 v_1$	$u_2 v_2$...	$u_2 v_n$...
...
$u_m v_1$	$u_m v_2$...	$u_m v_n$...
...

Составим из элементов этой таблицы ряд

$$u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_2 v_2 + u_2 v_1 + \dots, \quad (35.56)$$

в котором ее элементы расположены в порядке, показанном на нижеследующей схеме, где на месте каждого произведения из таблицы указан его порядковый номер как члена ряда (35.56):



Докажем, что ряд (35.56) абсолютно сходится, т. е. что сходится ряд

$$|u_1v_1| + |u_1v_2| + |u_2v_2| + |u_2v_1| + \dots \quad (35.57)$$

Для этого в силу неотрицательности его членов достаточно доказать, что существует по крайней мере одна ограниченная сверху подпоследовательность его частичных сумм (см. лемму 2 в п. 35.4)

Обозначим через \tilde{s}'_n и \tilde{s}''_n частичные суммы соответственно рядов

$$\tilde{s}' \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} |u_m|, \quad \tilde{s}'' \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |v_n|,$$

которые в силу абсолютной сходимости рядов (35.54) сходятся, т. е. $0 \leq \tilde{s}' < +\infty$, $0 \leq \tilde{s}'' < +\infty$. Тогда для частичных сумм порядка n^2 ряда (35.57) будем иметь

$$\tilde{s}_1 = |u_1v_1| = \tilde{s}'_1 \tilde{s}''_1 \leq \tilde{s}' \tilde{s}'',$$

$$\begin{aligned} \tilde{s}_4 = |u_1v_1| + |u_1v_2| + |u_2v_2| + |u_2v_1| = \\ = (|u_1| + |u_2|)(|v_1| + |v_2|) = \tilde{s}'_2 \tilde{s}''_2 \leq \tilde{s}' \tilde{s}'', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{n^2} = |u_1v_1| + \dots + |u_1v_n| + \dots + |u_nv_n| + \dots + |u_nv_1| = \\ = (|u_1| + \dots + |u_n|)(|v_1| + \dots + |v_n|) = \tilde{s}'_n \tilde{s}''_n \leq \tilde{s}' \tilde{s}'', \end{aligned}$$

Итак, подпоследовательность частичных сумм $\{\tilde{s}_{n^2}\}$ ряда (35.57) ограничена сверху, и, следовательно, этот ряд сходится. Это означает абсолютную сходимость ряда (35.56) и любого ряда, полученного произвольной перестановкой его членов (см. теорему 13). Таким образом, любой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{m_k} v_{n_k}, \quad (35.58)$$

составленный из всевозможных попарных произведений $u_m v_n$ членов рядов (35.54), сходится и притом абсолютно.

Для доказательства формулы (35.55) воспользуемся тем, что сумма ряда (35.58) не зависит от порядка его членов и снова расположим их наиболее удобным для нас способом; именно, рассмотрим снова ряд (35.56). Обозначая через s'_n и s''_n частичные суммы рядов (35.54), для частичных сумм s_{n^2} , $n=1, 2, \dots$, ряда (35.56), очевидно, получаем

$$s_{n^2} = s'_n s''_n. \quad (35.59)$$

Но

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = s', \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s''_n = s'', \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n^2} = s,$$

поэтому, переходя к пределу в равенстве (35.59) при $n \rightarrow \infty$, получаем равенство (35.55). \square

Теоремы 13—16 показывают, что свойства абсолютно сходящихся рядов во многом похожи на свойства конечных сумм: величина суммы такого ряда не зависит от порядка слагаемых, абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать почленно и т. п. В следующем пункте будет доказано, что для сходящихся рядов, не сходящихся абсолютно, эти свойства не имеют места.

Замечание. В заключение этого пункта подчеркнем, что, когда члены ряда комплексные или действительные, но меняющие знак, вопрос о сходимости этого ряда нельзя решить только с помощью определения порядка убывания n -го члена. Например,

n -е члены рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ имеют одинаковый порядок при $n \rightarrow \infty$, однако первый ряд расходится, а второй сходится.

Более того, нетрудно привести пример двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, n -е члены которых эквивалентны ($u_n \sim v_n$, $n = 1, 2, \dots$), из которых один сходится, а другой расходится.

В качестве таких рядов можно взять, например, ряд с n -м членом

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

и ряд с n -м членом

$$v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}.$$

С одной стороны, здесь $u_n \sim v_n$, $n = 1, 2, \dots$, ибо

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n}} = 1 + \frac{(-1)^{n+1} n}{(n+1) \ln(n+1)},$$

и потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 1.$$

С другой стороны, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ есть ряд вида (35.37), поэтому он сходится. Ряд же $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится. В самом деле, если бы он сходил, то сходил бы и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)},$$

т. е. ряд (35.29), который, как мы видели, расходится.

Было бы ошибкой, однако, считать, что метод выделения главной части годится лишь в случае рядов с действительными членами, имеющими один и тот же знак. Метод выделения главной части может с успехом применяться для выяснения сходимости любых рядов. Суть этого метода в рассматриваемом случае основана на следующем замечании: пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Если представить его члены в виде $u_n = v_n + w_n$, где ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и расходится одновременно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (почему)? В силу этого для исследования сходимости ряда $\sum_{v=1}^{\infty} u_n$ целесообразно попытаться представить его члены, например, в виде $u_n = v_n + w_n$, так чтобы $w_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ при $\alpha > 1$. Тогда поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ сходится (и даже абсолютно), то сходимость данного ряда сводится к исследованию сходимости ряда $\sum_{n \rightarrow \infty} v_n$. Этот прием, конечно, целесообразен в том случае, если получившийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ проще поддается исследованию на сходимость, чем данный ряд (ср. с аналогичным исследованием сходимости интегралов в п. 33.6).

Примеры. 1. Рассмотрим ряд с общим членом $u_n = \frac{(-1)^n n^2 + \ln^2 n}{n^2 \ln n}$, $n = 2, 3, \dots$. Беря $v_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$, а $w_n = \frac{\ln n}{n^2}$, получаем, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ сходится, ибо ряд из главных частей $\sum_{n=2}^{\infty} v_n$ сходится по признаку Лейбница, а для «остатков» имеем, например,

$$w_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

откуда следует абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} w_n$.

2. Рассмотрим ряд с общим членом $u_n = \ln \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right]$.

Поскольку (см. замечание в п. 13.3)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3), \text{ то } u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Положим $v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}} - \frac{1}{2n}$ и $w_n = u_n - v_n$. Тогда $w_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится как ряд, являющийся разностью сходя-

щегося (согласно признаку Лейбница) ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ и раско-

дящегося $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ (отличающегося от гармонического ряда лишь

множителем 1/2). Ряд же $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$, согласно теореме 9, абсолютно сходится.

Таким образом, данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, хотя его «глав-

ная часть» $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ и представляет собой сходящийся ряд.

Тем самым эти ряды дают еще один пример двух рядов, члены которых образуют эквивалентные последовательности и из которых один сходится, а другой расходится.

35.11. ПРИЗНАКИ ДАЛАМБЕРА И КОШИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Если в случае числового ряда (35.1) $u_n \neq 0$, $u_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$, существует такое q , $0 < q < 1$, и такой номер n_0 , что для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq q \text{ или } \sqrt[n]{|u_n|} \leq q,$$

то согласно признаку Даламбера, соответственно Коши (см. п. 35.6) данный ряд сходится и притом абсолютно.

Если же существует такой номер n_0 , что для всех $n \geq n_0$ имеет место неравенство

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geq 1 \tag{35.60}$$

или

$$\sqrt[n]{|u_n|} \geq 1, \tag{35.61}$$

то по признакам Даламбера и Коши можно лишь утверждать, что в этом случае ряд из абсолютных величин членов ряда (35.1),

т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится, что лишь означает, что заданный ряд не сходится абсолютно.

На самом деле из (35.60) и из (35.61) следует, что данный ряд (35.1) вообще расходится. Действительно, как видно из доказательства признака Даламбера, соответственно признака Коши, применительно к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ (см. теоремы 8 и 9 в п. 35.6)

при выполнении каждого из условий (35.60) и (35.61) в отдельности последовательность $\{|u_n|\}$ не стремится к нулю, следовательно не стремится к нулю и последовательность $\{u_n\}$, т. е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда.

Полученные признаки расходимости ряда также обычно называются *признаками Даламбера и Коши*.

35.12. СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ, НЕ СХОДЯЩИЕСЯ АБСОЛЮТНО.

ТЕОРЕМА РИМАНА

Если ряд сходится, но не абсолютно, то, как ниже будет показано, уже нельзя утверждать, что, переставив его члены в другом порядке, получим сходящийся к той же сумме ряд. Парадокс в конце п. 35.9 и объясняется этим обстоятельством: получившийся там ряд (35.45) отличается порядком членов от данного сходящегося, но не абсолютно, ряда (35.42), и потому нельзя было утверждать, что его сумма также равна S . Более того, получившееся противоречие показывает, что это заведомо не так.

Итак, сумма ряда зависит от порядка слагаемых, т. е. коммутативный закон сложения не имеет места для неабсолютно сходящихся рядов.

Если в данном ряде сгруппировать каким-либо образом его члены, не нарушая их порядка, и сложить, то последовательность частичных сумм получившегося ряда будет являться подпоследовательностью частичных сумм исходного ряда. Поэтому, если исходный ряд сходится, то будет сходиться и вновь полученный, причем суммы обоих рядов будут одинаковы. Однако, если данный ряд расходится, то второй ряд может сходиться. Например, ряд $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ расходится. Объединив же попарно его члены: $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$, получим сходящийся ряд. Таким образом, вообще говоря, для рядов неверен и ассоциативный закон сложения.

Рассмотрим некоторые свойства сходящихся, но не абсолютно, рядов с действительными членами. Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \quad (35.62)$$

Обозначим через $u_1^+, u_2^+, \dots, u_n^+, \dots$ его неотрицательные члены: $u_n^+ \geq 0$, а через $-u_1^-, -u_2^-, \dots, -u_n^-, \dots$ его отрицательные члены: $u_n^- > 0$, взятые в том же порядке, в каком они расположены в ряде (35.56). Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+, \quad (35.63)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-. \quad (35.64)$$

Отметим, что если ряд (35.63) содержит лишь конечное число членов, отличных от нуля, или ряд (35.64), все члены которого по определению отличны от нуля, состоит лишь из конечного числа членов, то начиная с некоторого номера, все члены исходного ряда (35.62) имеют один и тот же знак, и, следовательно, его сходимость равносильна абсолютной сходимости.

Лемма 3. Если ряд (35.62) сходится, но не абсолютно, то оба ряда (35.63) и (35.64) расходятся.

Доказательство. Пусть ряд (35.62) сходится, т. е. существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n, \quad (35.65)$$

где s_n — его частичные суммы, $n = 1, 2, \dots$. Обозначим через s_m^+ , $m = 1, 2, \dots$ частичную сумму порядка m ряда (35.63), а через s_k^- , $k = 1, 2, \dots$ — частичную сумму порядка k ряда (35.64). Для удобства положим еще $s_0^+ = s_0^- = 0$. Тогда для любого натурального n существуют такие неотрицательные целые $m = m(n)$ и $k = k(n)$, что

$$s_n = s_m^+ - s_k^-, \quad n = m + k; \quad (35.66)$$

при этом поскольку ряд (35.62) сходится не абсолютно, то оба ряда (35.63) и (35.64) содержат бесконечно много членов, отличных от нуля, и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} k(n) = +\infty \quad (35.67)$$

Обозначим теперь через \tilde{s}_n частичную сумму порядка n ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \quad (35.68)$$

Тогда, очевидно,

$$\tilde{s}_n = s_m^+ + s_k^-. \quad (35.69)$$

Поскольку данный ряд (35.62) не сходится абсолютно, т. е. поскольку расходится ряд (35.68), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{s}_n = +\infty. \quad (35.70)$$

Оба слагаемых правой части равенства (35.69) неотрицательны, поэтому из (35.70) и (35.67) следует, что хоть одно из указанных слагаемых стремится к бесконечности, когда $n \rightarrow \infty$. Возвращаясь теперь к равенству (35.66), видим, что левая часть этого равенства имеет конечный предел (см. (35.65)), а одна из сумм s_m^+ и s_k^- , по доказанному, стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$. Это возможно лишь при условии, что вторая из рассматриваемых сумм также стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$.

Итак, оба ряда (35.63) и (35.64) расходятся. \square

Теорема 17 (Риман). *Если ряд (35.62) сходится, но не абсолютно, то, каково бы ни было число A , можно так переставить члены этого ряда, что сумма получившегося ряда будет равной A .*

Доказательство. Снова рассмотрим ряды (35.63) и (35.64). Согласно лемме,

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^+ = +\infty, \quad (35.71)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^- = +\infty. \quad (35.72)$$

Пусть для определенности $A \geq 0$. Выберем число n_1 так, чтобы

$$u_1^+ + u_2^+ + \dots + u_{n_1}^+ > A, \quad (35.73)$$

причем в случае, когда номер $n_1 = 1$ не удовлетворяет этому условию, выбор n_1 произведем еще таким образом, чтобы при этом выполнялось также и неравенство

$$u_1^+ + u_2^+ + \dots + u_{n_1-1}^+ \leq A. \quad (35.74)$$

Существование номеров n_1 , для которых выполняется условие (35.73), следует из условия (35.71); для того, чтобы при этом выполнялось и условие (35.74), надо взять наименьший из этих номеров n_1 .

Далее, выберем из ряда (35.64) n_2 первых членов так, чтобы

$$u_1^+ + \dots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \dots - u_{n_2}^- < A,$$

причем в случае, когда номер $n_2 = 1$ не удовлетворяет этому условию, то выбор n_2 произведем таким образом, чтобы при этом выполнялось еще и неравенство

$$u_1^+ + \dots + u_{n_1-1}^+ - u_1^- - \dots - u_{n_2-1}^- \geq A.$$

Существование такого номера n_2 доказывается, исходя из (35.72), аналогично существованию номера n_1 .

Снова выберем подряд из ряда (35.63) члены до некоторого номера n_3 так, чтобы выполнялось неравенство

$$u_1^+ + \dots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \dots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \dots + u_{n_3}^+ > A$$

и (при $n_3 > n_1 + 1$) — неравенство

$$u_1^+ + \dots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \dots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \dots + u_{n_3-1}^+ \leq A.$$

Продолжая этот процесс дальше, получим ряд

$$u_1^+ + \dots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \dots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \dots + u_{n_3}^+ - u_{n_2+1}^- - \dots - u_{n_4}^- + \dots \quad (35.75)$$

Для последовательности его частичных сумм

$$s_{n_1}, s_{n_1+n_2}, s_{n_2+n_3}, \dots, s_{n_k+n_{k+1}}, \dots, k=1, 2, \dots,$$

в силу построения выполняются неравенства

$$s_{n_1} > A, s_{n_1+n_2} < A, s_{n_2+n_3} > A, \dots,$$

причем отклонение от числа A каждой из указанных частичных сумм $s_{n_k+n_{k+1}}$ не превышает ее последнего члена:

$$|A - s_{n_k+n_{k+1}}| \leq u_{n_{k+1}}^{\pm}. \quad (35.76)$$

Здесь через $u_{n_{k+1}}^{\pm}$ обозначена абсолютная величина члена ряда (35.75) с номером n_{k+1} , наверху у него в ряде (35.75) стоит индекс «+» или «-».

В силу сходимости исходного ряда (35.62) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

и так как при $k \rightarrow \infty$ номер члена $u_{n_{k+1}}^{\pm}$ в ряде (35.62) также стремится к ∞ , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_{k+1}}^{\pm} = 0.$$

Поэтому из (35.76) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{n_k+n_{k+1}} = A. \quad (35.77)$$

Если теперь взять любую частичную сумму s_n ряда (35.75), то в силу конструкции этого ряда всегда можно найти такой номер $k = k(n)$, что будет иметь место либо неравенство

$$s_{n_k+n_{k+1}} \leq s_n \leq s_{n_{k+1}+n_{k+2}},$$

либо неравенство

$$s_{n_k+n_{k+1}} \geq s_n \geq s_{n_{k+1}+n_{k+2}},$$

а потому из (35.77) следует, что и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = A. \quad \square$$

Упражнение 12. Доказать, что если ряд (35.62) сходится, но не абсолютно, то можно так переставить его члены, что полученный ряд будет расходиться. В частности, можно сделать так, чтобы его сумма равнялась $+\infty$, $-\infty$, а также и так, чтобы последовательность его частичных сумм не имела бы ни конечного, ни бесконечного предела.

35.13. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АБЕЛЯ. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ДИРИХЛЕ И АБЕЛЯ

В этом пункте будут доказаны достаточные признаки сходимости числовых рядов, пригодные и для рядов с комплексными членами.

Предварительно рассмотрим одно преобразование сумм вида

$$S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n, \quad (35.78)$$

где $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, n$ — комплексные числа. Положим

$$B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n,$$

тогда

$$b_1 = B_1, b_2 = B_2 - B_1, \dots, b_n = B_n - B_{n-1}$$

и

$$S = a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + \dots + a_n (B_n - B_{n-1}).$$

Раскрыв скобки и группируя по-новому члены, получим равенство

$$S = (a_1 - a_2) B_1 + (a_2 - a_3) B_2 + \dots + (a_{n-1} - a_n) B_{n-1} + a_n B_n.$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_n B_n. \quad (35.79)$$

Это преобразование сумм вида (35.78) называется *преобразованием Абеля**; оно является в известном смысле аналогом интегрирования по частям. Эта аналогия особенно бросается в глаза, если формулу (35.79) записать в виде

$$\sum_{i=2}^n a_i (B_i - B_{i-1}) = (a_n B_n - a_1 B_1) - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) B_i.$$

Докажем с помощью преобразования Абеля лемму.

Лемма 4 (неравенство Абеля). Если

$$a_i \geq a_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (35.80)$$

или

$$a_i \leq a_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (**)$$

и

$$|b_1 + \dots + b_i| \leq B, \quad b_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (35.82)$$

то

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq B (|a_1| + 2|a_n|). \quad (35.83)$$

* Н. Абель (1802—1829) — норвежский математик.

** Из этих неравенств следует, что числа $a_i, i = 1, 2, \dots, n$, действительны.

Действительно, согласно условиям (35.80) или (37.81), все разности $a_i - a_{i+1}$ в формуле (35.79) одного знака, и поэтому в силу формулы (35.79) и условия (35.82) имеем:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}| |B_i| + |a_n| |B_n| \leq \\ &\leq B \left[\left| \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) \right| + |a_n| \right] = B[|a_1 - a_n| + |a_n|] \leq B[|a_1| + 2|a_n|]. \quad \square \end{aligned}$$

Существенно обратить внимание на то, что в неравенстве Абеля оценка рассматриваемой суммы дается через первый и последний ее члены и не зависит от числа слагаемых в этой сумме.

Теорема 18 (признак Дирихле). Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad (35.84)$$

такой, что последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм $\{B_n\}$ ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b_n \in \mathbb{C}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

ограничена, тогда ряд (35.78) сходится.

Доказательство. В силу ограниченности последовательности $\{B_n\}$ существует такое число $B > 0$, что $|B_n| \leq B$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что для любого $n = 2, 3, \dots$ и любого целого $p \geq 0$

$$\left| \sum_{i=n}^{n+p} b_i \right| = |B_{n+p} - B_{n-1}| \leq |B_{n+p}| + |B_{n-1}| \leq 2B \quad (35.85)$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Из условия $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ следует существование такого номера n_ε , что для всех $n \geq n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}. \quad (35.86)$$

Теперь, применив неравенство Абеля (35.83) к сумме $\sum_{i=n}^{n+p} a_i b_i$, где $n \geq n_\varepsilon$, и приняв во внимание неравенства (35.85) и (35.86), получим:

$$\left| \sum_{i=n}^{n+p} a_i b_i \right| \leq 2B (|a_n| + 2|a_{n+p}|) < \varepsilon,$$

отсюда, согласно критерию Коши, и следует, что ряд (35.84) сходится. \square

В качестве примера рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}. \quad (35.87)$$

Прежде всего, если $\alpha \neq 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sin k\alpha &= \sum_{k=1}^n \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin k\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n \left[\cos \left(k - \frac{1}{2} \right) \alpha - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \alpha \right]}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{1}{2} \alpha - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\sin \frac{n+1}{2} \alpha \sin \frac{n}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

И ПОЭТОМУ

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin k\alpha \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|}.$$

Если же $\alpha = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то все члены сумм $\sum_{k=1}^n \sin k\alpha$ равны нулю, поэтому эти суммы при любом n равны нулю и, следовательно, ограничены. Таким образом при всех α суммы $\sum_{k=1}^n \sin k\alpha$ ограничены.

С другой стороны, последовательность $\{1/n\}$ монотонно убывает и стремится к нулю, поэтому по признаку Дирихле ряд (35.87) сходится при любом α .

Заметим, что признак Лейбница (см. п. 35.9) следует из признака Дирихле. Действительно, если в ряде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad (35.88)$$

где $a_n \geq a_{n+1} > 0$, положить $b_n = (-1)^n$, то, очевидно, суммы $b_1 + \dots + b_n$, $n = 1, 2, \dots$, равны нулю или единице и потому

ограничены и, значит, по признаку Дирихле ряд (35.88) сходится.

Из неравенства Абеля (35.83) можно получить еще один признак сходимости ряда.

Теорема 19 (признак Абеля). Если последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$, сходится, то ряд (35.78) также сходится.

Доказательство. В силу ограниченности последовательности $\{a_n\}$ существует такое число $M > 0$, что для всех $n = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство $|a_n| \leq M$.

Пусть теперь задано $\varepsilon > 0$. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует существование такого номера n_ε , что для всех номеров $n \geq n_\varepsilon$ и всех целых $p \geq 0$ выполняется неравенство $\left| \sum_{k=0}^p b_{n+k} \right| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Поэтому для всех номеров $n \geq n_\varepsilon$ и всех целых $p \geq 0$, согласно лемме 4, справедливо неравенство

$$\left| \sum_{k=0}^p a_{n+k} b_{n+k} \right| < \frac{\varepsilon}{3M} (|a_n| + 2|a_{n+p}|) < \varepsilon.$$

В силу критерия Коши сходимости рядов это означает, что ряд (35.84) сходится. \square

Пример. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \cos \frac{\pi}{n}}{\ln \ln n}. \quad (35.89)$$

Заметим, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln \ln n}$ сходится согласно признаку Дирихле: последовательность $\frac{1}{\ln \ln n}$ монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \sin n\alpha$ ограничена (см. предыдущий пример). Последовательность же $\cos \frac{\pi}{n}$, $n = 2, 3, \dots$, монотонна, поэтому по признаку Абеля ряд (35.89) сходится при всех α .

**35.14*. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОСТАТКОВ
СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ И РОСТА ЧАСТИЧНЫХ СУММ
НЕКОТОРЫХ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ**

Подобно несобственным интегралам для рядов бывает нужно выяснить не только вопрос об их сходимости, но в случае сходимости ряда оценить ее скорость, а в случае расходимости выяснить характер поведения его частичных сумм при возрастании их номера.

В случае рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

где f — неотрицательная убывающая функция, на подобные вопросы иногда удается получить ответы с помощью метода, примененного при доказательстве интегрального признака сходимости рядов (см. п. 35.7). Действительно, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится,

а следовательно, сходится и интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$, то, обозначив, как обычно, через r_n остаток рассматриваемого ряда, получим неравенство

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^k f(x) dx = \int_n^{+\infty} f(x) dx. \quad (35.90)$$

Это и есть искомая оценка остатка ряда, показывающая, что при $n \rightarrow \infty$ этот остаток убывает не медленнее, чем интеграл $\int_n^{+\infty} f(x) dx$.

Аналогично получается и оценка снизу для остатка ряда:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \geq \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_k^{k+1} f(x) dx = \int_{n+1}^{\infty} f(x) dx. \quad (35.91)$$

Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится, а следовательно, расходится и интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$, то, заметив, что

$$0 \leq f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) - f(k+1)$$

и просуммировав эти неравенства по k от 1 до n , получим:

$$\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx \leq f(1) - f(n+1) < f(1).$$

Из приведенных неравенств следует, что последовательность

$$\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx, \quad n=1, 2, \dots,$$

монотонно возрастает и ограничена сверху, а потому стремится к конечному пределу. Иначе говоря, существует такая постоянная c , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx \right] = c. \quad (35.92)$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^{n+1} f(x) dx + c + \varepsilon_n, \quad n=1, 2, \dots, \quad (35.93)$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Оно показывает, что с точностью до бесконечно малой последовательности частные суммы расходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ растут так же, как $\int_1^{n+1} f(x) dx + c$, где c — некоторая постоянная.

Примеры. 1. Рассмотрим гармонический ряд $\sum_{n=1}^n \frac{1}{n}$, который

полагая $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$, запишем в виде $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Функция $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$, удовлетворяет условиям теоремы 10, и поскольку $\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$, то из доказанного следует, что существует такая постоянная C , что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln(n+1) + C + \varepsilon_n, \quad n=1, 2, \dots,$$

где $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$. Эта постоянная C называется *постоянной Эйлера*. Замечая, что $\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, в полученной формуле можно заменить $\ln(n+1)$ на $\ln n$ (при этом, конечно, изменится и последовательность ε_n , но она останется бесконечно малой последовательностью):

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n, \quad n=1, 2, \dots \quad (35.94)$$

Любопытно заметить, что до сих пор не удается выяснить природу эйлеровой постоянной в том смысле, что неизвестно даже, является ли она рациональным числом или нет.

Из формулы (35.94) очевидно следует асимптотическое равенство

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \sim \ln n, \quad n \rightarrow \infty.$$

2. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $0 < \alpha < 1$.

В этом случае возьмем функцию $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, $x \geq 1$, тогда

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}.$$

Из (35.92) и (35.93) для данного случая следует, что существует такая постоянная c_{α} , что

$$1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} + c_{\alpha} + \varepsilon_n,$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Отсюда получаем асимптотическое равенство

$$1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

3. Рассмотрим сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 1$.

Взяв снова в качестве функции f функцию $1/x^{\alpha}$ и замечая, что

$$\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

в силу формул (35.90) и (35.91) получим:

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}},$$

откуда

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

4. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \quad (35.95)$$

Оценим его остаток:

$$\begin{aligned}
 0 \leq r_n &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right] < \\
 &< \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \right] = \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)^2 n!} < \frac{1}{n!n}.
 \end{aligned}$$

В дальнейшем будет показано, что сумма ряда (35.95) равна числу e (см. (37.40) в п. 37.6). Следовательно, если s_n — частичная сумма ряда (35.95) порядка n , то $e = s_n + r_n$, $r_n \geq 0$, откуда

$$0 \leq e - s_n < \frac{1}{n!n}.$$

Таким образом, число e можно приближенно вычислять в виде суммы

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

причем полученная оценка указывает точность получающихся приближений.

35.15. О СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ МЕТОДОМ СРЕДНИХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ

Иногда представляет интерес изучение расходящихся рядов т. е. рядов, частичные суммы которых не стремятся к конечному пределу. Как мы уже видели, подобные ряды дают возможность получать асимптотические формулы (см. п. 35.14*, а также п. 37.10*). Изучение расходящихся рядов целесообразно, в частности, в том случае, когда для них удастся определить надлежащим способом понятие суммы. Различные методы определения сумм рядов называются *методами суммирования рядов*. Метод суммирования ряда называется регулярным, если для сходящегося ряда его сумма, определенная по этому методу, совпадает с обычной его суммой (в этом случае говорят: регулярный метод суммирует сходящийся ряд к его сумме).

Рассмотрим так называемый метод суммирования ряда средними арифметическими его частичных сумм. Пусть дан ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

и пусть

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

— последовательность его частичных сумм. Обозначим через σ_n среднее арифметическое первых n членов этой последовательности

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}.$$

Определение 5. Ряд называется суммируемым методом средних арифметических к числу σ , если последовательность $\{\sigma_n\}$ средних арифметических его частичных сумм сходится к σ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma.$$

Метод суммирования средними арифметическими является регулярным методом суммирования, так как из того, что некоторая последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, следует, что последовательность, составленная из средних арифметических первых ее n членов

$$\left\{ \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

имеет тот же предел (см. пример 5 в п. 3.1).

С другой стороны существуют расходящиеся ряды, которые суммируются методом средних арифметических. Таким примером является ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (35.96)$$

В этом случае $s_{2k} = 0$, $s_{2k-1} = 1$, $\sigma_{2k} = \frac{1}{2}$, $\sigma_{2k-1} = \frac{k}{2k-1}$, $k = 1, 2, \dots$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$, т. е. ряд (35.96) суммируется методом средних арифметических.

С применением суммирования рядов методом средних арифметических мы встретимся в п. 55.6.

Упражнения. Исследовать сходимость и абсолютную сходимость следующих рядов:

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{-n}}{n^3+1}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n \ln n}{n^2}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} ({}^n\sqrt{a}-1).$$

$$16. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n} \right)^n.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right).$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}} \right].$$

$$22. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}.$$

$$25. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^{\alpha} + (-1)^n} \right].$$

$$23. \sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1}.$$

Задача 23 (признак Дю Буа Реймона *) сходимости ряда). Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ (a_n и b_n — комплексные числа) сходится, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ абсолютно сходится.

Задача 24 (признак Дедекинда сходимости ряда). Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ (a_n и b_n — комплексные числа) сходится, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ абсолютно сходится, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ и частные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены.

§ 36. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

36.1. СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И РЯДОВ

В настоящем параграфе будут рассматриваться последовательности и ряды, членами которых являются некоторые, вообще говоря, комплекснозначные функции, т. е. последовательности

$$f_n(x) \in \mathbf{C}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (36.1)$$

и соответственно ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad u_n(x) \in \mathbf{C}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (36.2)$$

При каждом фиксированном значении аргумента x эти последовательности и ряды, очевидно, представляют собой уже рассматривавшиеся числовые последовательности и ряды.

Пусть E — некоторое множество элементов, в частности множество точек прямой, плоскости n -мерного пространства или вообще элементов произвольной природы, и пусть (36.1) — последовательность функций, которые определены на множестве E и значениями которых являются, вообще говоря, комплексные числа.

*) П. Дю Буа Реймон (1831 — 1889) — немецкий математик.