21. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$.

22. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$.

23. $\sum_{n=2}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\frac{n-1}{n+1}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}\right]$.

25. $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}\right]$.

Задача 23 (признак Дю Буа Реймона*) сходимости ряда). Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ (a_n и b_n — комплексные числа) сходится, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ абсолютно сходится.

Задача 24 (признак Дедекинда сходимости ряда). Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ (a_n и b_n — комплексные числа) сходится, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ абсолютно сходится, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ и частные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ ограничены.

§ 36. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

36.1. СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И РЯДОВ

В настоящем параграфе будут рассматриваться последовательности и ряды, членами которых являются некоторые, вообще говоря, комплекснозначные функции, т. е. последовательности

$$f_n(x)\in C,\quad n=1,\ 2\ \ldots \tag{36.1}$$

и соответственно ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),\quad u_n(x)\in C,\quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{36.2}$$

При каждом фиксированном значении аргумента x эти последовательности и ряды, очевидно, представляют собой уже рассматривавшиеся числовые последовательности и ряды.

Пусть E — некоторое множество элементов, в частности множество точек прямой, плоскости n-мерного пространства или вообще элементов произвольной природы, и пусть (36.1) — последовательность функций, которые определены на множестве E и значениями которых являются, вообще говоря, комплексные числа.

*) П. Дю Буа Реймон (1831—1889) — немецкий математик.

Определение 1. *Последовательность* (36.1) *называется ограниченной на множестве E, если существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in E$ и всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства*

$$|f_n(x)| \leqslant M.$$

(Иногда в этом случае последовательность (36.1) называется также *равномерно ограниченной*.)

Определение 2. *Последовательность* (36.1) *называется убывающей (возрастающей) на множестве E, если для всех $x \in E$ и всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства*

$$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$$

(*соответственно, если для всех $x \in E$ и всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства*

$$f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)).$$

Это определение, очевидно, предполагает, что функции $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, принимают действительные значения.

Определение 3. *Последовательность* (36.1) *называется сходящейся в точке**) $x_0 \in E$, *если числовая последовательность* $\{f_n(x_0)\}$ *сходится.*

Последовательность (36.1) *называется сходящейся на множестве E, если она сходится в каждой точке множества E.*

Если $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in E$, *то говорят, что последовательность* (36.1) *сходится к функции* $f(x)$, $x \in E$.

Аналогичное определение можно дать и для ряда (36.2).

Определение 3′. *Ряд* (36.2) *называется сходящимся в точке* $x_0 \in E$, *если сходится числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

Ряд (36.2) *называется сходящимся на множестве E, если он сходится в каждой точке этого множества.*

Определение 4. *Ряд* (36.2) *называется абсолютно сходящимся на множестве E, если на множестве E сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$.

Подобно случаю числовых рядов, сумма

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

называется n-й *частичной суммой* ряда (36.2); предел частичных сумм сходящегося на множестве E ряда (36.2) называется его

*) Мы называем элементы множества E точками.

суммой $s(x)$:

$$s(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x).$$

Ряд

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \tag{36.3}$$

называется n-м *остатком ряда* (36.2). Остаток ряда сходится на E тогда и только тогда, когда на E сходится сам ряд (36.2). Если в этом случае сумму остатка ряда обозначить через $r_n(x)$, то

$$s(x)=s_n(x)+r_n(x).$$

Как и в случае числовых рядов, согласно определению, каждый функциональный ряд является парой последовательностей $\{u_n(x)\}$ и $\{s_n(x)\}$, где $u_n(x)$ — его члены, а $s_n(x)$ — частичные суммы:

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x),\quad n=1,\ 2\ldots.$$

При этом для каждой функциональной последовательности (36.1) существует ряд (36.2), для которого она является последовательностью его частичных сумм. Члены этого ряда определяются однозначно:

$$u_1(x)=f_1(x),\quad u_n(x)=f_n(x)-f_{n-1}(x),\quad n=2,\ 3\ldots.$$

Это обстоятельство дает возможность перефразировать всякую теорему, доказанную для функциональных рядов, в соответствующую теорему для функциональных последовательностей, и наоборот. Мы неоднократно будем использовать это обстоятельство.

Примеры. 1. Пусть дан ряд

$$1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots, \tag{36.4}$$

z — комплексное число. Исследуем его абсолютную сходимость, т. е. сходимость ряда с n-м членом $u_n=\frac{|z|^n}{n!}$. Применив признак Даламбера, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{n+1}=0$$

при любом комплексном z. Таким образом, ряд (36.4) абсолютно, а значит, и просто сходится при любом комплексном z, или, как обычно говорят, на всей комплексной плоскости.

2. Изучим сходимость ряда

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\ldots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\ldots, \tag{36.5}$$

x — вещественное число. Этот ряд сходится при всех x. Действительно, если $x \neq 0$, то мы имеем сумму геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = \frac{1}{1+x^2}, \quad 0 < q < 1.$$

И в этом случае сумма $s(x)$ ряда (36.5) легко вычисляется:

$$s(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

Если же $x = 0$, то все члены ряда (36.5) равны нулю, поэтому он, очевидно, сходится и $s(0) = 0$.

Таким образом,

$$(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x = 0, \\ 1 + x^2 & \text{для } x \neq 0. \end{cases}$$

График функции $s(x)$ изображен на рис. 136.

Как видно, несмотря на то, что все члены ряда (36.5) являются непрерывными функциями и ряд сходится во всех точках действительной оси, его сумма является разрывной функцией. Следовательно, в случае сходящихся рядов (36.2), членами которых являются непрерывные действительные функции $u_n(x)$, их сумма $s(x)$, вообще говоря, не является непрерывной, т. е.

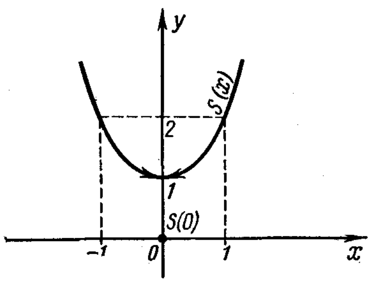

Рис. 136

$$\lim_{x \to x_0} s(x) \neq s(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

или, что то же,

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u(x) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x).$$

Таким образом, предел суммы бесконечного числа слагаемых не обязательно равен сумме их пределов.

Рассмотренный ряд (36.5) показывает, как при предельных процессах (геометрическая прогрессия) из простых непрерывных функций возникают функции значительно более сложной природы — разрывные функции.

В дальнейшем мы выясним условия, при которых можно гарантировать непрерывность суммы сходящегося ряда непрерывных функций.

Упражнения. Исследовать сходимость и абсолютную сходимость рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^2}$

36.2. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Определение 5. *Пусть заданы последовательность функций* (36.1) *и функция f, определенные на множестве E. Будем говорить, что указанная последовательность сходится к функции f равномерно на множестве E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что если $n \geqslant n_\varepsilon$, то для всех $x \in E$ выполняется неравенство*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad (36.6)$$

Последовательность (36.1) *называется равномерно сходящейся на множестве E, если существует функция f, к которой она равномерно сходится на E.*

Очевидно, что если последовательность (36.1) равномерно сходится к функции f на множестве E, то она и просто сходится к этой функции на E.

Если последовательность $\{f_n\}$ сходится на множестве E к функции f, то мы будем символически записывать это следующим образом:

$$f_n \underset{E}{\longrightarrow} f.$$

Если же эта последовательность равномерно сходится на E к функции f, то будем писать

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f.$$

Заметим, что если последовательность (36.1) просто сходится к функции f на множестве E, то это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $x \in E$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon;\ x)$, зависящий как от ε, так и от x, такой, что для всех номеров $n \geqslant n_0$ имеет место неравенство (36.6).

Сущность равномерной сходимости последовательности функций состоит в том, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такой номер n_ε, зависящий только от заданного ε и не зависящий от выбора точки $x \in E$, что при $n \geqslant n_\varepsilon$ неравенство (36.6) будет выполняться всюду на множестве E, т. е. «графики» функций f_n будут расположены в «ε-полоске», окружающей график функции f (рис. 137).

Таким образом, в случае равномерной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n (именно при $n \geqslant n_\varepsilon$) значения функций f_n приближают функцию f с погрешностью, меньшей ε, сразу на всем множестве E.

Запишем для наглядности определения сходящихся и равномерно сходящихся на множестве E последовательностей с помощью символов существования и всеобщности:

$$f_n \xrightarrow[E]{} f \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall\varepsilon>0)\,(\forall x\in E)\,(\exists n_\varepsilon)\,(\forall n\geqslant n_\varepsilon)\,|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon;$$

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall\varepsilon>0)\,(\exists n_\varepsilon)\,(\forall x\in E)\,(\forall n\geqslant n_\varepsilon):|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

В этой записи одно определение от другого отличается перестановкой символов $(\forall x\in E)$ и $(\exists n_\varepsilon)$.

Примеры. 1. Последовательность

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n\ldots \tag{36.7}$$

на отрезке $[0, q]$, $0<q<1$, сходится равномерно к функции, тождественно равной нулю. Действительно, если $0\leqslant x\leqslant q$, то

$$0\leqslant x^n\leqslant q^n,\quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{36.8}$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$, то для любого фиксированного $\varepsilon>0$ существует такое n_ε, что $q^n<\varepsilon$ для всех $n\geqslant n_\varepsilon$. В силу неравенства (36.8) $0\leqslant x^n<\varepsilon$ для всех $n\geqslant n_\varepsilon$ и всех $x\in[0, q]$.

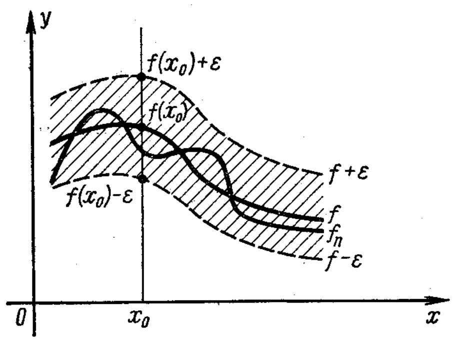

Рис. 137

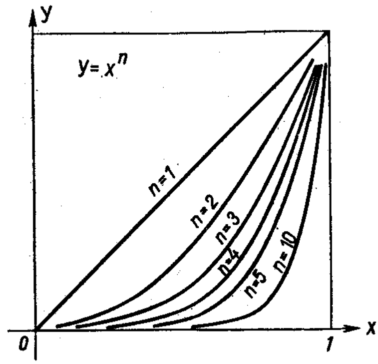

Рис. 138

2. Та же последовательность (36.7) на полуинтервале $[0, 1)$ также, очевидно, сходится к функции, тождественно равной нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$, $0\leqslant x<1$. Однако, в этом случае сходимость уже не является равномерной (рис. 138). Действительно, если последовательность x^n, $n=1, 2, \ldots$, равномерно сходилась бы на полуинтервале $[0, 1)$ к некоторой функции, то она и просто сходилась бы к этой функции. В силу этого последовательность (36.7) может равномерно на полуинтервале $[0, 1)$ сходиться

только к функции, равной нулю во всех точках этого полуинтервала.

Заметим, что при любом фиксированном натуральном n $\lim\limits_{x\to 1} x^n = 1$. Следовательно, каково бы ни было ε, $0 < \varepsilon < 1$, при фиксированном n найдется такое x_ε, $0 < x_\varepsilon < 1$, что $x_\varepsilon^n \geqslant \varepsilon$, (например, при $x_\varepsilon = \sqrt[n]{\varepsilon}$ будем иметь $x_\varepsilon^n = \varepsilon$). Поэтому при фиксированном ε, $0 < \varepsilon < 1$, не существует такого номера N, что для всех $n \geqslant N$ и всех $x \in [0, 1)$ будет выполняться неравенство (36.6) при $f_n(x) = x^n$, $f(x) = 0$, $0 \leqslant x < 1$. Более того, какое бы N ни взять, для каждого $n \geqslant N$ найдется такое $x \in [0, 1)$, что для него будет выполняться неравенство, противоположное неравенству (36.6), т. е.

$$|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$$

(в качестве конкретного x здесь можно взять, например, x_ε).

Итак, неравномерная сходимость последовательности (36.7) на полуинтервале $[0, 1)$ доказана. Заметим, что из проведенных рассуждений следует, что последовательность (36.7) не сходится равномерно и на любом интервале вида $(r, 1)$, где $0 \leqslant r < 1$, в частности, на интервале $(0, 1)$.

Следует обратить внимание на то, что если последовательность функций $f_n(x)$, определенных на множестве E, не сходится равномерно на некотором его подмножестве $E_0 \subset E$, то она заведомо не сходится равномерно и на самом множестве E: если условия определения 1 не выполняются для всех точек $x \in E_0$, то они заведомо не выполняются и для всех точек множества E. Вместе с тем, если последовательность функций равномерно сходится на некотором множестве, то она и подавно равномерно сходится на каждом его подмножестве.

Отсюда следует, например, что последовательность (36.7), сходящаяся на отрезке $[0, 1]$ к функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{при } x = 1 \end{cases}$$

не сходится на нем равномерно, ибо она уже не сходится равномерно на полуинтервале $[0, 1)$.

Перейдем к описанию критериев равномерной сходимости. Для функции f и последовательности функций $\{f_n\}$, заданных на некотором множестве E, будем рассматривать последовательность чисел (конечных или бесконечных)

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{36.9}$$

принадлежащих, вообще говоря, расширенному множеству действительных чисел $\overline{\boldsymbol{R}}$ (см. п. 2.5), и ее предел (см. п. 3.2).

Если последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве E к функции f, то существует такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ верхние грани (36.9) конечны. Действительно, если $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$, то согласно определению равномерной сходимости, для любого $\varepsilon > 0$, например, для $\varepsilon = 1$ существует такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ и всех $x \in E$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < 1,$$

а следовательно, и неравенство

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant 1.$$

Поэтому при $n \geqslant n_0$ все верхние грани (36.9) конечны.

Теорема 1. *Последовательность функций $\{f_n\}$, определенных на множестве E, равномерно сходится на этом множестве к функции f в том и только том случае, когда*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{36.10}$$

Следствие. *Для того чтобы последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходилась на множестве E к функции f необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая числовая последовательность $\{a_n\}$,* что

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \quad a_n \geqslant 0, \tag{36.11}$$

и существовал такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ и всех $x \in E$ выполнялось неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n. \tag{36.12}$$

Доказательство теоремы. Если выполнены условия определения 5, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in E$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Взяв указанное n_ε для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ будем иметь

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

а это, согласно определению предела числовой последовательности, и означает выполнение условия (36.10).

Обратно, если условие (36.10) выполнено, то по определению конечного предела последовательности элементов из $\boldsymbol{R}$, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in E$ справедливо неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

т. е. выполняются условия определения 5. $\square$

В силу того, что почти все члены последовательности верхних граней (36.9) для равномерно сходящихся последовательностей функций конечны, критерий (36.10) по существу сводит понятие равномерной сходимости функциональной последовательности к понятию сходимости числовой последовательности.

Доказательство следствия. Если $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$, то согласно сказанному выше существует такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ все верхние грани (36.9) конечны. Поэтому за последовательность $\{a_n\}$ можно взять,

$$a_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|, \quad n = n_0, \ n_0 + 1, \ \ldots,$$

(очевидно $a_n \geqslant 0$), выбрав первые члены, $a_1, \ldots, a_{n_0-1}$ произвольным образом. Тогда при $n \geqslant n_0$ условие (36.12) выполняется очевидным образом, а в силу (36.10) будем иметь $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Если же существует числовая последовательность $\{a_n\}$, удовлетворяющая условиям (36.11) и (36.12), то в силу (36.12) для любого $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n.$$

Перейдя в нем к пределу при $n \to \infty$, получим согласно (36.11), что

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Выполнение этого условия и означает (см. теорему 1) равномерную сходимость последовательности $\{f_n\}$ к функции f на множестве E. $\square$.

Примеры 3. Докажем еще раз с помощью условия (36.10), что последовательность x^n, $n = 1, 2, \ldots$, не сходится равномерно на полуинтервале $[0, 1)$. Поскольку предел указанной последовательности на рассматриваемом полуинтервале равен нулю, то сделанное утверждение сразу следует из очевидного (при любом фиксированном $n = 1, 2, \ldots$) равенства $\sup\limits_{x \in [0, 1)} |x^n - 0| = 1$, из которого явствует, что условие (36.10) равномерной сходимости в данном случае не выполняется.

4. Последовательность $f_n(x) = \frac{1}{n} x^n$, $n = 1, 2, \ldots$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$ (рис. 139).

Действительно, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ и $0<\frac{1}{n}x^n\leqslant\frac{1}{n}$, $0\leqslant x\leqslant\leqslant 1$, $n=1, 2, \ldots$, то высказанное утверждение следует из следствия теоремы 1.

Сформулируем и докажем критерий равномерной сходимости последовательности, обычно также называемый критерием Коши.

Теорема 2 (критерий Коши равномерной сходимости последовательностей). *Для того чтобы последовательность функций f_n, $n=1, 2, \ldots$, определенных на некотором множестве E, равномерно сходилась на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовал такой номер n_ε, что для всех номеров $n\geqslant n_\varepsilon$, всех целых $p\geqslant 0$ и всех точек $x\in E$ выполнялось неравенство*

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon. \tag{36.13}$$

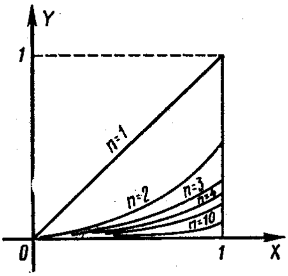

Рис. 139

Доказательство необходимости. Пусть последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве E. Тогда, согласно определению равномерной сходимости, существует функция f такая, что для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n\geqslant n_\varepsilon$ и всех $x\in E$ выполняется неравенство

$$|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, если $n\geqslant n_\varepsilon$ и $p\geqslant 0$, то для всех $x\in E$ получим

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\leqslant|f_{n+p}(x)-f(x)|+|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon.$$

Доказательство достаточности. Если выполнено условие (36.13), то при любом фиксированном $x\in E$ последовательность

$$f_n(x),\quad n=1, 2, \ldots, \tag{36.14}$$

является числовой последовательностью, удовлетворяющей критерию Коши (см. п. 3.7 и п. 23.3) и потому она сходится.

Обозначим предел последовательности (36.14) на множестве E через $f(x)$. Покажем, что последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно к функции f на множестве E. Действительно, в силу условия (36.13) для любого $\varepsilon>0$ существует такое n_ε, что для всех $n\geqslant n_\varepsilon$, всех целых $p\geqslant 0$ и всех $x\in E$ справедливо неравенство

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{36.15}$$

Заметив, что $\lim\limits_{p\to\infty}f_{n+p}(x)=f(x)$, перейдем к пределу в неравенстве (36.15) при $p\to\infty$, тогда для всех $n\geqslant n_\varepsilon$ и всех $x\in E$ получим

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

а это и означает, что $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$. $\square$

В заключение отметим два свойства равномерно сходящихся последовательностей.

1°. *Если последовательности* $\{f_n\}$ *и* $\{g_n\}$ *равномерно на множестве* E *сходятся соответственно к функциям* f *и* g, *то любая линейная комбинация* $\{\lambda f_n+\mu g_n\}$, $\lambda\in\boldsymbol{C}$, $\mu\in\boldsymbol{C}$, *данных последовательностей также равномерно на этом множестве сходится к такой же линейной комбинации предельных функций, т. е. к* $\lambda f+\mu g$.

Доказательство. Если $\lambda=\mu=0$, то утверждение очевидно. Пусть хоть одно из чисел λ или μ отлично от нуля, т. е. $|\lambda|+|\mu|>0$. Зафиксируем произвольно $\varepsilon>0$. В силу условий $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ и $g_n \underset{E}{\rightrightarrows} g$ существует такой номер n_0, что для всех $n\geqslant n_0$ и всех $x\in E$ выполняются неравенства

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{|\lambda|+|\mu|},\quad |g_n(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{|\lambda|+|\mu|},$$

а потому и неравенство

$$|[\lambda f_n(x)+\mu g_n(x)]-[\lambda f(x)+\mu g(x)]|\leqslant$$
$$\leqslant|\lambda||f_n(x)-f(x)|+|\mu||g_n(x)-g(x)|<$$
$$<|\lambda|\frac{\varepsilon}{|\lambda|+|\mu|}+|\mu|\frac{\varepsilon}{|\lambda|+|\mu|}=\varepsilon.$$

Согласно определению равномерной сходимости это и означает, что $\lambda f_n+\mu g_n \underset{E}{\rightrightarrows} \lambda f+\mu g$. $\square$

2°. *Если последовательность* $\{f_n\}$ *равномерно сходится на множестве* E *к функции* f, *а функция* g *ограничена на этом множестве, то последовательность* $\{gf_n\}$ *также равномерно сходится на* E *к функции* gf.

Доказательство. Ограниченность функции g на множестве E означает, что существует такое $M>0$, что для всех $x\in E$ выполняется неравенство $|g(x)|\leqslant M$. В силу же равномерной сходимости на множестве E последовательности $\{f_n\}$ к функции f существует такой номер n_0, что для всех $n\geqslant n_0$ и всех $x\in E$ выполняется неравенство

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{M},$$

а потому и неравенство

$$|g(x)f_n(x)-g(x)f(x)|=|g(x)||f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

Это и означает, что $gf_n \underset{E}{\rightrightarrows} gf$. $\square$

36.3. РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИЕСЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Для рядов, естественно, также можно ввести понятие равномерной сходимости.

Определение. 6. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{36.16}$$

члены которого являются функциями, определенными на множестве E, называется равномерно сходящимся на этом множестве, если последовательность его частичных сумм равномерно сходится на E.

Таким образом, равномерная сходимость ряда (36.16) означает существование такой функции $s(x)$, что

$$s_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} s(x) \tag{36.17}$$

(здесь, как всегда $s_n(x)$ — частичная сумма порядка n ряда (36.16), $n=1, 2, \ldots$).

Поскольку из (36.17) следует, что $s_n(x) \to s(x)$ на E, то $s(x)$ является суммой ряда (36.16).

Положим

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

Тогда $s(x) - s_n(x) = r_n(x)$ и условие (36.17) для сходящегося на множестве E ряда можно переписать в эквивалентной форме:

$$r_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} 0, \tag{36.18}$$

откуда в силу эквивалентности определения 5 равномерной сходимости последовательности функций и условия (36.10) следует, что, *для того чтобы сходящийся на E ряд* (36.16) *равномерно сходился на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in E} |r_n(x)| = 0. \tag{36.19}$$

Таким образом, из равномерной сходимости ряда, в частности, вытекает, что начиная с некоторого номера верхние грани

$$\sup_{x \in E} |r_n(x)|$$

конечны, а условие (36.19) сводит понятие равномерной сходимости ряда к стремлению к нулю числовой последовательности этих верхних граней.

Укажем существенное свойство равномерно сходящихся рядов.

Теорема 3 (необходимое условие равномерной сходимости ряда). *Если ряд* (36.16) *равномерно сходится на множестве E, то по-*

следовательность его членов $u_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, *равномерно стремится к нулю на множестве* E, т. е.

$$u_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} 0.$$

Коротко это свойство выражается следующим образом: *у равномерно сходящегося ряда общий член равномерно стремится к нулю.*

Доказательство. Пусть ряд (36.16) равномерно сходится на множестве E. Обозначим его частичные суммы, как обычно, через $s_n(x)$, а его сумму — через $s(x)$, $x \in E$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in E$ выполняется неравенство

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon/2.$$

Поэтому для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in E$ справедливо также неравенство

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(x)| = |s_{n+1}(x) - s_n(x)| &= \\ = |[s_{n+1}(x) - s(x)] + [s(x) - s_n(x)]| &\leqslant \\ \leqslant |s_{n+1}(x) - s(x)| + |s_n(x) - s(x)| &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Это и означает равномерную (на множестве E) сходимость к нулю последовательности членов равномерно сходящегося на этом множестве ряда. □

Отметим, что в силу условия (36.10) равномерное стремление к нулю общего члена ряда (36.16) означает, что

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in E} |u_n(x)| = 0.$$

С помощью теоремы 3 иногда удается установить, что рассматриваемый ряд не сходится равномерно. Так, ряд, члены которого образуют геометрическую прогрессию, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ не сходится равномерно на интервале $(0, 1)$, ибо, как это было показано в п. 36.2 (см. пример 2) последовательность x^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, членов этого ряда не сходится равномерно к нулю на этом интервале. Отсюда, кстати, следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, где z — комплексное число, также не сходится равномерно в единичном круге $|z| < 1$, ибо он не сходится равномерно уже на подмножестве $(0, 1)$ этого круга.

Часто бывает полезным следующий достаточный признак равномерной сходимости.

Теорема 4 (признак Вейерштрасса). *Пусть даны два ряда: функциональный* (36.16), *членами которого являются функции*

$u_n(x)$, определенные на множестве E, и числовой

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geqslant 0, \ n=1, \ 2, \ \ldots \tag{36.20}$$

Если ряд (36.20) *сходится и для любого $x \in E$* выполняется неравенство

$$|u_n(x)| \leqslant a_n, \qquad n=1, \ 2, \ \ldots, \tag{36.21}$$

то ряд (36.16) абсолютно и равномерно сходится на множестве E.

Абсолютная сходимость ряда (36.16) на E в случае сходимости ряда (36.20) сразу следует по признаку сравнения из неравенства (36.21). Равномерная же сходимость этого ряда легко следует из теоремы 1 этого пункта. Мы, однако, приведем ее непосредственное доказательство.

Пусть $s(x)$ — сумма ряда (36.21) и $s_n(x)$ — его частичная сумма. В силу сходимости ряда (36.20) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_\varepsilon > 0$, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство (см. (35.10)) $\sum\limits_{m=n}^{\infty} a_m < \varepsilon$. Но тогда для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in E$ для остатков $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$ ряда (36.16) (по доказанному выше он абсолютно, а следовательно, и просто сходится, поэтому равенство $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$ имеет смысл) будем иметь

$$|s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| = \left| \sum_{m=n}^{\infty} u_m(x) \right| \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} |u_m(x)| \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} a_m < \varepsilon.$$

Это и означает согласно определению 5 равномерную сходимость ряда (36.16) на множестве E. $\square$

Отметим, что ряд (26.20) называется рядом, мажорирующим ряд (36.16).

В качестве примера возьмем снова ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, члены которого образуют геометрическую прогрессию. Рассмотрим его в круге радиуса $r: |z| \leqslant r$, где $0 < r < 1$. Поскольку числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$ с неотрицательными членами, образующими бесконечно убывающую геометрическую последовательность, сходится, а для членов данного функционального ряда справедлива оценка $|z^n| \leqslant r^n$, ибо $|z| \leqslant r$, то он по признаку Вейерштрасса равномерно сходится во всяком круге $|z| \leqslant r < 1$. Вместе с тем, как это было показано выше, этот ряд не сходится равномерно в круге $|z| < 1$.

Признак Вейерштрасса дает только достаточные условия равномерной сходимости ряда, которые отнюдь не являются необходимыми. Убедиться в этом для рядов, у которых с возрастанием номеров членов чередуются их знаки совсем легко. Действительно, сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (как и всякий сходящийся числовой ряд) можно рассматривать как равномерно сходящийся, например, на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$ ряд: его члены $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ суть функции постоянные на $\boldsymbol{R}$. Вместе с тем всякий числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, удовлетворяющий условию $|u_n| \leqslant a_n$, т. е. в данном случае условию $\frac{1}{n} \leqslant a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, расходится по признаку сравнения. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится равномерно, а сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, удовлетворяющего условиям признака Вейерштрасса, не существует.

Можно показать, что более того условия признака Вейерштрасса не являются необходимыми для равномерной сходимости даже рядов, все члены которых неотрицательны. Чтобы в этом убедиться, приведем пример равномерно сходящегося на отрезке $[0, 1]$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ с неотрицательными членами, для которого тоже не существует сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, удовлетворяющего условию (36.21).

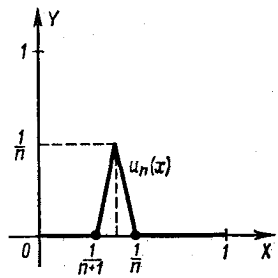

Рис. 140

Определим член ряда $u_n(x)$ следующим образом: $u_n(x) = 0$ на отрезках $\left[0, \frac{1}{n+1}\right]$ и $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $u\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}$ и функция $u_n(x)$ линейна и непрерывна на каждом из отрезков $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\right]$ и $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right), \frac{1}{n}\right]$. Ее график изображен на рис. 140.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$. Действительно, если $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ — остаток этого ряда, $n = 1, 2, \ldots$, то для любого $x \in [0, 1]$ среди его членов существует не более одного, для которого $u_k(x) \neq 0$, $k \geqslant n+1$. При этом, очевидно,

$$0 \leqslant u_k(x) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n+1}, \quad \text{поэтому} \quad 0 \leqslant r_n(x) \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

и, следовательно, $r_n(x) \underset{[0,1]}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, т. е. рассматриваемый ряд равномерно сходится на отрезке $[0, 1]$.

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ такой числовой ряд, что для всех $x \in [0, 1]$ выполняется неравенство $0 \leqslant u_n(x) \leqslant a_n$, то

$$\frac{1}{n} = \max_{[0,1]} u_n(x) \leqslant a_n.$$

Поскольку гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Таким образом, в рассмотренном случае числового ряда, удовлетворяющего, по отношению к функциональному ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, условиям признака Вейерштрасса, заведомо нет.

Перейдем теперь к условиям равномерной сходимости ряда, являющимися одновременно необходимыми и достаточными.

Замечая, что

$$s_{n+p}(x) - s_{n-1}(x) = \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x), \tag{36.22}$$

из теоремы 2 получаем следующий критерий равномерной сходимости.

Теорема 5 (критерий Коши равномерной сходимости рядов). *Для того чтобы ряд* (36.16) *равномерно сходился на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер n_ε,* что для всех *$n \geqslant n_\varepsilon$, всех целых $p \geqslant 0$* и всех *$x \in E$ выполнялось неравенство*

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon. \tag{36.23}$$

Очевидно, что из критерия Коши равномерной сходимости ряда еще раз (если в (36.23) положить $p = 0$) получается теорема 3, т. е. необходимое условие равномерной сходимости ряда (36.16).

Упражнение 3. Выяснить, может ли ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (a_n и z — комплексные числа), у которого бесконечно много коэффициентов отличны от нуля, равномерно сходиться на всей комплексной плоскости.

Примеры. 1. Рассмотрим снова (см. п. 36.1) ряд

$$1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots \qquad (36.4)$$

и покажем, что, каково бы ни было число $r>0$, ряд (36.4) сходится равномерно в круге $|z|\leqslant r$.

Как мы уже видели, ряд (36.4) сходится при любом комплексном z, в частности, при $z=r$, т. е. числовой ряд

$$1+r+\frac{r^2}{2!}+\ldots+\frac{r^n}{n!}+\ldots$$

сходится. Беря его в качестве ряда сравнения (36.20) для ряда (36.4), при $|z|\leqslant r$ имеем $\left|\frac{z^n}{n!}\right|\leqslant\frac{r^n}{n!}$. Поэтому наше утверждение о равномерной сходимости ряда (36.4) непосредственно следует из теоремы 4.

Покажем, что ряд (36.4) не сходится равномерно на всей комплексной плоскости. Это следует из невыполнения в данном случае необходимого условия равномерной сходимости ряда (см. теорему 3). Действительно, при любом фиксированном n_0

$$\lim_{|z|\to\infty}|z^{n_0}/n_0!|=+\infty. \qquad (36.24)$$

Поэтому, если задано $\varepsilon>0$, то, каково бы ни было $n_0>0$, в силу (36.24) можно подобрать z_0 так, чтобы

$$|z_0^{n_0}/n_0!|>\varepsilon,$$

т. е. $z^n/n!$ не стремится равномерно к нулю на всей комплексной плоскости.

2. Исследуем равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x\sin nx}{\sqrt{1+n^2}\,(1+nx^2)}, \qquad -\infty<x<+\infty. \qquad (36.25)$$

Прежде всего заметим, что

$$\left|\frac{x\sin nx}{\sqrt{1+n^2}\,(1+nx^2)}\right|\leqslant\frac{|x|}{\sqrt{1+n^2}\,(1+nx^2)}. \qquad (36.26)$$

Далее, $1+nx^2\geqslant 2|x|\sqrt{n}$ *), поэтому

$$\frac{|x|}{\sqrt{1+n^2}\,(1+nx^2)}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}\,(1+n^2)}\leqslant\frac{1}{2n^{3/2}}. \qquad (36.27)$$

*) Мы воспользовались здесь неравенством $2ab\leqslant a^2+b^2$, которое сразу получается из очевидного неравенства $(a-b)^2\geqslant 0$.

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса в силу неравенства (36.26) и (36.27) исходный ряд (36.25) равномерно сходится на всей действительной оси.

3. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^5x^2} \sin nx. \tag{36.28}$$

Очевидно, $|e^{-n^5x^2} \sin nx| \leqslant n|x|e^{-n^5x^2}$. Найдем максимум функции

$$v_n(x) = n|x|e^{-n^5x^2}$$

при фиксированном n. Функция $v_n(x)$ четная, поэтому достаточно рассмотреть лишь случай $x \geqslant 0$ (почему?). Производная $v_n'(x) = n(1-2n^5x^2)e^{-n^5x^2}$ обращается в ноль в точке $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\,n^{5/2}}$. Поскольку $v_n(x) \geqslant 0$ для всех x, $v_n(0) = 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n(x) = 0$, то в точке x_0 функция $v_n(x)$ имеет максимум (почему?).

Поэтому

$$v_n(x) \leqslant v_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,n^{5/2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\,n^{3/2}} e^{-1/2} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}$$

и так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса ряд (36.28) равномерно сходится на всей вещественной оси.

Метод, примененный для установления равномерной сходимости ряда (36.28) (исследование на экстремум модуля общего члена или его мажоранты методами дифференциального исчисления), является достаточно общим и часто применяется на практике. Этим методом можно было бы исследовать и равномерную сходимость ряда (36.25), однако примененный выше способ исследования этого ряда значительно быстрее приводит к цели.

4. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}. \tag{36.29}$$

По признаку Лейбница (см. п. 35.5) он сходится при любом вещественном x и, как было отмечено там же, остаток ряда оценивается первым своим членом

$$|r_n(x)| < \frac{1}{x^2+n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Из этого следует, что

$$r_n(x) \rightrightarrows 0 \quad \text{при} \quad -\infty < x < +\infty,$$

т. е. ряд (36.29) равномерно сходится на всей действительной оси.

Покажем, что этот ряд не сходится абсолютно во всех точках. Действительно, выберем для данного числа x какое-либо натуральное n_x так, чтобы $x^2 \leqslant n_x$. Тогда для всех $n \geqslant n_x$ будет выполняться неравенство $x^2 \leqslant n$, а следовательно, и неравенство

$$\frac{1}{x^2+n} \geqslant \frac{1}{2n}.$$

А так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то в силу признака сравнения ряд (36.29) не сходится абсолютно.

Упражнение 4. Привести пример ряда, который абсолютно сходится во всех точках некоторого множества, но не сходится на этом множестве равномерно.

Указание. Полезно вспомнить пример 2 из п. 36.1.

Докажем теперь достаточный признак равномерной сходимости, применимый в отличие от признака Вейерштрасса и к не абсолютно сходящимся рядам. Он напоминает по своей формулировке признак Дирихле для сходимости числовых рядов (см. п. 35.13) и впервые встречается в работах Харди *.

Теорема 6. *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x), \tag{36.30}$$

в котором функции $a_n(x)$ *и* $b_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, *определены на множестве* E *и таковы, что*

1) *последовательность* $\{a_n(x)\}$ *монотонна при каждом* $x \in E$ *и равномерно стремится к нулю на* E;

2) *последовательность частичных сумм* $B_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$ *ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$$

ограничена на множестве E.

Тогда ряд (36.30) *равномерно сходится на множестве* E.

Доказательство. В силу условия 2 теоремы существует такое $B > 0$, что $|B_n(x)| \leqslant B$ для всех $x \in E$ и всех $n=1, 2, \ldots$ и поэтому

$$\sum_{k=n}^{n+p} b_k(x) = |B_{n+p}(x) - B_{n-1}(x)| \leqslant |B_{n+p}(x)| + |B_{n-1}(x)| \leqslant 2B$$

для всех $x \in E$, всех $n=2, 3, \ldots$, и всех целых $p \geqslant 0$. Из условия же 1 теоремы следует, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$

* Г. Харди (1877—1947) — английский математик.

существует такой номер n_ε, что для всех $x \in E$ и всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$0 \leqslant |a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6B}.$$

Теперь, применив неравенство Абеля (см. п. 35.13), получим, что

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k(x)\, b_k(x)\right| \leqslant 2B\left[\,|a_n(x)| + 2\,|a_{n+p}(x)|\,\right] < \varepsilon$$

для всех $x \in E$, всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех целых $p \geqslant 0$. Это и доказывает равномерную сходимость ряда (36.30). □

В качестве примера на применение теоремы 6 рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Согласно теореме 6 этот ряд равномерно сходится на любом отрезке $[a, b]$, не содержащем точек вида $2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Действительно, последовательность $a_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, в данном случае является числовой последовательностью, она монотонно убывает и стремится к нулю (а значит, и равномерно стремится к нулю), а суммы $\sum\limits_{k+1}^{\infty} \sin kx$ удовлетворяют неравенству

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \leqslant \max_{[a,\, b]} \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} < +\infty$$

(см. п. 35.13), т. е. ограничены на любом указанном отрезке.

На всяком отрезке, содержащем точки вида $x = 2k\pi$, рассматриваемый ряд не сходится равномерно. В силу свойств синуса это достаточно доказать для отрезка $[0, \pi]$. Положим $x_n = \frac{1}{2n}$; тогда для всех $k = n+1, n+2, \ldots, 2n$ будем иметь $0 < kx_n \leqslant \leqslant 1 < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, в силу неравенства $\frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{2}{\pi}$, $0 < \alpha < < \frac{\pi}{2}$ (см. (14.1)), получим

$$\frac{\sin kx_n}{k} = \frac{\sin kx_n}{kx_n}\frac{1}{2n} \geqslant \frac{2}{\pi}\frac{1}{2n} = \frac{1}{\pi n}, \qquad k = n+1, \ldots, 2n.$$

Отсюда

$$\frac{\sin(n+1)x_n}{n+1} + \frac{\sin(n+2)x_n}{n+2} + \ldots + \frac{\sin 2nx_n}{2n} > \underbrace{\frac{1}{\pi n} + \ldots + \frac{1}{\pi n}}_{n} = \frac{1}{\pi}.$$

Поэтому ни для какого $\varepsilon < \frac{1}{\pi}$ на отрезке $[0, \pi]$ не выполняется критерий Коши равномерной сходимости.

Заметим, что доказать равномерную сходимость рассматриваемого ряда на отрезке, не содержащем точек вида $x=2k\pi$ с помощью признака Вейерштрасса нельзя. Например, для отрезка $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ имеем

$$\max_{\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]} \left|\frac{\sin nx}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

Поэтому не существует такого сходящегося числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ что $\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leqslant a_n$ на $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, ибо тогда $a_n \geqslant \frac{1}{n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Подобно случаю числовых рядов, применяя неравенство Абеля, можно получить еще один признак равномерной сходимости функциональных рядов, аналогичный признаку Абеля для числовых рядов. Он также впервые встречается в работах Харди.

Теорема 7. *Если*

1) *последовательность* $\{a_n(x)\}$ *ограничена на множестве* E:

$$|a_n(x)| \leqslant M, \quad x \in E, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и убывает или возрастает при каждом $x \in E$,

2) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *равномерно сходится на множестве* E, *то ряд* (36.30) *также равномерно сходится на* E.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$, всех целых $p \geqslant 0$ и всех точек $x \in E$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=0}^{p} b_{n+k}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Отсюда, в силу неравенства Абеля (см. 35.77) для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ всех целых $p \geqslant 0$ и всех точек $x \in E$ будет справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=0}^{p} a_{n+k}(x)\, b_{n+k}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}\left(|a_n(x)| + 2\,|a_{n+p}(x)|\right) \leqslant \varepsilon.$$

Согласно критерию Коши, это и означает равномерную сходимость ряда (36.30). □

Пример. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx \cos \frac{x}{n}}{\ln \ln n}$.

На любом отрезке, не содержащем точек вида $2\pi m$, $m=0$, $\pm 1, \ldots$, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln \ln n}$ согласно теореме 6 равномерно сходится, а последовательность $\cos \frac{x}{n}$, $n=2, 3, \ldots$ ограничена и монотонно возрастает начиная с некоторого номера, причем можно выбрать такой номер, что начиная с этого номера эта последовательность будет возрастать во всех точках указанного отрезка. Поэтому на отрезке, не содержащем точек вида $2\pi m$; $m=0, \pm 1, \ldots$, рассматриваемый ряд равномерно сходится.

В заключение заметим, что из двух свойств равномерно сходящихся последовательностей, доказанных в конце п. 36.2, непосредственно следует справедливость соответствующих свойств для равномерно сходящихся рядов:

1°. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ *сходятся равномерно на множестве* E, *то для любых чисел* $\lambda \in \boldsymbol{C}$ *и* $\mu \in \boldsymbol{C}$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda u_n(x) + \mu v_n(x)$ *также сходится равномерно на множестве* E.

2°. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится на множестве* E, *а функция* $g(x)$ *ограничена на этом множестве, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g(x) u_n(x)$ *также равномерно сходится на* E.

Упражнения. Исследовать на сходимость абсолютную сходимость и равномерную сходимость ряды:

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1-x) x^n$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+x^n)$.

(везде x — вещественное число)

36.4. СВОЙСТВА РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Мы видели, что сумма сходящегося ряда, все члены которого непрерывные функции, может и не быть непрерывной функцией. Следующая теорема содержит достаточные условия непрерывности суммы ряда.

Следует обратить внимание на то, что рассмотрение непрерывных на некотором множестве функций накладывает дополнительные ограничения на само множество — оно уже не может быть множеством произвольной природы (каковым до сих пор было множество E, на котором были заданы члены рассматриваемых рядов, элементы последовательностей и т. д.), а должно быть таким, что для функций, заданных на нем, определено понятие непрерывности. Когда речь пойдет о производных и интегралах, придется еще более сузить класс допустимых множеств E.

Теорема 8. *Если функции $u_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, непрерывны в точке x_0 множества $E \subset R^m$* *) *и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E, то его сумма $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ также непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Пусть функции $u_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, непрерывны в точке $x_0 \in E$. Докажем, что тогда функция $s(x)$ также непрерывна в этой точке.

Зафиксируем какое-либо $\varepsilon > 0$. Пусть

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x),\ x \in E.$$

Согласно условию теоремы,

$$s_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} s(x),$$

поэтому существует такой номер n_ε, что

$$|s(x)-s_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{36.31}$$

для всех $x \in E$ и всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и, в частности, для $n=n_\varepsilon$. Функция $s_{n_\varepsilon}(x)$ как сумма конечного числа непрерывных на E функций $u_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, n_\varepsilon$, непрерывна в точке $x_0 \in E$. Поэтому существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех точек $x \in E$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x_0)<\delta$,

$$|s_{n_\varepsilon}(x)-s_{n_\varepsilon}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{36.32}$$

Теперь, заметив, что $s(x)-s(x_0)=[s(x)-s_{n_\varepsilon}(x)]+[s_{n_\varepsilon}(x)-$ $-s_{n_\varepsilon}(x_0)]+[s_{n_\varepsilon}(x_0)-s(x_0)]$

---

*) Здесь, как и везде, где не оговорено что-либо другое, рассматриваются комплекснозначные функции $u_n(x)$; понятие непрерывности для таких функций см. в п. 23. 3; R^m, как обычно, обозначает m-мерное евклидово пространство.

(рис. 141), из неравенства (36.31), взятого в точках x_0 и x, и неравенства (36.32) получим при $\rho(x, x_0) < \delta$ и $x \in E$

$$|s(x) - s(x_0)| < |s(x) - s_{n_\varepsilon}(x)| + |s_{n_\varepsilon}(x) - s_{n_\varepsilon}(x_0)| +$$
$$+ |s_{n_\varepsilon}(x_0) - s(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

что и доказывает непрерывность функции $s(x)$ в точке x_0. □

В случае, если x_0 предельная точка множества E утверждению теоремы можно придать вид

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} s(x) = s(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

и так как каждая функция $u(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывна в точке $x \in E$, то $u_n(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} u_n(x)$, поэтому

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} u_n(x).$$

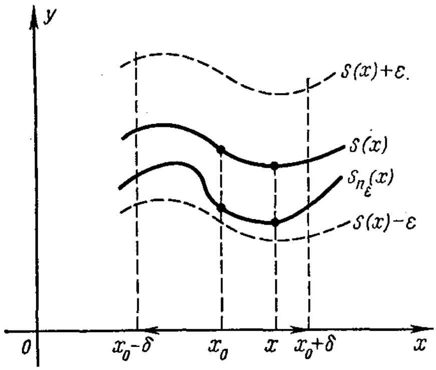

Рис. 141

Таким образом, в условиях теоремы 8 предел суммы ряда равен сумме пределов его членов, т. е. в рассматриваемом ряде допустим почленный переход к пределу.

Выше отмечалось, что каждой последовательности функций соответствует функциональный ряд, для которого она является последовательностью частичных сумм. При этом если данная последовательность равномерно сходится на некотором множестве, то и указанный ряд также, очевидно, равномерно сходится на этом множестве. Это обстоятельство позволяет перефразировать теоремы о равномерно сходящихся рядах в соответствующие теоремы о равномерно сходящихся последовательностях. Например, теорема 8 может быть перефразирована следующим образом.

Теорема 8′. *Если функции f_n, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывны в точке $x_0 \in E \subset R^m$ и $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$, то f непрерывна в x_0.*

Это означает, что для точки $x_0 \in E$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f_n(x),$$

т. е. предельные переходы по n и по x можно переставлять.

Действительно, предел f последовательности f_n, $n=1, 2, \ldots$ является в силу теоремы 8′ непрерывной в точке $x_0 \in E$ функцией, а поэтому левая часть равенства равна $f(x_0)$:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} f(x) = f(x_0),$$

но и правая часть рассматриваемого равенства в силу непрерывности функций f_n также равна $f(x_0)$:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0). \square$$

Задача 25 (теорема Дини *)). Пусть функции f_n, $n=1, 2\ldots$ непрерывны и, монотонно убывая или монотонно возрастая, стремятся на компакте $E \subset R^m$ к функции f. Доказать, что для того чтобы функция f была непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n\}$ сходилась на множестве E равномерно. Перефразировать этот результат для рядов.

Теперь перейдем к вопросу о почленном интегрировании и дифференцировании рядов. Поскольку производная и интеграл определялись только в действительной области, то, начиная отсюда и до конца параграфа, будем считать, что все рассматриваемые функции определены на промежутках действительной оси и принимают действительные значения.

Рассмотрим сначала пример, который убедит нас в том, что одной лишь сходимости функционального ряда недостаточно для того, чтобы интеграл от функции, равной его сумме, можно было найти почленным интегрированием. Иными словами, покажем, что даже если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\,dx$ сходятся, то равенство

$$\int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\,dx$$

может быть неверным, даже в том случае, когда все написанные интегралы существуют.

Перефразируем сначала это утверждение в терминах последовательностей. Если положить $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, то будем иметь

$$\int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \int\limits_a^b s(x)\,dx = \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} s_n(x)\,dx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^b u_k(x)\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right] dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b s_n(x)\,dx.$$

*) У. Дини (1845—1918) — итальянский математик.

Покажем, что равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)\,dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} s_n(x)\,dx$$

справедливо не всегда, когда на отрезке $[a, b]$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$ и все рассматриваемые функции интегрируемы, т. е. что в этом случае не всегда можно переходить к пределу под знаком интеграла.

Пусть $s_n(x)=nxe^{-nx^2}$, $n=1, 2, \ldots, 0\leqslant x\leqslant 1$. Тогда $s_n(0)=0$ и при любом $x\neq 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=0$. Таким образом $s_n \underset{[0,1]}{\longrightarrow} 0$ и, следовательно, интеграл от предельной функции, т. е. от нуля, также равен нулю. Однако

$$\int_0^1 s_n(x)\,dx=n\int_0^1 xe^{-nx^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^n e^{-t}\,dt=\frac{1}{2}(1-e^{-n}).$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 s_n(x)\,dx=\frac{1}{2}$, т. е. действительно, для рассмотренной последовательности $\{s_n(x)\}$ имеет место неравенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 s_n(x)\,dx\neq\int_0^1 \lim_{n\to\infty} s_n(x)\,dx=0.$$

Если построить ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, для которого последовательность $\{s_n(x)\}$ является последовательностью частичных сумм, т. е. положить

$$u_1(x)=s_1(x),\quad u_n(x)=s_{n-1}(x)-s_{n-1}(x),\qquad n=2, 3, \ldots,$$

то для этого ряда будем иметь

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx\neq\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)\,dx.$$

Теорема 9. *Пусть функции* $u_n(x)$, $n=1, 2, \ldots,$ *непрерывны на отрезке* $[a, b]$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{36.33}$$

равномерно сходится на $[a, b]$. *Тогда какова бы ни была точка* $c\in[a, b]$, *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x u_n(t)\,dt \tag{36.34}$$

также равномерно сходится на $[a, b]$, *и если*

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{36.35}$$

то

$$\int_c^x s(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x u_n(t)\,dt, \qquad a\leqslant x\leqslant b. \tag{36.36}$$

Если эту формулу переписать в виде

$$\int_c^x\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right]dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x u_n(t)\,dt,$$

то видно, что она означает законность при условиях, перечисленных в теореме 9, *почленного интегрирования ряда.*

Доказательство. В силу равномерной сходимости ряда (36.33), согласно теореме 8, функция $s(x)$ (см. (36.35)) непрерывна на отрезке $[a, b]$ и поэтому интегрируема на любом отрезке с концами в точках $c\in[a, b]$ и $x\in[a, b]$.

Покажем, что ряд (36.34) равномерно на отрезке $[a, b]$ сходится к функции

$$\sigma(x)=\int_c^x\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right]dt=\int_c^x s(t)\,dt. \tag{36.37}$$

Пусть

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \quad \text{и} \quad r_n(x)=s(x)-s_n(x).$$

Тогда для любого $x\in[a, b]$ имеем

$$\begin{aligned}\left|\sigma(x)-\sum_{k=1}^{n}\int_c^x u_k(t)\,dt\right|&=\left|\int_c^x s(t)\,dt-\int_c^x\left[\sum_{k=1}^{n} u_k(t)\right]dt\right|=\\&=\left|\int_c^x s(t)\,dt-\int_c^x s_n(t)\,dt\right|\leqslant\left|\int_c^x|s(t)-s_n(t)|\,dt\right|=\\&=\left|\int_c^x|r_n(t)|\,dt\right|\leqslant\sup_{[a, b]}|r_n(t)|\left|\int_c^x dt\right|\leqslant\\&\leqslant|x-c|\sup_{[a, b]}|r_n(t)|\leqslant(b-a)\sup_{[a, b]}|r_n(x)|.\end{aligned} \tag{36.38}$$

Последовательность $\sup\limits_{[a, b]}|r_n(x)|$, $n=1, 2, \ldots$ является числовой последовательностью. В силу равномерной сходимости ряда (36.33) имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{[a, b]}|r_n(x)|=0$$

(см. п. 36.3); поэтому из неравенства (36.38), согласно признаку Вейерштрасса равномерной сходимости последовательности, следует, что последовательность частичных сумм ряда (36.34) равномерно сходится к функции (36.37), а это и означает равномерную сходимость ряда (36.34) к функции (36.37). Теорема и, в частности, формула (36.36) доказаны.

Перефразируем полученный результат для последовательностей функций.

Теорема 9′. *Если последовательность непрерывных на отрезке* $[a, b]$ *функций* f_n, $n=1, 2, \ldots$, *равномерно на этом отрезке сходится к функции* f, *то, какова бы ни была точка* $c \in [a, b]$,

$$\int_c^x f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_c^x f(t)\,dt \quad \text{на} \quad [a, b],$$

в частности,

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^x f_n(t)\,dt = \int_c^x [\lim_{n\to\infty} f_n(t)]\,dt.$$

Упражнение 9. Показать, что если

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n & \text{при} \quad x = 1/2n, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0 \ \text{и} \ \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

и $f_n(x)$ линейна на отрезках $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$ и $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$, то $f_n(x) \underset{[0, 1]}{\longrightarrow} 0$, а $\lim\limits_{n\to 0} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 1$.

Перейдем теперь к вопросу о дифференцировании рядов.

Теорема 10. *Пусть функции* $u_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, *непрерывно дифференцируемы на отрезке* $[a, b]$ *и ряд, составленный из их производных*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \tag{36.39}$$

равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. *Тогда если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится хотя бы в одной точке* $c \in [a, b]$, *то он сходится равномерно на всем отрезке* $[a, b]$, *его сумма*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{36.40}$$

непрерывно дифференцируема и

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{36.41}$$

Если эту формулу переписать в виде

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),$$

то видно, что она означает законность при сделанных предположениях почленного дифференцирования ряда.

Доказательство. Пусть

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{36.42}$$

В силу равномерной сходимости этого ряда его сумма является непрерывной функцией и его можно почленно интегрировать:

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(c)], \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{36.43}$$

По теореме 9, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(c)], \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{36.44}$$

— сходящийся. Сходится, по условию теоремы, и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c), \tag{36.45}$$

а поэтому сходится и сумма рядов (36.44) и (36.45), т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{36.46}$$

Отсюда следует, что равенство (36.43) можно переписать в виде

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(c),$$

или, что то же (см. (36.40)), в виде

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = s(x) - s(c). \tag{36.47}$$

Функция, стоящая в левой части имеет производную по x, значит и функция $s(x)$ имеет производную. Дифференцируя равенство (36.47), получим (см. п. 29.2)

$$s'(x) = \sigma(x), \tag{36.48}$$

где функция $\sigma(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, ибо представляет собой сумму равномерно сходящегося ряда (36.39), члены которого — непрерывные функции. Подставляя (36.42) в (36.48), и получим искомую формулу (36.41).

Остается лишь отметить, что из равенства (36.43) в силу доказанной сходимости рядов (36.44) и (36.45) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(c).$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_c^x u_n'(t)\,dt$ равномерно сходится на отрезке $[a, b]$ (см. теорему 9), а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ — числовой ряд, поэтому и их сумма, т. е. ряд (36.40), равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. □

Итак, если сходящийся ряд непрерывно дифференцируемых функций таков, что ряд, составленный из его производных равномерно сходится, то сумма ряда является дифференцируемой функцией и ее производная получается почленным дифференцированием ряда.

Поскольку из предпосылок этой теоремы следует равномерная сходимость ряда, то не ограничивая общности теоремы, ее можно перефразировать следующим образом.

Если ряд непрерывно дифференцируемых функций и ряд, составленный из их производных, равномерно сходятся, то сумма исходного ряда непрерывно дифференцируема и ее производная равна сумме производных членов данного ряда (т. е. ряд можно почленно дифференцировать).

Перефразируем теперь теорему 10 для последовательностей.

Теорема 10′. *Пусть последовательность непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций*

$$f_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{36.49}$$

сходится хотя бы в одной точке $c \in [a, b]$, а последовательность их производных f_n', $n = 1, 2, \ldots$, равномерно сходится на $[a, b]$. Тогда последовательность (36.49) равномерно сходится на $[a, b]$, ее предел является непрерывно дифференцируемой на этом отрезке функцией и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{df_n(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

Примеры применения этих теорем будут приведены в следующем параграфе.

Упражнения. 10. Будет ли справедливым равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\,dx=\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty}x^n\right)dx?$$

Можно ли это установить с помощью теоремы 9?

11. Построить пример равномерно сходящейся на отрезке последовательности непрерывно дифференцируемых функций, предел которой также является непрерывно дифференцируемой функцией, однако производные членов последовательности не сходятся к производной предельной функции.

§ 37. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

37.1. РАДИУС СХОДИМОСТИ И КРУГ СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА

Определение 1. *Функциональные ряды вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \tag{37.1}$$

где a_n и z_0 — заданные комплексные числа, а z — комплексное переменное, называются степенными рядами. Числа

$$a_n,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

называются коэффициентами степенного ряда (37.1).

Предполагая, что коэффициенты ряда и число z_0 фиксированы, будем исследовать поведение ряда (37.1) при различных z.

Если в ряде (37.1) выполнить замену переменного, положив $\zeta=z-z_0$, то получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n. \tag{37.2}$$

Очевидно, что исследование сходимости ряда (37.1) эквивалентно исследованию сходимости ряда (37.2), поэтому в дальнейшем будем рассматривать ряды вида (37.2), употребляя, правда, как правило, для обозначения переменной букву z, а не ζ.

Теорема 1 (Абель). *Если степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{37.3}$$

сходится при $z=z_0\neq 0$, то он сходится и притом абсолютно при любом z, для которого $|z|<|z_0|$.

Доказательство. Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \tag{37.4}$$