Упражнения. 10. Будет ли справедливым равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\,dx=\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty}x^n\right)dx?$$

Можно ли это установить с помощью теоремы 9?

11. Построить пример равномерно сходящейся на отрезке последовательности непрерывно дифференцируемых функций, предел которой также является непрерывно дифференцируемой функцией, однако производные членов последовательности не сходятся к производной предельной функции.

# § 37. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

## 37.1. РАДИУС СХОДИМОСТИ И КРУГ СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА

**Определение 1.** *Функциональные ряды вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \tag{37.1}$$

*где $a_n$ и $z_0$ — заданные комплексные числа, а $z$ — комплексное переменное, называются степенными рядами. Числа*

$$a_n,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

*называются коэффициентами степенного ряда (37.1).*

Предполагая, что коэффициенты ряда и число $z_0$ фиксированы, будем исследовать поведение ряда (37.1) при различных $z$.

Если в ряде (37.1) выполнить замену переменного, положив $\zeta=z-z_0$, то получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n. \tag{37.2}$$

Очевидно, что исследование сходимости ряда (37.1) эквивалентно исследованию сходимости ряда (37.2), поэтому в дальнейшем будем рассматривать ряды вида (37.2), употребляя, правда, как правило, для обозначения переменной букву $z$, а не $\zeta$.

**Теорема 1 (Абель).** *Если степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{37.3}$$

*сходится при $z=z_0\neq 0$, то он сходится и притом абсолютно при любом $z$, для которого $|z|<|z_0|$.*

Доказательство. Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \tag{37.4}$$

сходится. Тогда его $n$-й член $a_n z_0^n$ стремится к нулю при $n \to \infty$ (см. п. 35.2), и поэтому последовательность $\{a_n z_0^n\}$ ограничена, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что

$$|a_n z_0^n| \leqslant M, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

В силу этого для $n$-го члена ряда (37.2) получается оценка

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

Если $|z| < |z_0|$ (рис. 142), то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$, являясь суммой геометрической прогрессии со знаменателем $q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, сходится. Поэтому по признаку сравнения (см. п. 35.5) сходится и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$, а это означает абсолютную сходимость ряда (37.3) при $|z| < |z_0|$. □

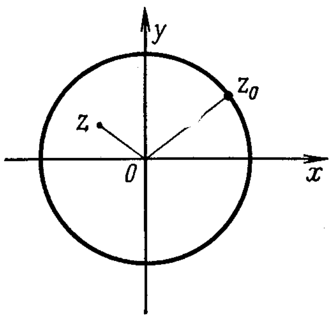


*Рис. 142*

**Следствие 1.** *Если степенной ряд (37.3) расходится при $z = z_0$, то он расходится и при всяком $z$, для которого $|z| > |z_0|$.*

Действительно, если $|z| > |z_0|$ и ряд (37.4) расходится, то расходится и ряд (37.3), так как если бы он сходился, то в силу доказанного сходился бы и ряд (37.4).

**Определение 2.** *Пусть задан ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Если $R$ — неотрицательное число или $+\infty$, обладает тем свойством, что при всех $z$, для которых $|z| < R$, ряд (37.3) сходится, а при всех $z$, для которых $|z| > R$, ряд (37.3) расходится, то оно называется радиусом сходимости степенного ряда (37.3).*

*Множество точек $z$, для которых $|z| < R$, называется кругом сходимости ряда (3.3).*

**Теорема 2.** *У всякого степенного ряда (37.3) существует радиус сходимости $R$. В круге сходимости, т. е. при любом $z$, для которого $|z| < R$, ряд (37.3) сходится абсолютно. На любом круге $|z| \leqslant r$, где $r$ фиксировано и $r < R$ ряд (37.3) сходится равномерно.*

Доказательство. Разобьем все действительные числа на два класса: к классу $A$ отнесем все неположительные числа и те из положительных $x>0$ (если такие существуют), для которых ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится, а к классу $B$ отнесем все остальные.

Если класс $B$ не пуст, то это разбиение является сечением во множестве действительных чисел (см. п. 2.1). В самом деле, класс $A$ всегда не пуст, так как содержит все неположительные числа. Каждое действительное число заведомо попадает в один из классов $A$ или $B$, поскольку после определения класса $A$ к классу $B$ отнесены все остальные числа. Наконец, если $x \in A$, $y \in B$, то либо $x \leqslant 0$, тогда в силу того, что всегда $y>0$, получим $x<y$ либо $x>0$, тогда согласно теореме Абеля $x<y$. Таким образом, все условия, определяющие сечение в области действительных чисел, выполнены.

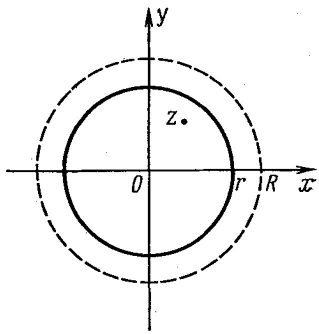

Рис. 143

Обозначим через $R$ число, которое производит это сечение. В случае когда множество $B$ пусто, по определению, положим $R=+\infty$. Величина $R$ является радиусом сходимости ряда (37.3). В самом деле, пусть зафиксировано некоторое $z$, для которого $|z|<R$. Возьмем действительное $x_0$ такое, что $|z|<x_0<R$. В силу определения величины $R$ получим $x_0 \in A$, поэтому ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \tag{37.5}$$

сходится. Отсюда, по теореме Абеля, следует, что в зафиксированной точке $z$, $|z|<R$, ряд (37.3) сходится, и притом абсолютно.

Если $|z|>R$, то выберем вещественное $x_0$ так, что $R<x_0<|z|$; тогда $x_0 \in B$ и, следовательно, ряд (37.5) расходится. В силу следствия из теоремы Абеля отсюда следует, что в этом случае ряд (37.3) расходится.

Если теперь $0<r<R$, то, по доказанному, ряд (37.3) при $z=r$ абсолютно сходится, т. е. сходится числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n.$$

А так как для любой точки $z$ круга $|z| \leqslant r$ (рис. 143)

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n, \quad n=0, 1, 2, \ldots,$$

то, согласно признаку Вейерштрасса (см. п. 36.3), на этом круге ряд (37.3) сходится равномерно. □

Таким образом, областью сходимости всякого степенного ряда является всегда «круг»[*] исключая, быть может, некоторое множество его граничных точек. В граничных же точках круга сходимости ряд может как сходиться, так и расходиться (см. нижеследующие примеры).

Подчеркнем, что радиус сходимости степенного ряда (37.3) обладает следующим свойством: для каждого числа $z$, такого, что $|z|<R$, указанный ряд абсолютно сходится, а для каждого $z$ такого, что $|z|>R$, он просто, а следовательно, и подавно абсолютно расходится (расходится ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда). Это следует, очевидно, из определения радиуса сходимости и теоремы 2.

Члены степенного ряда являются непрерывными функциями и, как было показано, на всяком круге, лежащем вместе со своей границей внутри круга сходимости, степенной ряд сходится равномерно, а поэтому его сумма непрерывна на всяком указанном круге. Очевидно, что для любой точки $z$ круга сходимости, $|z|<R$, можно подобрать круг, содержащий эту точку и лежащий вместе с границей в круге сходимости (достаточно взять его радиус $r$ таким, что $|z|<r<R$), поэтому *степенной ряд непрерывен в каждой точке своего круга сходимости* $|z|<R$ (подчеркнем, что здесь речь идет об открытом круге).

Рассмотрим теперь случай, когда степенной ряд сходится в точке $z=R$, лежащей на границе его круга сходимости. Отметим, что случай $z=-R$ может быть сведен к случаю $z=R$ простой заменой переменного $\zeta=-z$.

**Теорема 3 (Абель).** *Если $R$ — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и этот ряд сходится при $z=R$, то он сходится равномерно на отрезке* $[0, R]$.

**Следствие.** *Если степенной ряд* (37.3) *сходится при $z=R$, то его сумма непрерывна на отрезке* $[0, R]$.

Это утверждение обычно называется *второй теоремой Абеля* о степенных рядах.

Доказательство. Пусть $0\leqslant x\leqslant R$. Представим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n\left(\frac{x}{R}\right)^n$. Поскольку члены ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ не зависят от $x$, то его сходимость означает и его равномерную сходимость. Последовательность же $\{(x/R)^n\}$ ограничена на отрезке $[0, R]$, ее члены неотрицательны: $0\leqslant\left(\frac{x}{R}\right)^n\leqslant 1$ и она

[*] Слово «круг» написано в кавычках, так как в случае $R=+\infty$ «круг» означает всю плоскость.

монотонно убывает в каждой точке (при $x=R$ она не строго убывает, точнее, является стационарной). Поэтому в силу признака Абеля равномерной сходимости рядов (см. теорему 7 в п. 36.3) ряд (37.3) равномерно сходится на отрезке $[0, R]$. $\square$

Следствие вытекает из того, что сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций является также непрерывной функцией.

Все сказанное с помощью преобразования типа $z=\zeta-\zeta_0$ ($\zeta$ — новая переменная, $\zeta_0$ — фиксировано) переносится и на общие степенные ряды вида (37.1). В частности, областью сходимости такого ряда всегда является круг вида $|z-z_0|<R$, конечно, как и выше, с точностью до его граничных точек.

Этот круг называется кругом сходимости ряда (37.1), а $R$ — его радиусом сходимости.

Примеры. 1. Радиус сходимости $R$ ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! z^n$ равен нулю, т. е. этот ряд сходится только при $z=0$*).

Действительно, исследуя абсолютную сходимость этого ряда по признаку Даламбера, при любом $z\neq 0$ получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|(n+1)!\,z^{n+1}|}{|n!\,z^n|}=\lim_{n\to\infty}(n+1)|z|=+\infty.$$

Таким образом, рассматриваемый ряд не сходится абсолютно при любом $z\neq 0$; отсюда, в силу следствия из теоремы Абеля, он расходится при любом $z\neq 0$.

2. Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ равен $+\infty$, ибо, как мы видели (см. п. 36.1), этот ряд сходится при любом $z$.

3. Сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{37.6}$$

сходится при $|z|<1$ и расходится при $|z|\geqslant 1$. Поэтому ее радиус сходимости $R=1$. Отметим, что во всех точках границы круга сходимости, т. е. во всех точках окружности $|z|=1$, ряд (37.6) расходится, так как для общего члена ряда имеем $|z^n|=1$ и, следовательно, он не стремится к нулю при $n\to\infty$.

4. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2} \tag{37.7}$$

*) При $z=0$, очевидно, сходится любой ряд вида (37.3).

сходится при $|z|\leqslant 1$, ибо при выполнении этого условия $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится.

При $|z|>1$ ряд (37.7) расходится, так как в этом случае $\lim_{n\to\infty}\frac{|z|^n}{n^2}=+\infty$*), т. е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда. Радиус сходимости ряда (37.7), как и ряда (37.6), равен единице, однако в каждой точке границы круга сходимости ряд (37.7), в отличие от ряда (37. 6), сходится.

5. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$$

имеет радиус сходимости $R=1$.

Действительно, применив признак Даламбера для определения $z$, при которых ряд абсолютно сходится (соответственно, расходится), получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z^{n+1}/(n+1)|}{|z^n/n|}=|z|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=|z|$$

и, следовательно, при $|z|<1$ данный ряд сходится, причем абсолютно, а при $|z|>1$ он расходится. При $z=1$ получается расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, а при $z=-1$ сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ (см. п. 35.3 и 35.9). Таким образом, в этом примере на границе круга сходимости есть точки, в которых ряд сходится, и есть точки, в которых он расходится.

Из рассмотренных примеров (см. также п. 36.1) видно, что иногда радиус сходимости $R$ степенного ряда находится с помощью признака Даламбера сходимости рядов с положительными членами (см. теорему 8 в п. 35.6). Действительно, справедливо следующее утверждение: *если существует предел (конечный или бесконечный)* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, *то*

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{37.8}$$

*) Действительно, легко, например, с помощью правила Лопиталя убедиться, что $\lim_{x\to+\infty}\frac{|z|^x}{x^2}=+\infty$ (см. пример 2 в п. 12.2).

В самом деле, если число $R$ определено этой формулой и $|z|<R$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{a_n z^n}=|z|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{|z|}{R}<1,$$

и поэтому ряд (37.3) для такого $z$ сходится (и притом абсолютно).

Если же $|z|>R$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|}=\frac{|z|}{R}>1$, и, следовательно, ряд (37.3) абсолютно расходится. Таким образом, $R$ действительно является радиусом сходимости ряда (37.3).

Аналогичным образом можно найти величину радиуса сходимости $R$ и с помощью признака Коши (см. теорему 9 в п. 35.6), если только существует предел (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. В этом случае

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{37.8'}$$

Действительно, если число $R$ задается этой формулой и если $|z|<R$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n z^n|}=|z|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{|z|}{R}<1$$

и потому ряд (37.3) сходится. Если же $|z|>R$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n z^n|}=\frac{|z|}{R}>1$$

и, следовательно, ряд (37.3) абсолютно не сходится.

Таким образом, $R$ является радиусом сходимости ряда (37.3).

Затруднения при применении такого метода определения радиуса сходимости степенного ряда могут возникнуть, например, уже в случае, когда в рассматриваемом ряде имеются коэффициенты со сколь угодно большими номерами, равные нулю. В этом случае можно попробовать применить указанный метод, предварительно перенумеровав подряд все члены ряда с отличными от нуля коэффициентами (отчего его сходимость и сумма в случае, если он сходится, не изменяются).

Поясним сказанное на примере. Пусть требуется определить радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{где} \quad a_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{если} \quad n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\\ 0, & \text{если} \quad n=0,\ 2,\ 4,\ \ldots.\end{cases}$$

Признак Даламбера неприменим для определения сходимости этого ряда, ибо отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ не имеет смысла для четных номеров $n$. Не дает ответа здесь и признак Коши, поскольку нетрудно проверить, что здесь предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ не существует. Однако если положить $b_k=\frac{1}{2k+1}$, $k=0, 1, 2, \ldots$, и записать данный ряд в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{2k+1},$$

то, исследовав абсолютную сходимость этого ряда с помощью признака Даламбера, получим

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|b_{k+1}z^{2k+3}|}{|b_k z^{2k+1}|}=|z|^2\lim_{k\to\infty}\frac{2k+1}{2k+3}=|z|^2.$$

Отсюда следует, что рассматриваемый ряд абсолютно сходится, когда $|z^2|<1$, т. е. когда $|z|<1$, и абсолютно расходится, когда $|z|>1$. Таким образом, радиус сходимости этого степенного ряда равен 1.

Подчеркнем, что с помощью признака Даламбера и признака Коши можно найти радиус сходимости не для произвольного степенного ряда, а лишь для такого, у которого существуют указанные выше пределы (быть может, после новой нумерации членов).

Упражнения. Определить радиусы сходимости рядов:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^3}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^n$.
4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n z^{2n}$.

### 37.2*. ФОРМУЛА КОШИ — АДАМАРА ДЛЯ РАДИУСА СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА

Найдем теперь формулу для определения радиуса сходимости произвольного степенного ряда через его коэффициенты в общем случае.

**Теорема 4.** *Пусть $R$ — радиус сходимости степенного ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n; \tag{37.3}$$

*тогда*

$$R=\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}\ ^{*)}. \tag{37.9}$$

*) О верхнем пределе (см. в п. 3.12*).

Формула (37.9) называется *формулой Коши — Адамара* *).

Доказательство. Положим $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Рассмотрим сначала случай $\rho = 0$. Покажем, что в этом случае ряд (37.3) сходится при любом $z$. Возьмем какое-либо $z \neq 0$ и такое $\varepsilon$, что $0 < \varepsilon < 1$. Тогда (см. теорему 10 п. 3.12*) существует такое $N_1$, что

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\varepsilon}{|z|} \text{ для всех } n \geqslant N_1, \text{ т. е.}$$

$$|a_n||z|^n < \varepsilon^n \text{ для всех } n \geqslant N_1.$$

Отсюда по признаку сравнения следует, что ряд (37.3) абсолютно, а значит, и просто сходится при данном $z$, а так как $z$ было произвольно, то это означает, что $R = +\infty$.

Возьмем другой крайний случай: пусть $\rho = +\infty$. Покажем, что в этом случае ряд (37.3) расходится при любом $z \neq 0$. Действительно, если $\rho = +\infty$, то существует последовательность $n_k$, $k = 1, 2, \ldots$, натурального ряда такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = +\infty$. Поэтому, каково бы ни было $z \neq 0$, существует такой номер $k$, что при $k > k_z$

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geqslant \frac{1}{|z|}, \text{ т. е. } \left|a_{n_k} z^{n_k}\right| \geqslant 1.$$

Таким образом, не выполняется необходимое условие сходимости ряда — стремление к нулю $n$-го члена, поэтому при данном $z \neq 0$ ряд расходится, а так как $z \neq 0$ было произвольно, то это означает, что $R = 0$.

Пусть теперь $0 < \rho < +\infty$. Покажем, что при всяком $z$ таком, что $|z| < \frac{1}{\rho}$ ряд (37.3) сходится. Выберем $\varepsilon > 0$, так, чтобы $|z| < \frac{1}{\rho + \varepsilon}$ **), тогда число $q$, определяемое равенством $q = (\rho + \varepsilon) \times \times |z|$, будет удовлетворять неравенству $q < 1$. Согласно свойству верхнего предела, существует такой номер $N_1$, что при $n \geqslant N_1$

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \rho + \varepsilon,$$

поэтому при $n \geqslant N_1$

$$|z| \sqrt[n]{|a_n|} < |z|(\rho + \varepsilon) = q, \text{ т. е. } |a_n z^n| < q^n, \ 0 < q < 1,$$

---

*) Ж. Адамар (1865—1963) — французский математик.

**) Для этого достаточно взять $\varepsilon < \frac{1}{|z| - \rho}$.

и по признаку сравнения ряд (37.3) при рассматриваемом $z$ абсолютно, а значит, и просто сходится.

Покажем теперь, что ряд (37.3) при всяком $z$ таком, что $|z| > \frac{1}{\rho}$, расходится. Выберем $\varepsilon > 0$, так, чтобы

$$|z| > \frac{1}{\rho-\varepsilon} > 0, \tag{37.10}$$

тогда $|z|(\rho-\varepsilon) > 1$. Согласно свойству верхнего предела (см. теорему 10 п. 3.12*), существует подпоследовательность $n_k$, $k = 1, 2, \ldots$, натуральных чисел такая, что

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \rho - \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Из этого в силу (37.10) следует, что

$$|z| \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > |z|(\rho-\varepsilon) > 1$$

и, следовательно,

$$|a_{n_k} z^{n_k}| > 1,$$

т. е. в этом случае не выполняется необходимое условие сходимости ряда — стремление к нулю его $n$-го члена, и поэтому для рассматриваемого $z$ ряд (37.3) расходится.

Таким образом, ряд (37.3) сходится, если $|z| < \frac{1}{\rho}$, и расходится, если $|z| > \frac{1}{\rho}$, а это и означает, что $R = \frac{1}{\rho}$. □

### 37.3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

**Определение 3.** *Функция $f(z)$ называется аналитической в точке $z_0$, если существует такое $R > 0$, что в круге $|z - z_0| < R$ она представима степенным рядом вида* (37.1), *т. е. существуют такие комплексные числа $a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, что*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \qquad |z-z_0| < R. \tag{37.11}$$

Сумма, разность и произведение аналитических в точке функций снова является аналитической в этой точке функцией (почему?).

**Лемма 1.** *Если $R$ — радиус сходимости ряда* (37.11), *$R > 0$ и*

$$r_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

*— остаток ряда* (37.11), *то*

$$r_n(z) = O((z-z_0)^{n+1}) \quad \textit{при} \quad z \to z_0, \tag{37.12}$$

*и, следовательно,*

$$r_n(z) = o((z-z_0)^n) \quad при \quad z \to z_0. \tag{37.13}$$

Доказательство. Если $|z-z_0| < R$, то

$$r_n(z) = (z-z_0)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-n+1},$$

и ряд, получившийся после вынесения множителя $(z-z_0)^{n+1}$, сходится. Поэтому функция $\varphi(z) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-n-1}$, как сумма степенного ряда, непрерывна в круге $|z-z_0| < R$.

Если теперь $0 < r < R$, то функция $\varphi(z)$, будучи непрерывной на замкнутом круге $|z-z_0| \leqslant r$, будет и ограничена на нем, т. е. найдется такая постоянная $M > 0$, что (см. п. 23.3) при $|z-z_0| \leqslant r$ выполняется неравенство $|\varphi(z)| \leqslant M$. Поскольку $r_n(z) = (z-z_0)^{n+1}\varphi(z)$, то при $|z-z_0| \leqslant r$ получим:

$$|r_n(z)| = |z-z_0|^{n+1} |\varphi(z)| \leqslant M |z-z_0|^{n+1},$$

а это и означает (37.12). Условие (37.13) непосредственно следует из (37.12). $\square$

**Теорема 5.** *Представление аналитической в точке $z_0$ функции $f(z)$ в виде степенного ряда* (37.11) *единственно, т. е. если*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < R, \quad R > 0, \tag{37.14}$$

*то*

$$a_n = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Доказательство. Из равенства (37.14) при $n = 0$ в силу формулы (37.12) следует, что при $z \to z_0$

$$a_0 + O(z-z_0) = b_0 + O(z-z_0).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $z \to z_0$, получим $a_0 = b_0$.

Пусть уже доказано, что

$$a_j = b_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

тогда в силу (37.12) и (37.14)

$$a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots + a_n(z-z_0)^n + O((z-z_0)^{n+1}) =$$
$$= b_0 + b_1(z-z_0) + \ldots + b_n(z-z_0)^n + O((z-z_0)^{n+1}).$$

Уничтожая одинаковые члены в обеих частях этого равенства и деля обе его части на $(z-z_0)^n$, будем иметь

$$a_n + O(z-z_0) = b_n + O(z-z_0), \quad z \to z_0.$$

Отсюда в пределе при $z \to z_0$ получим, что $a_n = b_n$ (ср. с теоремой 2 в п. 13.2). $\square$

Может случиться, что лишь рассмотрение ряда в области комплексных чисел может объяснить величину его радиуса сходимости. Например, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},$$

являющийся суммой геометрической прогрессии со знаменателем $-x^2$, сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|\geqslant 1$. Его сумма на интервале $(-1;\ 1)$ равна $\frac{1}{1+x^2}$. Функция $\frac{1}{1+x^2}$ определена и бесконечно дифференцируема на всей вещественной оси, поэтому непонятно, почему, раскладывая ее в ряд,

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},$$

мы получаем ряд, сходящийся только при $|x|<1$. Это делается совершенно естественным, если рассмотреть эту функцию в области комплексных чисел, поскольку функция $\frac{1}{1+z^2}$ имеет «особую точку» при $z=i$ (в этой точке функция не определена и при приближении к ней стремится к бесконечности), т. е. как раз на границе круга $|z|\leqslant 1$.

### 37.4. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В настоящем пункте будут в основном изучаться степенные ряды с действительными членами. Однако предварительно докажем одну лемму, справедливую для степенных рядов в комплексной области,

**Лемма 2.** *Радиусы сходимости рядов*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{37.15}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}, \tag{37.16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \tag{37.17}$$

*равны.*

Доказательство. Пусть $R$ — радиус сходимости ряда (37.15), $R_1$ — радиус сходимости ряда (37.16), а $R_2$ — радиус сходимости ряда (37.17). Из неравенств

$$\left|\frac{a_n z^{n+1}}{n+1}\right|\leqslant|z|\,|a_n z^n|\leqslant|z^2|\,|n a_n z^{n-1}|,\qquad n=1,\ 2,\ \ldots$$

и теоремы сравнения (см. теорему 6 в п. 35.5) следует, что если в некоторой точке $z$ сходится ряд (37.17), то в этой точке сходится и ряд (37.16), и если в некоторой точке $z$ сходится ряд (37.16), то в той же точке сходится и ряд (37.15). Отсюда следует, что

$$R_2 \leqslant R \leqslant R_1. \tag{37.18}$$

Покажем теперь, что

$$R_1 \leqslant R_2. \tag{37.19}$$

Пусть ряд (37.16) сходится в точке $z_0$ и $0 < |z_0| < R_1$. Выберем такое действительное число $r$, чтобы $|z_0| < r < R_1$. Тогда при $n = 1, 2, \ldots$ получим

$$|na_n z_0^{n-1}| = \frac{n(n+1)}{|z_0|^2}\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right|\left|\frac{z_0}{r}\right|^{n+1}. \tag{37.20}$$

В силу сходимости ряда (37.16) при $z = r$ общий член этого ряда при $z = r$ стремится к нулю, когда $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right| = 0.$$

Следовательно, последовательность $\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right|$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена, т. е. существует такое $M > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right| \leqslant M.$$

Положив $q = \left|\frac{z_0}{r}\right|$, из (37.20) получим неравенство

$$|na_n z_0^{n-1}| \leqslant \frac{n(n+1)}{|z_0|^2} M q^{n+1}, \quad 0 < q < 1.$$

Поскольку ряд с общим членом $\frac{n(n+1)}{|z_0|^2} M q^{n+1}$ сходится (в этом легко убедиться, например, по признаку Даламбера), то при $z = z_0$ сходится и ряд (37.17). Неравенство (37.19) доказано. Из неравенств (37.18) и (37.19) следует, что

$$R = R_1 = R_2. \ \square$$

Замечание. Утверждение леммы может быть доказано несколько проще, если использовать формулу Коши — Адамара для радиуса сходимости степенного ряда (см. п. 37.2*). Мы не стали этого делать, так как приведенное доказательство также не сложно, а поскольку оно не использует формулы Коши — Адамара, то пункт 37.2* можно пропустить при первом чтении (на что и указывает звездочка при его номере).

В дальнейшем в этом параграфе везде, где не оговорено противное, будем предполагать, что коэффициенты всех рассматриваемых рядов действительны и что переменные $z$ и $z_0$ также действительны (в этом случае будем их обозначать $x$ и $x_0$). Правда, все рассматриваемые ниже свойства степенных рядов переносятся в определенном смысле и на степенные ряды в комплексной области, однако для осуществления этого нам пришлось бы обобщить понятие производной и интеграла на функции комплексного аргумента, а это не входит в задачу настоящего курса.

Итак, мы будем рассматривать ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \tag{37.21}$$

где $a_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, $x$ и $x_0$ действительны. Если $R$ — радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-x_0)$, где $z$ — комплексное число, т. е. ряда с теми же коэффициентами, что и у ряда (37.21), но рассматриваемого в комплексной области, то, очевидно, ряд (37.21) сходится, если $|x-x_0|<R$ и расходится, если $|x-x_0|>R$.

В этом случае $R$ по-прежнему называется *радиусом сходимости ряда* (37.21), а интервал $(x_0-R, x_0+R)$ — *его интервалом сходимости*.

**Теорема 6.** *Если $R$ — радиус сходимости степенного ряда*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \tag{37.22}$$

$R>0$, *то*

1) *функция $f$ имеет в интервале $(x_0-R, x_0+R)$ производные всех порядков, которые находятся из ряда* (37.22) *почленным дифференцированием*;

2) *для любого $x \in (x_0-R, x_0+R)$*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1},$$

*т. е. внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать*;

3) *степенные ряды, получающиеся из ряда* (37.22) *в результате почленного дифференцирования или интегрирования, имеют тот же радиус сходимости, что и сам ряд* (37.22).

Доказательство. В силу леммы, доказанной в начале этого пункта, радиусы сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1},$$

получающегося из ряда (37.22) почленным дифференцированием, и ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-x_0)^{n+1}}{n+1},$$

получающегося из того же ряда почленным интегрированием, имеют тот же радиус сходимости что и ряд (37.22) (чтобы в этом убедиться, достаточно сделать замену переменного $x-x_0=z$).

Поскольку всякий степенной ряд вида (37.22) с радиусом сходимости $R$ равномерно сходится на отрезке $[x_0-r,\ x_0+r]$, $0<r<R$ (см. теорему 2 в п. 37.1), то утверждение теоремы о возможности почленного дифференцирования и интегрирования вещественных степенных рядов непосредственно следует из соответствующих теорем о дифференцируемости и интегрируемости функциональных рядов, доказанных в пункте 36.4. □

Заметим, что, например, возможность почленного интегрирования степенного ряда (37.22) внутри интервала сходимости $(x_0-R,\ x_0+R)$ сразу вытекает (см. теорему 9 в п. 36.4) из того, что степенной ряд равномерно сходится на всяком отрезке $[x_0-r,\ x_0+r]$, $0<r<R$. Отсюда следует, что при почленном интегрировании радиус сходимости степенного ряда не уменьшается. Доказанная теорема содержит более полное утверждение, что указанный радиус сходимости, кроме того, и не увеличивается, т. е. остается прежним.

**Теорема 7.** *Если функция $f$ аналитическая в точке $x_0$, т. е. представима в окрестности этой точки рядом* (37.22) *с радиусом сходимости $R>0$, то*

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\quad n=0,\ 1,\ \ldots, \tag{37.23}$$

т. е.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Доказательство. Продифференцировав $n$ раз обе части равенства (37.22), получим (см. теорему 6):

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot a_n+(n+1)n\ldots 2n_{n+1}(x-x_0)+ \\ +(n+2)(n+1)\ldots 3a_{n+2}(x-x_0)^2+\ldots$$

Отсюда при $x=x_0$ и получается формула (37.23). □

Заметим, что из доказанной теоремы следует еще раз свойство единственности разложения функции в степенной ряд (правда, на этот раз в силу сделанных ограничений только в действительной области, ср. с п. 37.3).

## 37.5. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ ЗАПИСИ ОСТАТОЧНОГО ЧИСЛА ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

**Определение 4.** *Пусть функция $f$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$ и имеет в этой точке производные всех порядков. Тогда ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{37.24}$$

*называется рядом Тейлора функции $f$ в точке $x_0$.*

При $x_0=0$ ряд (37.24) называется также рядом Маклорена функции $f(x)$.

Как мы знаем, всякая аналитическая в точке $x_0$ функция бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности этой точки и равна в этой окрестности сумме своего ряда Тейлора. Оказывается, что обратное, вообще говоря, неверно: существуют функции, бесконечно дифференцируемые, но не аналитические и, значит, не представимые своим рядом Тейлора.

Примером такой функции является функция

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{для } x\neq 0, \\ 0 & \text{для } x=0. \end{cases} \tag{37.25}$$

При $x\neq 0$ эта функция имеет производные всех порядков, которые легко вычисляются:

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2},\quad f''(x)=-\frac{6}{x^4}e^{-1/x^2}+\frac{4}{x^6}e^{-1/x^2},$$

и вообще

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2},$$

где $P_n(1/x)$ — многочлен некоторой степени относительно $1/x$ ($n$ — порядковый номер, а не степень многочлена), т. е. $f^{(n)}(x)$ есть линейная комбинация слагаемых вида

$$\frac{1}{x^m}e^{-1/x^2},\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \tag{37.26}$$

Это легко проверяется по индукции. Сделав замену переменного $t=\frac{1}{x^2}$, найдем, применив правило Лопиталя, предел модуля выражения (37.26) при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x^m}e^{-1/x^2}\right|=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{m/2}}{e^t}=0.$$

Отсюда следует, что и предел выражения (37.26) при $x\to 0$ также равен нулю и что при любом $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

$$\lim_{x\to 0}f^{(n)}(x)=\lim_{x\to 0}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}=0. \tag{37.27}$$

Из формулы (37.27) при $n=0$ и $n=1$ следует, что функция $f$ непрерывна в точке $x=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$, поэтому (см. следствие 3 из теоремы 3 п. 11.2) $f'(0)$ существует и $f'(0)=0$. По индукции легко убедиться подобным же образом, что $f^{(n)}(0)=0$, $n=0, 1, 2, \ldots$.

Таким образом, все члены ряда Тейлора функции (37.25) в точке $x_0=0$ равны нулю, поэтому его сумма при всех $x$ также равна нулю и, следовательно, не совпадает с самой функцией $f$. Заметим еще, что, согласно теореме 5 п. 37.3, функция (37.25) не может быть разложена ни в какой степенной ряд (так как если бы это было возможно, то он оказался бы рядом Тейлора), а это и означает, что она не является аналитической.

Упражнения. 6. Можно ли разложить функцию $f(x)=e^{-1/x}$, $x>0$, на отрезке $[0, 1]$ в ряд Маклорена.

7. Пусть

$$\theta(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } x\geqslant 0, \\ -1 & \text{при } x<0. \end{cases}$$

Доказать, что функцию $\theta(x)e^{-1/x^2}$ можно так доопределить при $x=0$, что в результате получится бесконечно дифференцируемая на всей числовой оси функция.

Заметим, что если функция раскладывается в некоторой окрестности данной точки в степенной ряд, то такой ряд единственен (см. теорему 5 или теорему 7) и является ее рядом Тейлора. Однако, один и тот же степенной ряд может являться рядом Тейлора для разных функций. Так степенной ряд с нулевыми коэффициентами, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 0x^n$, является как рядом Тейлора функции тождественно равной нулю на всей числовой оси: $f(x)=0$, $x\in R$, так и рядом Тейлора функции (37.25) в точке $x=0$.

Возникает вопрос: когда ряд Тейлора (37.24) функции $f(x)$ на некотором интервале сходится к $f(x)$? Чтобы исследовать этот вопрос, напишем формулу Тейлора для функции $f$ (см. п. 13.1):

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x), \tag{37.28}$$

которая справедлива при любом $n=0, 1, 2, \ldots$. В этой формуле $r_n(x)$ обозначает остаточный член формулы Тейлора, а не остаток ряда Тейлора, так как с остатком ряда нельзя оперировать до тех пор, пока не будет установлено, что ряд сходится — лишь в этом случае можно будет утверждать, что остаточный член формулы Тейлора совпадает с остатком ряда Тейлора. Полагая

$$s_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

перепишем формулу (37.28) в виде

$$f(x)=s_n(x)+r_n(x), \qquad (37.29)$$

где $s_n(x)$ — $n$-я частичная сумма ряда Тейлора. Отсюда видно, что, для того чтобы функция $f$ равнялась на рассматриваемом интервале сумме своего ряда Тейлора, т. е. чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы *для всех $x$ из этого интервала ее остаточный член в формуле Тейлора стремился к нулю*,

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0. \qquad (37.30)$$

Если это имеет место, то из формулы (37.29) следует, что остаточный член формулы Тейлора $r_n(x)$ является также и суммой $n$-го остатка ряда Тейлора (37.24).

**Теорема 8.** *Пусть функция $f$ определена и непрерывна вместе со всеми своими производными до порядка $n+1$ включительно на интервале $(x_0-h,\ x_0+h)$, $h>0$. Тогда остаточный член $r_n(x)$ ее формулы Тейлора (37.29) для всех $x\in(x_0-h,\ x_0+h)$ можно записать в следующих трех видах*:

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt, \qquad (37.31)$$

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad (37.32)$$

*где $\xi$ принадлежит интервалу с концами в точках $x_0$ и $x$, и*

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}, \qquad (37.33)$$

где $0<\theta<1$.

*Формула* (37.31) *называется остаточным членом формулы Тейлора в интегральной форме, формула* (37.32) — *в форме Лагранжа, а* (37.33) — *в форме Коши.*

Доказательство. Из основной теоремы дифференциального и интегрального исчисления (см. п. 29.3, теорему 4) имеем

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt=f(x_0)-\int_{x_0}^{x} f'(t)\,d(x-t).$$

Проинтегрировав по частям интеграл в правой части, получим

$$f(x)=f(x_0)+[-f'(t)(x-t)]_{x_0}^{x}+\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt.$$

Пусть для некоторого $m \leqslant n$ уже доказано, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}\,dt. \qquad (37.34)$$

Проинтегрируем по частям последний член еще раз:

$$\frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}\,dt = -\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)\,d(x-t)^m =$$

$$= -\frac{f^{(m)}(t)(x-t)^m}{m!}\Bigg|_{x_0}^{x} + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m\,dt =$$

$$= \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m\,dt.$$

и подставим это выражение в (37.34):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m\,dt.$$

В результате получилась формула (37.34), в которой $m$ заменено на $m+1$.

Таким образом, формула (37.34) доказана методом индукции для всех $m \leqslant n$. При $m=n$ ее остаточный член имеет вид (37.31).

Применим теперь первую интегральную теорему о среднем значении к интегралу (37.31), вынося за знак интеграла «среднее значение» производной $f^{(n+1)}$ (см. следствие из теоремы 1 в п. 28.2):

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_{x_0}^{x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где $\xi$ лежит на интервале с концами в точке $x_0$ и $x$.

Формула (37.32) доказана.

Если же применить интегральную теорему о среднем к интегралу (37.31), вынеся за знак интеграла «среднее значение» всей подынтегральной функции (см. п. 28.2), то получим

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0), \qquad (37.35)$$

где $\xi$, как и выше, лежит на интервале с концами в точках $x_0$ и $x$, т. е.

$$\xi = x_0 + \theta (x - x_0), \quad 0 < \theta < 1.$$

Отсюда $x - \xi = x - x_0 - \theta (x - x_0) = (x - x_0)(1 - \theta)$. Подставив это выражение в (37.35), получим формулу (37.33). $\square$

Укажем теперь одно достаточное условие разложимости функции в степенной ряд.

**Теорема 9.** *Пусть функция $f$ и все ее производные ограничены в совокупности на интервале $(x_0 - h,\ x_0 + h)$, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in (x_0 - h,\ x_0 + h)$ и всех $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ выполняется неравенство*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M. \tag{37.36}$$

*Тогда на интервале $(x_0 - h,\ x_0 + h)$ функция $f$ раскладывается в ряд Тейлора*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < h. \tag{37.37}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что, каково бы ни было число $a$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0. \tag{37.38}$$

Действительно, пусть $n_0$ такое, что $\frac{|a|}{n_0} < \frac{1}{2}$. Тогда при всех $n \geqslant n_0$ $\frac{|a|}{n} < \frac{1}{2}$, и поэтому

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n_0}}{n_0!} \frac{a}{n_0 + 1} \cdot \frac{a}{n_0 + 2} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a^{n_0}}{n_0!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n - n_0},$$

где правая часть неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, откуда и следует равенство (37.38). Это равенство следует и непосредственно из того, что выражение $a^n/n!$ является — общим членом сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ (см. (36.4)). Для того чтобы доказать формулу (37.37), достаточно убедиться (см. (37.30)), что

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0, \tag{37.39}$$

где $r_n(x)$ — остаточный член в формуле Тейлора функции $f$. Возьмем $r_n(x)$ в форме Лагранжа (см. (37.32)). Из неравенства (37.36) следует, что

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leqslant M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $|\xi - x_0| < |x - x_0| < h$. Поскольку в силу (37.38)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

то при $|x - x_0| < h$ выполняется условие (37.39). $\square$

Упражнение 8. Заменим в теореме 8 условие ограниченности производных $f^{(n)}(x)$, $n=1, 2, \ldots$, на интервале $(x_0-h, x_0+h)$ условием их ограниченности только в точке $x_0$, т. е. пусть существует такое $M > 0$, что для всех $n$ выполняется неравенство $|f^{(n)}(x_0)| \leq M$. Тогда, очевидно, ряд (37.37) сходится и притом абсолютно на всем интервале $(x_0-h, x_0+h)$, ибо $\left|\frac{1}{n!} f^{(n)}(x)(x-x_0)^n\right| \leq \frac{M(x-x_0)^n}{n!}$, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!}$ сходится при всех $x$ см. ряд (36.4)). Следует ли отсюда утверждение теоремы 9?

## 37.6. РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ В РЯД ТЕЙЛОРА

Прежде всего найдем разложение в ряд некоторых основных элементарных функций.

1. Разложение в ряд функции $f(x)=e^x$. Так как $f^{(n)}(x)=e^x$ то для любого фиксированного $h>0$ при всех $x \in (-h, h)$ и всех $n=0, 1, \ldots$

$$0 < f^{(n)}(x) < e^h.$$

Таким образом, условия теоремы 9 выполнены $(x_0=0)$, поэтому функция $e^x$ раскладывае ся в ряд Тейлора (37.34) на любом конечном интервале, а значит и на всей действительной оси. Поскольку в данном случае $f^{(n)}(0)=1$, то это разложение имеет вид

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{37.40}$$

Напомним, что в п. 36.1 было установлено, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ абсолютно сходится на всей комплексной плоскости*). Мы видим теперь, что для действительных $z=x$ его сумма равна $e^x$. В случае существенно комплексных $z$ его сумму по аналогии обозначают $e^z$; таким образом формула

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{37.41}$$

для комплексных $z$ является определением функции $e^z$.

---

*) Это следует, согласно теореме Абеля, и из доказанной нами сходимости ряда (37.40) на всей действительной оси.

Данное определение естественно, во-первых, потому, что в случае действительного $z = x$ эта функция совпадает с показательной функцией $e^x$, а во-вторых, потому, что функция $e^z$ сохраняет ряд характерных свойств функции $e^x$. Покажем, например, что

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \qquad (37.42)$$

для любых комплексных $z_1$ и $z_2$.

Мы знаем, что ряд (37.41) абсолютно сходится, поэтому ряды

$$e^{z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}, \quad e^{z_2} = \sum_{m=}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!}$$

можно почленно перемножить (см. п. 35.10), причем, поскольку получающийся при этом ряд также абсолютно сходится, его члены можно располагать в произвольном порядке. Соберем все члены, содержащие произведения $z_1^n z_2^m$ с одинаковой суммой $n+m$, и расположим эти группы членов по возрастанию $n+m$:

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{n+m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+m} \frac{z_1^{(n+m-k)}}{(n+m-k)!} \cdot \frac{z_2^k}{k!} =$$

$$= \sum_{n+m=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m)!} \sum_{k=0}^{n+m} \frac{(n+m)!}{(n+m-k)!\,k!} z_1^{n+m-k} z_2^k =$$

$$= \sum_{n+m=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^{n+m}}{(n+m)!} = e^{z_1+z_2}.$$

2. Разложение в ряд $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$. Заменив в формуле (37.40) $x$ на $-x$ (это означает просто изменение обозначения), получим

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}. \qquad (37.43)$$

Складывая и вычитая равенства (37.40) и (37.43), а затем деля их на два, получим

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad (37.44)$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \qquad (37.45)$$

В правых частях этих формул в силу единственности разложения функций в степенные ряды стоят ряды Тейлора функций $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$.

Поскольку функция $e^z$ определена теперь для всех комплексных $z$, то на существенно комплексные значения аргумента можно распространить и гиперболические функции $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$, положив

$$\operatorname{ch} z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z+e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z-e^{-z}}{2}.$$

Определенные таким образом $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$ для комплексных $z$ раскладываются в степенные ряды (37.44) и (37.45), сходящиеся на всей комплексной плоскости (под $x$ в них в этом случае понимается комплексное число).

3. Разложение в ряд $\sin x$ и $\cos x$. Формулы Эйлера. Если $f(x)=\sin x$, то $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ (см. пример 3 п. 10.1), поэтому $|f^{(n)}(x)|\leqslant 1$ для всех действительных $x$. Согласно теореме 9, отсюда следует, что функция $\sin x$ раскладывается в степенной ряд на всей действительной оси. Вспоминая формулу Тейлора для синуса (см. п. 13.3), получим ряд Тейлора для $\sin x$:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{37.46}$$

Рассуждая аналогично и вспоминая формулу Тейлора для косинуса (см. п. 13.3), получим и для него ряд Тейлора

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \tag{37.47}$$

также сходящийся на всей действительной оси.

В силу теоремы Абеля (см. п. 37.1) ряды, стоящие в правых частях формул (37.46) и (37.47), сходятся также и при любом комплексном $x$; это позволяет распространить синус и косинус на комплексные значения аргумента, положив для любого комплексного $z$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{37.48}$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}. \tag{37.49}$$

В комплексной области легко установить связь между показательной функцией и тригонометрическими. Заменим в ряде (37.41) $z$ сначала на $iz$, а затем на $-iz$;

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!}, \quad e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n z^n}{n!}. \tag{37.50}$$

Замечая теперь, что

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n = 4k, \\ i & \text{при} \quad n = 4k+1, \\ -1 & \text{при} \quad n = 4k+2, \\ -i & \text{при} \quad n = 4k+3, \end{cases}$$

и, следовательно, $i^{2k} = (-1)^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, из (37.50) будем иметь

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Сравнив эти формулы с (37.48) и (37.49), получим

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{37.51}$$

Из них непосредственно следует также формула

$$\cos z + i \sin z = e^{iz}. \tag{37.52}$$

Конечно, эти формулы справедливы, в частности, и для действительных $z$.

Формулы (37.51) и (37.52) называются *формулами Эйлера*. Отметим два простых их применения.

Если в формуле (37.52) $z = \varphi$ — действительное число, то

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

Поэтому комплексное число с модулем $r$ и аргументом $\varphi$

$$r = z (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

можно записать в виде

$$z = re^{i\varphi}.$$

Положив здесь $z = -1$ и, следовательно, $\varphi = \pi$, получим

$$e^{i\pi} = -1$$

— связь между числами $e$, $\pi$ и $i$!

Напомним, что числа $\pi$, $e$ и $i$ возникли в математике по совершенно разным и далеким друг от друга поводам: число $\pi$ — как отношение длины окружности к диаметру, $e$ — как такое основание показательной функции, при котором производная функция совпадает с самой функцией, а мнимая единица $i$ была введена для того, чтобы каждое квадратное уравнение имело решение.

Легко находятся с помощью формул Эйлера модуль и аргумент числа $e^z$, где $z = x + iy$. Действительно (см. (37.42)),

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

т. е. $|e^z| = e^x$, $\operatorname{Arg} e^z = y$.

Синус и косинус в комплексной области обладают многими свойствами, которыми они обладают и в действительной области, однако далеко не всеми; появляются и новые свойства.

Упражнения. Доказать, что при любом комплексном $z$:

9. $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$.
10. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.
11. $\sin(z + 2\pi) = \sin z$, $\cos(z + 2\pi) = \cos z$.
12. Доказать, что для всех $z \in C$ справедливо неравенство $e^z \neq 0$.
13. Пусть $\operatorname{tg} z \overset{\text{def}}{=} \frac{\sin z}{\cos z}$. Доказать, что для всех $z \in C$ выполняется неравенство $\operatorname{tg} z \neq \pm i$. Указание. Выразить $\operatorname{tg} z$ через показательную функцию $e^z$.

Покажем, что абсолютные величины синуса и косинуса в комплексной области могут превышать единицу и, более того, не ограничены по абсолютной величине.

Заменим в рядах (37.48) и (37.49) $z$ на $iz$:

$$\sin iz = i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos iz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Сравнив получившиеся ряды с рядами (37.44) и (37.45) (при $x = z$), получим

$$i \operatorname{sh} z = \sin iz, \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz.$$

В частности, при действительном $z = y$

$$|\sin iy| = |\operatorname{sh} y| \quad \text{и} \quad |\cos iy| = \operatorname{ch} y,$$

откуда и видно, что на мнимой оси функции $\sin z$ и $\cos z$ не ограничены по абсолютной величине.

В качестве свойства нового типа, появляющегося у показательной функции $e^z$ в комплексной области, укажем еще на ее периодичность*). Именно, докажем, что функция $e^z$ имеет период $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x[\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)] =$$
$$= e^x(\cos y + i \sin y) = e^{x+iy} = e^z, \quad z = x + iy.$$

4. Разложение в ряд функции $\ln(1+x)$. Формула Тейлора для $\ln(1+x)$ имеет вид (см. п. 13.3)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

Запишем остаточный член $r_n(x)$ в формуле Лагранжа. Заметив, что

$$[\ln(1+x)]^{n+1} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}},$$

*) Если функция $f$ определена на некотором множестве чисел (вообще говоря, комплексных) $E$, то, число $T \in C$ называется ее *периодом*, если для каждого $x \in E$ имеем $x \pm T \in E$ и $f(x+T) = f(x)$. Функция, имеющая период, называется *периодической*.

получим

$$r_n(x)=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\quad 0<\theta<1.$$

Если $0\leqslant x\leqslant 1$, то $0<\frac{1}{1+\theta x}\leqslant 1$ и поэтому $|r_n(x)|<\frac{1}{n+1}$, откуда

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0. \qquad (37.53)$$

Если же $-1<x<0$, то целесообразно записать остаточный член $r_n(x)$ в форме Коши:

$$r_n(x)=(-1)^n\frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}.$$

В этом случае

$$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}=\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}<1$$

ибо в числителе дроби $\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}$ из единицы вычитается большее число чем в знаменателе; кроме того

$$\frac{1}{1+\theta x}=\frac{1}{1-\theta|x|}<\frac{1}{1-|x|},$$

поэтому

$$|r_n(x)|\leqslant\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n\cdot\frac{1}{|1+\theta x|}|x|^{n+1}\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$

откуда при $-1<x<0$ также получаем (37.53).

Таким образом,

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \qquad (37.54)$$

для всех $x\in(-1;\ 1]$.

При $x=-1$ ряд, стоящий в правой части равенства (37.54), отличается от гармонического ряда лишь множителем $-1$ и потому расходится. Расходится он также и при всех $x$ таких, что $|x|>1$, ибо в этом случае $n$-й член ряда (37.54) не стремится к нулю, более того (см. п. 12.2),

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n}\right|=+\infty.$$

5. Разложение в ряд бинома $(1+x)^\alpha$. Формула Тейлора для биномиальной функции имеет вид (см. п. 13.3)

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+r_n(x). \qquad (37.55)$$

Рассмотрим соответствующий ряд (называемый биномиальным рядом с показателем $\alpha$):

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n. \qquad (37.56)$$

Если $\alpha$ — неотрицательное целое, то ряд (37.56) содержит лишь конечное число членов, отличных от нуля, и, следовательно, сходится при всех $x$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha$ не является неотрицательным целым. В этом случае в ряде (37.56) все члены отличны от нуля при $x \neq 0$.

Для исследования абсолютной сходимости ряда (37.56) используем признак Даламбера. Иначе говоря, применим признак Даламбера к ряду с $n$-м членом:

$$u_n=\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\right|.$$

Замечая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}x\right|=|x|$, получаем, что ряд (37.56) абсолютно, а значит, и просто сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|>1$.

Однако из одного лишь факта сходимости биномиального ряда (37.56) при $|x|<1$ нельзя еще сделать заключение о том, что его сумма равна $(1+x)^\alpha$. Для этого надо доказать, что в формуле (37.55) $r_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$.

Замечая, что

$$[(1+x)^\alpha]^{(n+1)}=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1},$$

запишем остаточный член $r_n(x)$ формулы (37.55) в форме Коши:

$$r_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}, \quad 0<\theta<1$$

($\theta$ зависит от $x$ и от $n$). Положим

$$A_n(x)=\frac{(\alpha-1)\ldots[(\alpha-1)-(n-1)]}{n!}x^n,$$

$$B_n(x)=\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}, \quad C_n(x)=\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n;$$

тогда

$$r_n(x)=A_n(x)B_n(x)C_n(x).$$

Очевидно, $A_n(x)$ является общим членом биномиального ряда с показателем $\alpha-1$ и, следовательно, в силу доказанной выше сходимости биномиального ряда при $|x|<1$

$$\lim_{n\to\infty}A_n(x)=0, \quad |x|<1.$$

Далее, из того, что $1-|x|<1+\theta x<1+|x|$, следует, что значения $|B_n(x)|$ заключены между величинами

$$|\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1} \quad \text{и} \quad |\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1},$$

не зависящими от $\theta$, т. е. последовательность $\{B_n(x)\}$ при фиксированном $x\in(-1,\ 1)$ ограничена. Наконец,

$$|C_n(x)|=\left|\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right|^n\leqslant\left|\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}\right|^n<1.$$

Из установленных свойств $A_n(x)$, $B_n(x)$ и $C_n(x)$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0, \qquad |x|<1.$$

Таким образом, для любого $x\in(-1;\ 1)$ справедливо равенство

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

**Задача 26.** Доказать, что 1) в точке $x=1$ при $\alpha>-1$ биномиальный ряд сходится, а при $\alpha\leqslant-1$ — расходится;

2) в точке $x=-1$ при $\alpha\geqslant 0$ биномиальный ряд абсолютно сходится, а при $\alpha<0$ — расходится.

При этом каждый раз, когда биномиальный ряд (37.56) сходится, его сумма рявна $(1+x)^\alpha$.

## 37.7. РАЗЛОЖЕНИЕ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И СУММИРОВАНИЕ ИХ МЕТОДОМ ПОЧЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Дифференцируя или интегрируя известные разложения в ряд Тейлора, можно получать разложения новых функций в степенные ряды. Так, например, интегрируя формулу геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-\ldots+(-1)^n t^n+\ldots \tag{37.57}$$

в пределах от 0 до $x$, $|x|<1$ (что законно, ибо ряд (37.57) равномерно сходится на отрезке с концами в точках 0 и $x$ при $|x|<1$), получим известную уже формулу (37.54):

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots$$

Раньше эта формула была доказана на полуинтервале $(-1;\ 1]$, а теперь только для интервала $(-1;\ 1)$. Однако в силу второй теоремы Абеля о степенных рядах (п. 37.1) из справедливости формулы (37.54) на интервале $(-1;\ 1)$ сразу следует ее справедливость и при $x=1$. Действительно, ряд в правой части этой формулы сходится при $x=1$ и, следовательно, его сумма непрерывна в этой точке (см. теорему 3 в п. 37.1), функция $\ln(1+x)$ также непрерывна при $x=1$, поэтому в обеих частях равенства (37.54) (если известно, что оно справедливо на интервале $(-1; 1)$) можно перейти к пределу при $x \to 1-0$ и тем самым доказать его справедливость и при $x=1$:

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

В результате дифференцирования или интегрирования заданного степенного ряда, иногда удается получить ряд, сумма которого уже известна; это позволяет вычислить и сумму исходного степенного ряда.

Примеры. 1. Найдем разложение функции $\arcsin x$ в ряд. Замечая, что

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

разложим $(\arcsin x)'$ в ряд по формуле разложения степени бинома (см. п. 37.6):

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n}. \qquad (37.58)$$

Радиус сходимости получившегося ряда равен единице (см. там же). Интегрируя ряд (37.58) от 0 до $x$, $|x|<1$, получим:

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

2. Разложим функцию $\operatorname{arctg} x$ в степенной ряд и с помощью него найдем числовой ряд, сумма которого равна $\pi$.

Поступая при $|x|<1$ аналогично примеру 1, имеем:

$$\operatorname{arctg} x = \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \qquad (37.59)$$

Заметим, что полученный ряд при $x = \pm 1$ по признаку Лейбница (см. п. 35.9, теорему 11) сходится, ибо сходится знакопеременный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Поскольку функция $\operatorname{arctg} x$ непрерывна при $x = \pm 1$, то согласно второй теореме Абеля для степенных рядов (см. п. 37.1, теорема 3) сумма ряда (37.59), являясь непрерывной функцией на отрезке $[-1, 1]$ и совпадая с $\operatorname{arctg} x$ на интервале $(-1, +1)$, совпадает с ним и в концевых точках $x=\pm 1$. Иначе говоря, разложение (37.59) справедливо для отрезка $[-1, +1]$. Беря в этом разложении, например, $x=1$ и замечая, что $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, получим

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Этот ряд называется *рядом Лейбница*.

Отметим, что арктангенс определен на всей действительной числовой оси, в частности и вне отрезка $[-1, 1]$. Однако его разложение в степенной ряд (37.59) справедливо только на этом отрезке. Вне этого отрезка ряд (37.59) расходится, в чем легко убедиться, найдя его радиус сходимости, например, по формуле (37.8′). Анализ этого явления проводится в теории функций комплексного переменного.

3. Найдем сумму ряда

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n. \tag{37.60}$$

Радиус сходимости этого ряда равен единице. В этом легко убедиться, например, по признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\,x^{n+1}}{nx} \right| = |x|.$$

Следовательно, ряд (37.60) абсолютно сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|>1$. Из (37.60) следует, что

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad |x|<1.$$

Проинтегрируем этот ряд почленно от 0 до $x$, $|x|<1$:

$$\int_0^x \frac{S(t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

и затем продифференцируем получившееся тождество:

$$\frac{S(x)}{x} = \frac{d}{dx}\frac{x}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

В результате получаем

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x|<1.$$

4. Найдем сумму ряда

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}. \qquad (37.61)$$

Радиус сходимости этого ряда равен единице; в этом легко убедиться, например, тем же способом, что и в случае ряда (37.60). Продифференцировав ряд (37.61) почленно:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n},$$

и использовав разложение логарифма (см. п. 37.6), получим:

$$xS'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad |x| < 1, \quad \text{или} \quad S'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Замечая, что $S(0) = 0$, окончательно получим

$$S(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt.$$

Таким образом, здесь ответ выражается не в элементарных функциях.

Упражнения. 14. Разложить в степенной ряд функцию $(\arcsin x)^2$.

15. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$.

## 37.8. ФОРМУЛА СТИРЛИНГА

С помощью разложения логарифмической функции в степенной ряд можно легко найти формулу, описывающую асимптотическое поведение факториала $n!$ при $n \to \infty$. Она называется *формулой Стирлинга* *) и может быть записана в виде

$$n! \sim \frac{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}; \qquad (37.62)$$

согласно определению асимптотического равенства для последовательностей (см. п. 23.3) это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = 1.$$

*) Дж. Стирлинг (1692—1770) — английский математик.

Из разложения

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \quad -1<x\leqslant 1,$$

следует, что

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x^n}{n}\right)=2x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k+1}.$$

Полагая здесь $x=\frac{1}{2n+1}$, $n=1, 2, \ldots$, получим

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}=$$
$$=\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots\right]\leqslant\frac{2}{2n+1}=\frac{1}{n+\frac{1}{2}},$$

откуда

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1,$$

или, потенцируя и принимая во внимание, что функция $\ln x$ — монотонно возрастающая,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}<e. \tag{37.63}$$

Положим

$$x_n\stackrel{\text{def}}{=}\frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}; \tag{37.64}$$

поскольку согласно (37.63)

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}<1,$$

то последовательность $\{x_n\}$ убывает, и, кроме того, она ограничена снизу $x_n\geqslant 0$. Следовательно, существует предел

$$\lim_{n\to\infty}x_n\stackrel{\text{def}}{=}a.$$

Поэтому

$$x_n=a(1+\varepsilon_n), \tag{37.65}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

Подставим (37.65) в (37.64):

$$n! = a\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}(1+\varepsilon_n). \qquad (37.66)$$

Для того чтобы получить формулу (37.62) осталось лишь показать, что $a=\sqrt{2\pi}$. По формуле Валлиса (см. (30.8) в п. 30.2)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2, \qquad (37.67)$$

а согласно (37.66)

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = a\sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{(1+\varepsilon_n)^2}{1+\varepsilon_{2n}}.$$

Подставив это выражение в (37.67), получим

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\,a^2\,\frac{n}{2}\,\frac{(1+\varepsilon_n)^4}{(1+\varepsilon_{2n})^2} = \frac{a^2}{4},$$

откуда $a=\sqrt{2\pi}$. □

## 37.9*. ФОРМУЛА И РЯД ТЕЙЛОРА ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Рассмотрим вектор-функцию $f:[a, b]\to R^n$, где $R^n$ — $n$-мерное векторное пространство. Как уже отмечалось, на вектор-функции обобщаются понятия предела, непрерывности, производной, дифференциала и интеграла (см. § 15, п. 18.4 и п. 30.4), на которые переносятся многие свойства этих понятий, справедливые для числовых функций. Однако, далеко не для всех свойств это имеет место. Так, в п. 15.2 было показано, что утверждение, аналогичное формуле конечных приращений Лагранжа, уже не справедливо для вектор-функций. Поэтому не справедливо, конечно, и ее обобщение в виде формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Покажем, что для вектор-функций справедлива формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

**Теорема 10.** *Пусть функция $\boldsymbol{f}:(t_0+h,\ t_0-h)\to R^n$ непрерывна вместе со всеми своими производными до порядка $n+1$ включительно на интервале $(t_0-h,\ t_0+h)$, $h>0$. Тогда для любого $t\in(t_0-h,\ t_0+h)$ справедлива формула*

$$\boldsymbol{f}(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\boldsymbol{f}^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^n\boldsymbol{f}^{(n+1)}(\tau)\,d\tau. \qquad (37.68)$$

**Следствие.**

$$\left|\boldsymbol{f}(t) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\boldsymbol{f}^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k\right| \leqslant \frac{1}{n!}(t-t_0)^{n+1}\sup_{(t_0-h,\ t_0+h)}|\boldsymbol{f}^{(n+1)}(\tau)|,$$

$$t\in(t_0-h,\ t_0+h).$$

Доказательство теоремы. Прежде всего напомним, что если

$$f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t)), \tag{37.69}$$

то

$$f'(t) = (f_1'(t), \ldots, f_n'(t)), \quad t \in (t_0 - h, t_0 + h), \tag{37.70}$$

$$\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(\tau)\,d\tau = \left(\int_{t_0}^{t} f_1(\tau)\,d\tau, \ldots, \int_{t_0}^{t} f_n(\tau)\,d\tau\right). \tag{37.71}$$

Из предположений теоремы следует, что каждая координатная функция $f_i$ непрерывна на интервале $(t_0 - h, t_0 + h)$ вместе со всеми своими производными до порядка $n+1$ включительно, и поэтому для нее справедлива формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f_i(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f_i^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k + \\ + \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t} (t-\tau)^n f_i^{(n+1)}(\tau)\,d\tau, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда в силу (37.70) и (37.71) и следует сразу справедливость формулы (37.68). □

Следствие вытекает из неравенства

$$\left|\int_{t_0}^{t} (t-\tau)^n \boldsymbol{f}^{n+1}(\tau)\,d\tau\right| \leqslant \\ \leqslant |t - t_0|^n \left|\int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{f}^{(n+1)}(\tau)|\,d\tau\right| \leqslant |t - t_0|^n \sup_{(t_0 - h,\, t_0 + h)} |\boldsymbol{f}^{(n+1)}(\tau)| \left|\int_{t_0}^{t} d\tau\right| = \\ = |t - t_0|^{n+1} \sup_{(t_0 - h,\, t_0 + h)} |\boldsymbol{f}^{(n+1)}(\tau)|. \ \square$$

Для вектор-функций справедлива формула Тейлора и с остаточным членом в форме Пеано: если функция $\boldsymbol{f}: (t_0 - h, t_0 + h) \to R^n$ имеет в точке $t_0$ производную порядка $n$, то

$$\boldsymbol{f}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \boldsymbol{f}^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k + \boldsymbol{o}((t - t_0)^n).$$

Это также следует сразу из того, что для каждой координатной функции $f_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, в предположениях теоремы имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки $t_0$ (см. п. 13.1).

Если вектор-функция $\boldsymbol{f}: (t_0 - h, t_0 + h) \to R^n$ имеет в точке $t_0$ производные всех порядков и для любого $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$

выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}\left[\boldsymbol{f}(t)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\boldsymbol{f}^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k\right]=0,$$

то на интервале $(t_0-h,\ t_0+h)$ функция $\boldsymbol{f}$ раскладывается в степенной ряд с векторными коэффициентами

$$\boldsymbol{f}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\boldsymbol{f}^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n,$$

называемый ее *рядом Тейлора*.

## 37.10*. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Известно (см. п. 13.1), что если функция $f$ определена в окрестности точки $x_0$ и $n$ раз в ней дифференцируема, то существует такой многочлен $P_n(x)$ степени, не большей $n$, а именно многочлен Тейлора, что

$$f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0,\quad n=1,\ 2,\ \ldots,\tag{37.72}$$

При этом

$$P_n(x)=P_{n-1}(x)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.\tag{37.73}$$

Из (37.72) и (37.73) следует, что разность $f(x)-P_{n-1}(x)$ представима в виде

$$f(x)-P_{n-1}(x)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0,$$

и, тем самым, имеет место асимптотическое равенство

$$f(x)-P_{n-1}(x)\sim\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\quad x\to x_0.$$

Таким образом, члены многочлена Тейлора $P_n(x)$ (ряда Тейлора, если функция $f$ бесконечно дифференцируема в точке $x_0$) можно последовательно определить как слагаемые вида $a_n(x-x_0)^n$, асимптотически равные разности $f(x)-P_{n-1}(x)$ при $x\to x_0$.

Аналогичным образом можно поступать и при изучении функции в бесконечности. Пусть для определенности функция $f$ определена при $x\geqslant a$, и существует конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a_0.\tag{37.74}$$

а, следовательно $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-a_0]=0$.

Иногда возникает вопрос как именно разность $f(x)-a_0$ стремится к нулю, каков порядок убывания этой разности? Может случиться, что существует такое число $a_1$, что

$$f(x)-a_0 \sim \frac{a_1}{x}, \quad x \to +\infty, \tag{37.75}$$

т. е. (см. теорему 1 в п. 8.3)

$$f(x)-a_0=\frac{a_1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty, \tag{37.76}$$

откуда

$$x[f(x)-a_0]=a_1+x\,o(1/x), \quad x \to +\infty,$$

а поскольку в силу определения символа $o$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,o(1/x)=0$, то

$$a_1=\lim_{x \to +\infty} x[f(x)-a_0]. \tag{37.77}$$

Наоборот, из (37.77) следует, что

$$x[f(x)-a_0]=a_1+\varepsilon(x), \quad \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x)=0,$$

и, следовательно,

$$f(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{\varepsilon(x)}{x}=a_0+\frac{a_1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty,$$

т. е. выполняется асимптотическое равенство (37.76). Если указанное $a_1$ найдено, то часто бывает нужно найти, как говорят, «следующий член асимптотического разложения» функции $f$, т. е. найти асимптотическое поведение разности $f(x)-\left(a_0+\frac{a_1}{x}\right)$ при $x \to +\infty$. Эта разность согласно (37.76) представляет собой не что иное, как $o(1/x)$, $x \to +\infty$. Может случиться, что существует такое число $a_2$, что

$$f(x)-\left(a_0+\frac{a_1}{x}\right) \sim \frac{a_2}{x^2},$$

или, что то же

$$f(x)-\left(a_0+\frac{a_1}{x}\right)=\frac{a_2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \to +\infty.$$

Это условие равносильно существованию предела

$$\lim_{x \to +\infty} x^2\left[f(x)-\left(a_0+\frac{a_1}{x}\right)\right]=a_2.$$

Вообще, если

$$S_{n-1}(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}, \quad (n=1,\ 2,\ \ldots) \tag{37.78}$$

— такой многочлен степени не большей $n-1$ относительно переменной $1/x$, что

$$f(x)-\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_{n-2}}{x^{n-2}}\right) \sim \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}, \quad x \to +\infty, \quad n=2,\ 3,\ \ldots,$$

то может случиться, что существует такая постоянная $a_n$, для которой имеет место асимптотическое равенство

$$f(x)-S_{n-1}(x)\sim\frac{a_n}{x^n},\quad x\to+\infty. \tag{37.79}$$

Это условие равносильно следующему:

$$f(x)-S_{n-1}(x)=\frac{a_n}{x^n}+o\left(\frac{1}{x^n}\right),\quad x\to\infty, \tag{37.80}$$

которое, полагая

$$S_n(x)=S_{n-1}(x)+\frac{a_n}{x^n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{x^k}, \tag{37.81}$$

можно переписать в виде

$$f(x)-S_n(x)=o\left(\frac{1}{x^n}\right),\quad x\to+\infty, \tag{37.82}$$

или, что то же, в виде

$$\lim_{x\to+\infty}x^n[f(x)-S_n(x)]=0. \tag{37.83}$$

Как и выше, при $n=1$, легко показать, что условие (37.80) равносильно существованию конечного предела

$$\lim_{x\to+\infty}x^n[f(x)-S_{n-1}(x)]=a_n. \tag{37.84}$$

Если указанные пределы $a_n$ существуют для всех $n=0, 1, 2, \ldots$, то можно образовать ряд

$$a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}+\ldots \tag{37.85}$$

Ряды такого вида также можно назвать *степенными рядами*, точнее, степенными рядами по целым отрицательным степеням переменной $x$.

**Определение 5.** *Пусть функция $f$ определена при $x\geqslant a$ и* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a_0$. *Если существует ряд вида* (37.85), *частичные суммы* (37.78) *которого удовлетворяют условию* (37.79), *либо, что равносильно, одному из условий* (37 82) *или* (37.83), *то этот ряд называется асимптотическим рядом (или асимптотическим разложением) в смысле Пуанкаре*[*)] *функции $f$ при $x\to+\infty$.*

В этом случае пишут

$$f\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{x^n}. \tag{37.86}$$

Подчеркнем, что здесь знак $\sim$ означает не асимптотическое равенство в том смысле, как оно, например, понимается в фор-

[*)] А. Пуанкаре (1854—1912)—французский математик.

муле (37.79), т. е. в смысле определения 3 п. 8. 2, а соответствие: ряд (37.85) соответствует функции $f$.

Как было отмечено, условие (37.80) равносильно условию (37.84), поэтому, если у функции $f$ существует при $x \to +\infty$ асимптотический ряд (37.85), то его коэффициенты $a_n$, $n=1, 2\ldots$, могут быть последовательно найдены по формулам (37.84). При $n=0$ следует воспользоваться формулой (37.74). Отсюда следует, что если у функции имеется при $x \to +\infty$ асимптотический ряд, то он единственен и его коэффициенты выражаются по формулам (37.74) и (37.84).

Вспомним, что при разложении функции в степенной ряд также была доказана единственность степенного ряда, в который раскладывается функция, а именно было доказано его совпадение с ее рядом Тейлора. Однако, там было отмечено, что один и тот же степенной ряд может являться рядом Тейлора разных функций. Подобная ситуация имеет место и для асимптотических рядов: один и тот же ряд вида (37.85) может оказаться асимптотическим рядом при $x \to +\infty$ разных функций. Например, нулевой ряд, т. е. ряд, все коэффициенты которого равны нулю,

$$a_n=0,\ x=0,\ 1,\ 2,\ldots,$$

является при $x \to +\infty$ как асимптотическим рядом функции, равной нулю во всех точках числовой оси: $f_1(x)=0$, $-\infty<x<+\infty$, так и функции $f_2(x)=e^{-x}$, в чем легко убедиться, вычислив в этих случаях последовательно пределы (37.84).

В отличие от разложения функций в степенные ряды, при котором суммой степенного ряда является заданная функция, и, следовательно, рассматриваемый степенной ряд сходится, при построении асимптотического ряда функции может случиться, что полученный ряд не только не будет сходиться к данной функции, а будет вообще расходиться во всех точках. Тем не менее, асимптотический ряд (37.86) функции является полезным инструментом для ее изучения, в частности для вычисления ее значений. Это, очевидно, связано с тем, что частные суммы асимптотического ряда (37.86) функции в силу условия (37.82) достаточно хорошо приближают саму функцию, причем тем лучше, чем больше $x$.

Поясним сказанное на примере функции

$$f(x)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{x-t}}{t}\,dt,\quad x>0. \tag{37.87}$$

Интегрируя $n$ раз по частям, получим

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}+ \\ +(-1)^n n!\int_x^{+\infty}\frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\,dt. \tag{37.88}$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \tag{37.89}$$

является асимптотическим разложением функции (37.87). Действительно, если $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$, $n=1, 2, \ldots$,

т. е. $S_n(x)$ — частичные суммы ряда (37.89), то интегрируя по частям в силу (37.88) будем иметь:

$$|f(x)-S_n(x)|=n!\int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}dt=\frac{n!}{x^{n+1}}-(n+1)!\int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}dt\leqslant\frac{n!}{x^{n+1}}=o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

т. е. выполняется условие (37.82).

Вместе с тем легко убедиться по признаку Даламбера, что ряд (37.89) расходится при всех $x \in(-\infty, +\infty)$. Действительно, полагая

$$u_n=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x}, \quad n=1, 2, \ldots,$$

получим

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{|x|}=+\infty.$$

Итак, асимптотический ряд (37.89) функции (37.87) расходится во всех точках. Однако, несмотря на это значения функции (37.87) могут быть получены с большой степенью точности при помощи частичных сумм этого ряда.

Покажем, что если ряд (37.85) сходится к некоторой функции $f$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \qquad x \geqslant a>0, \tag{37.90}$$

то он является и асимптотическим рядом этой функции при $x \to +\infty$.

В самом деле, пусть

$$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{x^k},$$

и, следовательно,

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x).$$

Покажем, что

$$R_n(x)=O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \qquad x\to+\infty, \tag{37.91}$$

а потому, тем более, что

$$R_n(x)=o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x\to+\infty,$$

т. е. что

$$f(x)-S_n(x)=o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x\to+\infty,$$

иначе говоря, что выполняется условие (37.82). Для этого рассмотрим функцию $F(t)\overset{\text{def}}{=}f(1/t)$, $0<t\leqslant 1/a$. В силу (37.90) получим равенство

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

в котором ряд, стоящий в правой части сходится при $0<t<1/a$, откуда по теореме Абеля следует, что он сходится и при всех таких $t$, что $|t|<1/a$. Если

$$r_n(t)=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k t^k, \quad |t|<1/a,$$

то (см. лемму 1 в п. 37.3) $r_n(t)=O(t^{n+1})$, $t\to 0$. Выполнив здесь замену переменного $t=\frac{1}{x}$, получим (37.91).

В заключение отметим, что условие (37.82) разложения функции в степенной асимптотический ряд можно заменить другим, внешне более сильным, но по существу эквивалентным условием. Сформулируем его в виде леммы.

**Лемма 3.** *Для того чтобы ряд* (37.85) *являлся асимптотическим при* $x\to+\infty$ *для функции* $f$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$f(x)-S_n(x)=O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad x\to+\infty, \tag{37.92}$$
$$n=1,\ 2,\ \ldots.$$

Достаточность этого условия очевидна, так как $O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)=$ $=o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ (напомним, что подобные равенства читаются только слева направо), а, следовательно, при выполнении условия (37.92) будет выполняться (37.82).

Наоборот, если выполнено условие (37.82):

$$f(x)-S_{n+1}(x)=o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ x\to+\infty,$$

то, поскольку $S_{n+1}(x)=S_n(x)+\frac{a_{n+1}}{x^{n+1}}$ получим

$$f(x)-S_n(x)=\frac{a_{n+1}}{x^{n+1}}+o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)=O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right). \ \square$$

## 37.11*. СВОЙСТВА АСИМПТОТИЧЕСКИХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

В этом пункте будут сформулированы и доказаны некоторые основные свойства разложений функций в асимптотические степенные ряды. В дальнейшем, в п. 54.6, будут рассмотрены более общие, не обязательно степенные, асимптотические ряды. Поскольку в настоящем пункте будут изучаться только асимптотические разложения функций при $x \to +\infty$ в степенные ряды вида (37.85), то мы будем их называть просто *асимптотическими разложениями*.

I. *Если*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty, \tag{37.93}$$

*то для любых чисел* $\lambda$ и $\mu$

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda a_n + \mu b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty,$$

*т. е. асимптотическое разложение линейной комбинации функций, имеющих асимптотическое разложение, равно такой же линейной комбинации асимптотических разложений этих функций.*

Действительно, если

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty, \tag{37.94}$$

то для любых чисел $\lambda$ и $\mu$:

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda a_k + \mu b_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty. \square$$

II. *Если имеют место асимптотические разложения* (37.93), *то*

$$f(x) g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n}, \quad x \to +\infty,$$

*где* $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$, *т. е. асимптотическое разложение произведения функций, имеющих асимптотические разложения, равно произведению этих разложений, расположенных по возрастающим степеням* $1/x$.

В самом деле, если имеет место (37.94), то

$$f(x) g(x) = \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right)\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right) =$$

$$= a_0 b_0 + \frac{a_0 b_1 + a_1 b_0}{x} + \ldots + \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty. \square$$

III. *Если*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \qquad x \to +\infty, \tag{37.95}$$

*и* $a_0 \neq 0$, *то функция* $1/f(x)$ *также имеет асимптотическое разложение*

$$f(x) \sim \frac{1}{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{x^n}, \qquad x \to +\infty,$$

*и коэффициент* $d_n$ *этого разложения выражается через коэффициенты* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *разложения* (37.95).

Действительно, из (37.95) следует (см. (37.74)), что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a_0$. Поэтому существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0}.$$

Далее, можно последовательно показать существование пределов (37.84) для функции $1/f(x)$, непосредственно вычисляя их. Например,

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a_0}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{a_0}\right) =$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} \frac{a_1 + x\,o\left(\frac{1}{x}\right)}{a_0\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = -\frac{a_1}{a_0^2},$$

т. е. $d_1 = -a_1/a_0^2$.

Аналогично вычисляются $d_2, d_3, \ldots$. □

IV. *Если функция* $f$ *непрерывна при* $x \geqslant a > 0$ *и имеет асимптотическое разложение, начинающееся с члена порядка* $\frac{1}{x^2}$,

$$f(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \qquad x \to +\infty, \tag{37.96}$$

*то*

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt \sim \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{(n-1)\,x^{n-1}}, \qquad x \to +\infty, \tag{37.97}$$

*т. е. в указанном случае асимптотические ряды можно почленно интегрировать.*

Докажем это. Пусть

$$S_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{x^k}, \qquad R_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - S_n(x), \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Поскольку функции $f$ и $S_n$ непрерывны при $x \geqslant a$, то и функция $R_n$ непрерывна при $x \geqslant a$. В силу (37.96)

$$R_n(x) = o(1/x^n), \quad x \to +\infty.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $x_\varepsilon \geqslant a$, что для всех $x \geqslant x_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{x^n}.$$

Отсюда следует, во-первых, что интеграл $\int\limits_{x_\varepsilon}^{+\infty} R_n(t)\,dt$, а поэтому и интеграл $\int\limits_{x}^{+\infty} R_n(t)\,dt$, $x \geqslant x_\varepsilon$, существуют, а во-вторых, что при $x \geqslant x_\varepsilon$ имеет место неравенство

$$\left| x^{n-1} \int\limits_x^{+\infty} R_n(t)\,dt \right| \leqslant x^{n-1} \int\limits_x^{+\infty} |R_n(t)|\,dt \leqslant \varepsilon x^{n-1} \int\limits_x^{+\infty} \frac{dt}{t^n} = \frac{\varepsilon}{n-1},$$

и, следовательно, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} x^{n-1} \int\limits_x^{+\infty} R_n(t)\,dt = 0. \qquad (37.93)$$

Теперь, интегрируя равенство $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$, получим

$$\int\limits_x^{+\infty} f(t)\,dt = \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{(k-1)\,x^{k-1}} + \int\limits_x^{+\infty} R_n(t)\,dt. \qquad (37.99)$$

В силу выполнения условия (37.98) равенство (37.99) и означает справедливость асимптотического разложения (37.97) (см. (37.83)). □

V. *Если функция $f$ раскладывается в асимптотический ряд*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \to +\infty, \qquad (37.100)$$

*и если она имеет при $x \geqslant a$ непрерывную производную, которая также при $x \to +\infty$ раскладывается в асимптотический ряд, то этот ряд получается формальным почленным дифференцированием ряда* (37.100)

$$f'(x) \sim -\sum_{n=1} \frac{na_n}{x^{n+1}}, \quad x \to +\infty. \qquad (37.101)$$

В самом деле, пусть

$$f'(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty. \qquad (37.102)$$

По формуле Ньютона — Лейбница для любых $x \geqslant a$ и $y \geqslant a$

$$f(y)-f(x)=\int_x^y f'(t)\,dt=\int_x^y \left[b_0+\frac{b_1}{t}+\left(f'(t)-b_0-\frac{b_1}{t}\right)\right]dt=$$

$$=b_0(y-x)+b_1\ln\frac{y}{x}+\int_x^y\left[f'(t)-b_0-\frac{b_1}{t}\right]dt. \qquad (37.103)$$

Согласно (37.102) $f'(t)-b_0-\frac{b_1}{t}=O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $t\to+\infty$. Следовательно, интеграл

$$\int_x^{+\infty}\left[f'(t)-b_0-\frac{b_1}{t}\right]dt$$

сходится. В силу (37.100) существует конечный предел

$$\lim_{y\to+\infty} f(y)=a_0.$$

Поэтому, переходя к пределу при $y\to+\infty$ в (37.103), убеждаемся в том, что существует конечный предел

$$\lim_{y\to+\infty}\left[b_0(y-x)+b_1\ln\frac{y}{x}\right],$$

Это возможно только в случае, когда $b_0=b_1=0$. Таким образом, равенство (37.103) в пределе перейдет в равенство

$$a_0-f(x)=\int_x^{+\infty} f'(t)\,dt;$$

при этом в силу условия $b_0=b_1=0$ из (37.102) имеем:

$$f'(x)\sim\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{b_n}{x^n},\qquad x\to+\infty;$$

отсюда, интегрируя почленно в пределах от $x$ до $+\infty$ согласно свойству IV, получим

$$a_0-f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{n+1}}{nx^n},\qquad x\to+\infty.$$

Но из (37.100) следует, что

$$a_0-f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{x^n}.$$

Вспоминая, что разложение функции при $x\to+\infty$ в асимптотический степенной ряд единственно, из сравнения получившихся для функции $a_0-f(x)$ рядов найдем, что

$$b_{n+1}=-na_n,\ n=1,\ 2,\ \ldots .\ \square$$

Замечание. Если непрерывно дифференцируемая при $x \geqslant a$ функция $f$ раскладывается при $x \to +\infty$ в асимптотический ряд, то ее производная может не иметь при $x \to +\infty$ асимптотического разложения. Тем самым требование существования асимптотического разложения у производной в предложении V является существенным. В качестве примера рассмотрим функцию $f(x) = e^{-x} \sin e^x$, $-\infty < x < +\infty$. Нетрудно с помощью формул (37.84) убедиться, что функция $f$ при $x \to +\infty$ раскладывается в нулевой асимптотический ряд, т. е. ряд (37.85), у которого $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Ее производная $f'(x) = -e^{-x} \sin e^x + \cos e^x$ заведомо не имеет асимптотического разложения при $x \to +\infty$, так как она даже не имеет предела при $x \to +\infty$.

Упражнение 16. Доказать, что

а) $$\int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \ldots, \quad x \to +\infty;$$

б) $$\int\limits_x^{+\infty} e^{x^2-t^2}\,dt \sim \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4x^7} + \ldots, \quad x \to +\infty.$$

## § 38*. КРАТНЫЕ РЯДЫ

### 38.1. КРАТНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

В настоящем параграфе будут рассматриваться так называемые кратные ряды вида

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{\infty} u_{n_1 \ldots n_k}, \tag{38.1}$$

где $u_{n_1 \ldots n_k}$ — заданные числа (вообще говоря комплексные) занумерованные $k$ индексами $n_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, каждый из которых независимо от другого пробегает натуральный ряд чисел: $n_i = 1, 2, \ldots$. Ряд (38.1) называется $k$-кратным рядом, а числа $u_{n_1 \ldots n_k}$ — его членами.

Определим четко эти понятия. Начнем с понятия кратной последовательности.

**Определение 1.** *Пусть $X$ — некоторое множество; $k$-кратной последовательностью элементов множества $X$ называется отображение* $f$: $\underbrace{N \times N \times \ldots \times N}_{k \text{ раз}} \to X$ ($N$, как всегда, обозначает множество натуральных чисел).

Элемент $x = f(n_1, \ldots, n_k)$, $n_1 \in N, \ldots, n_k \in N$, обозначается через $x_{n_1 \ldots n_k}$, а сама последовательность через $\{x_{n_1} \ldots {}_{n_k}\}$.

Однократная последовательность называется просто последовательностью.