Замечание. Если непрерывно дифференцируемая при $x \geqslant a$ функция f раскладывается при $x \to +\infty$ в асимптотический ряд, то ее производная может не иметь при $x \to +\infty$ асимптотического разложения. Тем самым требование существования асимптотического разложения у производной в предложении V является существенным. В качестве примера рассмотрим функцию $f(x) = e^{-x} \sin e^x$, $-\infty < x < +\infty$. Нетрудно с помощью формул (37.84) убедиться, что функция f при $x \to +\infty$ раскладывается в нулевой асимптотический ряд, т. е. ряд (37.85), у которого $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Ее производная $f'(x) = -e^{-x} \sin e^x + \cos e^x$ заведомо не имеет асимптотического разложения при $x \to +\infty$, так как она даже не имеет предела при $x \to +\infty$.

Упражнение 16. Доказать, что

а) $\displaystyle\int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \ldots, \ x \to +\infty;$

б) $\displaystyle\int\limits_x^{+\infty} e^{x^2-t^2} dt \sim \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^3x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4x^7} + \ldots, \ x \to +\infty.$

§ 38*. КРАТНЫЕ РЯДЫ

38.1. КРАТНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

В настоящем параграфе будут рассматриваться так называемые кратные ряды вида

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{\infty} u_{n_1 \ldots n_k}, \tag{38.1}$$

где $u_{n_1 \ldots n_k}$ — заданные числа (вообще говоря комплексные) занумерованные k индексами n_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, каждый из которых независимо от другого пробегает натуральный ряд чисел: $n_i = 1, 2, \ldots$. Ряд (38.1) называется k-кратным рядом, а числа $u_{n_1 \ldots n_k}$ — его членами.

Определим четко эти понятия. Начнем с понятия кратной последовательности.

Определение 1. *Пусть X — некоторое множество; k-кратной последовательностью элементов множества X называется отображение f:* $\underbrace{N \times N \times \ldots \times N}_{k \text{ раз}} \to X$ (N, как всегда, обозначает множество натуральных чисел).

Элемент $x = f(n_1, \ldots, n_k)$, $n_1 \in N, \ldots, n_k \in N$, обозначается через $x_{n_1 \ldots n_k}$, а сама последовательность через $\{x_{n_1} \ldots {}_{n_k}\}$.

Однократная последовательность называется просто последовательностью.

Итак, элементы k-кратной последовательности «занумерованы» k натуральными индексами. Мы будем рассматривать числовые кратные последовательности, т. е. кратные последовательности, элементами которых являются комплексные, в частности действительные, числа. Для простоты обозначений ограничимся случаем $k=2$. Обобщение на случай произвольного натурального $k \in N$ делается безо всякого труда.

Определение 2. *Число* $a \in C$ *называется пределом двойной последовательности* $\{x_{mn}\}$ *и пишется* $a = \lim\limits_{m,\, n \to \infty} x_{mn}$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $n_\varepsilon \in N$, *что для всех* $m \geqslant n_\varepsilon$, $n \geqslant n_\varepsilon$, $m \in N$, $n \in N$, *выполняется неравенство* $|x_{mn} - a| < \varepsilon$.

Если двойная последовательность имеет предел, то она называется *сходящейся.*

Определение 3. *Двойная последовательность называется последовательностью, стремящейся к* $+\infty$, *и пишется* $\lim\limits_{m,\, n \to \infty} x_{mn} = +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ *существует такое* $n_\varepsilon \in N$, *что для всех* $m \geqslant n_\varepsilon$, $n \geqslant n_\varepsilon$, $m \in N$, $n \in N$, *выполняется неравенство* $x_{mn} > \varepsilon$.

Аналогично определяются бесконечные пределы $\lim\limits_{m,\, n \to \infty} x_{mn} = -\infty$ и $\lim\limits_{m,\, n \to \infty} x_{mn} = \infty$.

Как обычно, под пределом (в данном случае двойной последовательности) понимается конечный предел, если не оговорено что-либо другое.

Определим теперь двойной ряд.

Определение 4. *Пусть задана двойная последовательность* $\{u_{mn}\}$. *Составим двойную числовую последовательность*

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} u_{kl}. \tag{38.2}$$

Пара последовательностей $\{u_{mn}\}$, $\{S_{mn}\}$ *называется двойным рядом и обозначается через*

$$\sum_{m,\, n=1}^{\infty} u_{mn}. \tag{38.3}$$

Элементы двойной последовательности $\{u_{mn}\}$ называются *членами ряда* (38.3), а элементы двойной последовательности $\{S_{mn}\}$ — *частичными суммами* этого ряда.

Определение 5. *Двойной ряд* (38.3) *называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм сходится. Ее предел называется суммой ряда; причем, если*

$$\lim_{m,\, n \to \infty} S_{mn} = S, \tag{38.4}$$

то пишется

$$\sum_{m,\ n=1}^{\infty} u_{mn} = S.$$

Если конечного предела (38.4) *не существует, то ряд* (38.3) *называется расходящимся. Если существует один из бесконечных пределов*

$$\lim_{m,\ n \to \infty} S_{mn} = +\infty, \quad \lim_{m,\ n \to \infty} S_{mn} = -\infty, \tag{38.5}$$

то соответственно пишется

$$\sum_{m,\ n=1}^{\infty} u_{mn} = +\infty, \quad \sum_{m,\ n=1}^{\infty} u_{mn} = -\infty.$$

Замечание. Содержательность определения ряда как пары последовательностей хорошо видна на примере кратных рядов. Например, если задана последовательность $\{u_{mn}\}$, то соответствующую ей последовательность «частичных сумм» можно задавать не только выше указанным способом (38.2), но и по другому. Наряду с суммами (38.2), определенными выше и называемыми прямоугольными (в них суммируются элементы u_{kl}, которым соответствуют точки $(k,\ l)$ плоскости xy, содержащиеся в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant m$, $0 \leqslant y \leqslant n$) рассматриваются треугольные суммы $T_r = \sum\limits_{k+l \leqslant r} u_{kl}$, $r = 1,\ 2,\ \ldots$, (точка $(k,\ l)$ лежит в треугольнике $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant r$), сферические $S_r = \sum\limits_{k^2+l^2 \leqslant r^2} u_{kl}$, $r = 1,\ 2,\ \ldots$, (точка $(k,\ l)$ лежит в круге $x^2 + y^2 \leqslant r^2$) и другие. Таким образом, для одной и той же последовательности $\{u_{mn}\}$ имеются разные последовательности частичных сумм, причем в случае сходимости одной из них другая не обязательно сходится. Поэтому естественно рассматривать каждую пару, состоящую из последовательности $\{u_{mn}\}$ членов ряда и каких-то его «частичных сумм», как самостоятельный ряд.

Отметим, что последовательности частичных сумм кратных рядов (например, частичных сумм T_r или S_r) в отличие от последовательностей частичных сумм однократных рядов не всегда однозначно определяют последовательность общих членов ряда.

В дальнейшем мы будем рассматривать только прямоугольные частичные суммы S_{mn}.

На кратные ряды переносится ряд свойств обычных (однократных) рядов, например:

1°. *Если ряд* $\sum\limits_{m,\ n=1}^{\infty} u_{mn}$ *сходится и* S — *его сумма, то* $\sum\limits_{m,\ n=1}^{\infty} \lambda u_{mn} = \lambda S$ *для любого числа* λ.

2°. *Если ряды* $\sum\limits_{m,\ n=1}^{\infty} u'_{mn}=S'$ *и* $\sum\limits_{m,\ n=1}^{\infty} u''_{mn}=S''$ *сходятся, то*

$$\sum_{m,\ n=1}^{\infty} (u'_{mn}+u''_{mn})=S'+S''.$$

Эти утверждения легко доказываются аналогично случаю однократных рядов (это предоставляется проделать читателю).

Докажем теперь несколько теорем о кратных рядах.

Теорема 1. *Если ряд* (38.3) *сходится, то*

$$\lim_{m,\ n\to\infty} u_{mn}=0.$$

Это сразу следует из равенства

$$u_{mn}=S_{mn}-S_{m-1\ n}-S_{m\ n-1}+S_{m-1\ n-1}$$

и условия (38.4). □

Теорема 2. *Если все члены ряда* (38.3) *неотрицательны,*

$$u_{mn}\geqslant 0,\ m,\ n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{38.6}$$

то всегда существует конечный или бесконечный предел его частичных сумм S_{mn}*, причем*

$$\lim_{m,\ n\to\infty} S_{mn}=\sup_{m,n=1,\ 2,\ \ldots} S_{mn}. \tag{38.7}$$

Доказательство. Если выполняется условие (38.6) и $m'\geqslant m$, $n'\geqslant n$, то $S_{m'n'}\geqslant S_{mn}$.

Далее, если $S=\sup\limits_{m,\ n=1,\ 2,\ \ldots} S_{mn}$ и $S'<S$, то в силу определения верхней грани существуют такие номера m_0 и n_0, что $S_{m_0n_0}>S'$.

Положим $N=\max\{m_0,\ n_0\}$, тогда при $m\geqslant N$ и $n\geqslant N$

$$S_{mn}\geqslant S_{NN}\geqslant S_{m_0n_0}>S',$$

и так как $S_{mn}\leqslant S$, то $\lim\limits_{m,\ n,\ \to\infty} S_{mn}=S$, т. е. выполняется условие (38.7). □

Следствие. *В предположениях теоремы ряд* (38.3) *сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены.*

Доказательство следствия очевидно.

Из двукратного ряда (38.3) можно формально образовать два так называемых повторных ряда. Для этого следует сначала произвести суммирование по одному индексу, зафиксировав другой, а затем произвести суммирование по оставшемуся индексу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn},\quad \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}. \tag{38.8}$$

Аналогично доказанной ранее теореме о повторных пределах (см. теорему 1 п. 19.2) доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Если сходится двойной ряд* (38.3) *и для всех* $n = 1, 2, \ldots$ *сходятся ряды* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{mn}$, *то повторный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{mn}$ *также сходится и его сумма равна сумме данного ряда* (38.3).

Определение 6. *Ряд* (38.3) *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т. е. ряд*

$$\sum_{m,\,n=1}^{\infty} |u_{mn}|. \tag{38.9}$$

Теорема 4. *Если ряд* (38.3) *абсолютно сходится, то сходится и любой ряд (однократный, двукратный или повторный), полученный перестановкой членов данного ряда (в частности сходится и сам заданный ряд). При этом сумма любого такого ряда совпадает с суммой исходного ряда* (38.3).

Доказательство. Расположим члены ряда (38.3) в бесконечную прямоугольную матрицу, поместив в m-ю ее строку члены ряда с данным фиксированным первым номером m, расположенные по возрастанию второго индекса n:

$$\begin{array}{llll}
u_{11} & u_{12} & u_{13}\ldots u_{1n}\ldots \\
u_{21} & u_{22} & u_{23}\ldots u_{2n}\ldots \\
\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\
u_{m1} & u_{m2} & u_{m3}\ldots u_{mn}\ldots \\
\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Занумеруем теперь элементы этой таблицы согласно следующей схеме:

$$\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 5 & \ldots \\
4 & 3 & 6 & \ldots \\
9 & 8 & 7 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Член ряда (38.3), получивший при такой нумерации номер k, обозначим v_k. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \tag{38.10}$$

и покажем, что он абсолютно сходится, т. е. что сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|. \tag{38.11}$$

Обозначим частичные суммы ряда (38.9) через S^*_{mn}, его сумму — через S^*, а частичные суммы ряда (38.11) — через S^*_k. Прежде всего заметим, что для любой суммы S^*_k найдутся такие номера m и n, что все члены ряда (38.11), входящие в сумму S^*_k войдут и в сумму S^*_{mn}, тогда

$$S^*_k \leqslant S^*_{mn} \leqslant S^*.$$

Отсюда и следует (см. п. 35.4) сходимость ряда (38.11).

Из абсолютной сходимости ряда (38.10) следует, что и любой другой однократный ряд, составленный из членов ряда (38.2), также сходится и его сумма равна сумме ряда (38.10) (см. п. 35.10). Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = S.$$

Покажем теперь, что любой двойной ряд

$$\sum_{m,\,n=1}^{\infty} u'_{mn}, \tag{38.12}$$

полученный некоторой перенумерацией двойными индексами членов данного ряда (38.3), абсолютно сходится и что его сумма также равна S.

Абсолютная сходимость ряда (38.12) легко следует из абсолютной сходимости ряда (38.3), т. е. из сходимости ряда (38.9), и доказывается тем же приемом, которым была доказана абсолютная сходимость ряда (38.10). Докажем теперь, что сумма ряда (38.12) равна S. Обозначим его частичные суммы через S'_{mn}, а частичные суммы ряда (38.10) через S_k. Пусть фиксировано число $\varepsilon > 0$. В силу сходимости ряда (38.11) существует такой номер k_ε, что

$$\sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{38.13}$$

тогда и подавно

$$|S - S_{k_\varepsilon}| = \left| \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} v_k \right| < \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{38.14}$$

Выберем номер N_ε так, чтобы частичная сумма $S'_{N_\varepsilon N_\varepsilon}$ ряда (38.12) содержала в качестве слагаемых все члены ряда (38.10), входящие в сумму S_{k_ε}. Пусть $m \geqslant N_\varepsilon$ и $n \geqslant N_\varepsilon$. Положим

$$S''_{mn} = S'_{mn} - S_{k_\varepsilon};$$

тогда, использовав (38.13) и (38.14), получим

$$|S - S'_{mn}| = |S - S_{k_\varepsilon}| + |S''_{mn}| < \varepsilon.$$

Итак, S является суммой любого ряда (38.12), в частности суммой самого ряда (38.3).

Покажем, наконец, что S является и суммой повторных рядов (38.8). В самом деле, при любом фиксированном n

$$\sum_{m=1}^{m_0} |u_{mn}| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |v_k| = S^*.$$

Следовательно, все ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

сходятся, и притом абсолютно.

Положим

$$u_n = \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}. \tag{38.15}$$

Зафиксируем снова произвольное число $\varepsilon > 0$. Выберем номер k_ε так, чтобы выполнялось условие (38.13), а следовательно, и условие (38.14). Далее, подобно тому, как это было сделано выше, выберем номер N_ε так, чтобы частичная сумма $S_{N_\varepsilon N_\varepsilon}$ ряда (38.3) содержала в качестве слагаемых все члены ряда (38.10), входящие в сумму S_k. Тогда при всех $m \geqslant N_\varepsilon$ и $n \geqslant N_\varepsilon$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} u_{ji} - S_{k_\varepsilon} \right| \leqslant \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получим (см. (38.15)):

$$\left| \sum_{i=1}^{n} u_i - S_{k_\varepsilon} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда в силу (38.14) следует, что при $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{n} u_i - S \right| \leqslant \left| \sum_{i=1}^{n} u_i - S_{k_\varepsilon} \right| + |S_{k_\varepsilon} - S| < \varepsilon.$$

Это и означает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S. \ \square$$

Упражнение 1. Обобщить критерий Коши сходимости однократных рядов на случай кратных рядов.

38.2. КРАТНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Определение 7. *Ряд вида*

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 1} u_{n_1, \ldots, n_k}(x), \tag{38.16}$$

где функции $u_{n_1, \ldots n_k}(x)$ *определены на некотором множестве* E, *называется* k*-кратным функциональным рядом, а суммы вида*

$$S_{m_1 \ldots m_k}(x) = \sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{m_1, \ldots, m_k} u_{n_1 \ldots n_k}(x)$$

— его частичными суммами.

Определение 8. *Ряд* (38.16) *называется сходящимся на множестве* E, *если при каждом фиксированном* $x_0 \in E$ *сходится кратный числовой ряд*

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{\infty} u_{n_1, \ldots, n_k}(x_0).$$

Если ряд (38.16) *сходится на* E, *то функция*

$$S(x) = \sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{\infty} u_{n_1 \ldots n_k}(x), \quad x \in E$$

называется его суммой.

На кратные функциональные ряды легко переносятся понятия равномерной сходимости ряда, критерий Коши для равномерной сходимости ряда, признак Вейерштрасса равномерной сходимости и т. п. Мы не будем на этом останавливаться.

Упражнение 2. Определив понятие равномерной сходимости двойного ряда, доказать, что, если ряд (38.16) сходится равномерно и если его члены являются непрерывными функциями на множестве $E \subset R^n$, то и сумма ряда (38.16) является непрерывной на множестве E функцией.

Определение 9. *Ряды вида*

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 0}^{\infty} c_{n_1 \ldots n_k} (x_1 - x_1^{(0)})^{n_1} \ldots (x_n - x_n^{(0)})^{n_k},$$

где $c_{n_1 \ldots n_k}$ *— комплексные числа, называются кратными степенными рядами.*

Хотя, как это видно из предыдущего, многие утверждения, справедливые для однократных рядов, обобщаются и на кратные ряды, последние имеют и много своих специфических особенностей, существенно отличающих их от однократных рядов.

В качестве примера приведем двойной степенной ряд с действительными коэффициентами, который, рассматриваемый в вещественной области, сходится лишь в двух точках плоскости, а именно в точках (0; 0) и (1; 1). Таким образом, аналога теоремы Абеля для степенных рядов (см. п. 37.1), во всяком случае в прямом смысле, для двойных рядов нет. Этот пример показывает опасность использования аналогий, не подкрепленных математическими доказательствами.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{m,\, n=0}^{\infty} c_{mn} x^m y^n, \tag{38.17}$$

где, $c_{00}=0$, $c_{0n}=c_{n0}=n!$, $n=1, 2, \ldots$; $c_{1m}=c_{m1}=-m!$, $m=1, 2, \ldots$; $c_{mn}=0$, $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$.

Его частичные суммы имеют вид

$$S_{mn}(x, y)=(1-y)\sum_{k=1}^{m} k! x^k + y + (1-x)\sum_{l=2}^{n} l! y^l. \tag{38.18}$$

Очевидно, что $S_{mn}(0, 0)=0$ и $S_{mn}(1, 1)=1$, m, $n=1, 2, \ldots$, и потому ряд (38.17) сходится в точках (0, 0) и (1, 1).

Заметим теперь, что радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$$

равен нулю (см. пример 1 в п. 37.1), при этом его частичные суммы

$$S_n(z)=\sum_{k=1}^{n} k!\, z^k, \quad n=1, 2, \ldots,$$

при вещественных $z>0$, очевидно, стремятся к $+\infty$.

Покажем, что при $z<0$ его четные частичные суммы $S_{2n}(z)$ также стремятся к $+\infty$. Действительно, объединив при $z<0$ попарно соседние члены, получим:

$$S_{2n}(z)=\sum_{k=1}^{n} (2k-1)!\, |z|^{2k-1}(2k|z|-1).$$

Далее заметим, что при любом фиксированном $z \neq 0$ для номеров $k > \frac{1}{|z|}$ выполняется неравенство

$$(2k-1)!\, |z|^{2k-1}(2k|z|-1) > (2k-1)!\, |z|^{2k-1}$$

и что при $z \neq 0$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)!\, z^{2k-1}$$

расходится (это, например, легко доказывается тем же способом, каким доказывалась при $z \neq 0$, расходимсть ряда в примере 1 п. 37.1) и, следовательно, при $z > 0$ его сумма равна $+\infty$, поэтому и

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}(z) = +\infty,\quad z \neq 0.$$

Из сказанного и из равенства (38.18) следует, что, если $(x, y) \neq (0, 0)$ или $(x, y) \neq (1, 1)$, то, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, всегда можно подобрать такие номера m и n, что

$$|S_{mn}(x, y)| > \varepsilon.$$

А это и означает, что ряд (38.17) для указанных (x, y) расходится.

Упражнения. 3. Число S назовем суммой ряда $\sum\limits_{m, n=1}^{\infty} u_{m,n}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех номеров m и n, удовлетворяющих условию $m+n > N$, выполняется неравенство $|S_{mn} - S| < \varepsilon$. Выяснить, эквивалентно или нет это определение определению 5 п. 38.1.

4. Число S назовем суммой ряда $\sum\limits_{m, n=1}^{\infty} u_{mn}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное множество $\mathfrak{N}_\varepsilon = \{(m, n)\}$ пар индексов m, n членов данного ряда, что, каково бы ни было другое конечное множество $\mathfrak{N}$ пар индексов членов этого ряда, содержащее множество $\mathfrak{N}_\varepsilon : \mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}_\varepsilon$, выполняется неравенство

$$\left|\sum_{(m, n)\in\mathfrak{N}} u_{mn} - S\right| < \varepsilon.$$

Выяснить эквивалентно или нет это определение определению 5 п. 38.1 и определению, сформулированному в предыдущем упражнении.