

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Предисловие | 3 |
| Глава первая | |
| Дифференциальное исчисление функций одной переменной | |
| § 1. Множества и функции. Логические символы | 5 |
| 1.1. Множества. Операции над множествами | 5 |
| 1.2.* Функции | 8 |
| 1.3.* Конечные множества и натуральные числа. Последовательности | 11 |
| 1.4. Логические символы | 13 |
| § 2. Действительные числа. Числовые множества | 15 |
| 2.1. Свойства действительных чисел | 15 |
| 2.2.* Свойства сложения и умножения | 20 |
| 2.3.* Свойства упорядоченности | 27 |
| 2.4.* Свойство непрерывности действительных чисел | 30 |
| 2.5. Расширенная числовая прямая | 33 |
| 2.6. Промежутки действительных чисел. Окрестности | 33 |
| 2.7. Ограниченные и неограниченные множества | 35 |
| 2.8. Верхняя и нижняя грани числовых множеств | 37 |
| 2.9. Свойства Архимеда | 43 |
| 2.10. Принцип вложенных отрезков | 44 |
| § 3. Предел последовательности | 48 |
| 3.1. Определение предела последовательности | 48 |
| 3.2. Бесконечные пределы | 53 |
| 3.3. Простейшие свойства предела последовательности | 55 |
| 3.4. Ограниченность сходящихся последовательностей | 59 |
| 3.5. Монотонные последовательности | 60 |
| 3.6. Теорема Больцано—Вейерштрасса | 63 |
| 3.7. Критерий Коши сходимости последовательности | 65 |
| 3.8. Бесконечно малые последовательности | 67 |
| 3.9. Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями над последовательностями | 69 |
| 3.10. Изображение действительных чисел бесконечными десятичными дробями | 76 |
| 3.11.* Счетность рациональных чисел. Несчетность действительных чисел | 82 |
| 3.12* Верхний и нижний пределы последовательностей | 86 |
| § 4. Функции и их пределы | 89 |
| 4.1. Действительные функции | 89 |
| 4.2. Способы задания функций | 91 |
| 4.3. Элементарные функции и их классификация | 95 |
| 4.4. Первое определение предела функции | 96 |
| 4.5. Второе определение предела функции | 101 |

| | | |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.6. | Обобщение понятия предела функции | 104 |
| 4.7. | Свойства пределов функций | 106 |
| 4.8.* | Замена переменной при вычислении пределов | 108 |
| 4.9. | Бесконечно малые и бесконечно большие функции | 110 |
| 4.10. | Пределы монотонных функций | 111 |
| 4.11. | Критерий Коши существования предела функции | 113 |
| § 5. | Непрерывность функции в точке | 115 |
| 5.1. | Точки непрерывности и точки разрыва функций | 115 |
| 5.2. | Свойства функций непрерывных в точке | 119 |
| § 6. | Свойства непрерывных функций | 121 |
| 6.1. | Ограниченность непрерывных функций. Достижение экстремальных значений | 121 |
| 6.2. | Промежуточные значения непрерывных функций | 123 |
| 6.3. | Обратные функции | 125 |
| § 7. | Непрерывность элементарных функций | 131 |
| 7.1. | Многочлены и дробно-рациональные функции | 131 |
| 7.2. | Показательная, логарифмическая и степенная функции | 132 |
| 7.3. | Тригонометрические и обратные тригонометрические функции | 139 |
| § 8. | Сравнение функций. Вычисление пределов | 140 |
| 8.1. | Некоторые замечательные пределы | 140 |
| 8.2. | Сравнение функций | 144 |
| 8.3. | Эквивалентные функции | 151 |
| 8.4. | Метод выделения главной части функции и его применение к вычислению пределов | 153 |
| § 9. | Производная и дифференциал | 157 |
| 9.1. | Определение производной | 157 |
| 9.2. | Дифференциал функции | 159 |
| 9.3. | Геометрический смысл производной и дифференциала | 163 |
| 9.4. | Физический смысл производной и дифференциала | 167 |
| 9.5. | Правила вычисления производных, связанные с арифметическими действиями над функциями | 170 |
| 9.6. | Производная обратной функции | 173 |
| 9.7. | Производная и дифференциал сложной функции | 175 |
| 9.8. | Гиперболические функции и их производные | 182 |
| § 10. | Производные и дифференциалы высших порядков | 184 |
| 10.1. | Производные высших порядков | 184 |
| 10.2. | Высшие производные суммы и произведения функций | 186 |
| 10.3. | Производные высших порядков от сложных функций, от обратных функций и от функций, заданных параметрически | 188 |
| 10.4. | Дифференциалы высших порядков | 190 |
| § 11. | Теоремы о среднем для дифференцируемых функций | 192 |
| 11.1. | Теорема Ферма | 192 |
| 11.2. | Теоремы Роля, Лагранжа и Коши о средних значениях | 194 |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 12. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталья | 201 |
| 12.1. Неопределенности вида $0/0$ | 201 |
| 12.2. Неопределенности вида ∞/∞ | 204 |
| § 13. Формула Тейлора | 210 |
| 13.1. Вывод формулы Тейлора | 210 |
| 13.2. Многочлен Тейлора как многочлен наилучшего приближения функции в окрестности данной точки | 213 |
| 13.3. Примеры разложения по формуле Тейлора | 216 |
| 13.4. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора (метод выделения главной части) | 218 |
| § 14. Исследование поведения функций | 221 |
| 14.1. Признак монотонности функции | 221 |
| 14.2. Отыскание наибольших и наименьших значений функций | 222 |
| 14.3. Выпуклость и точки перегиба | 230 |
| 14.4. Асимптоты | 236 |
| 14.5. Построение графиков функций | 239 |
| § 15. Вектор-функция | 248 |
| 15.1. Понятие предела и непрерывности для вектор-функции | 248 |
| 15.2. Производная и дифференциал вектор-функции | 251 |
| § 16. Длина дуги кривой | 255 |
| 16.1. Понятие кривой | 255 |
| 16.2* Параметрически заданные кривые | 258 |
| 16.3. Ориентация кривой. Дуга кривой. Сумма кривых. Неявное задание кривых | 262 |
| 16.4. Касательная к кривой. Геометрический смысл производной вектор-функции | 264 |
| 16.5. Длина дуги кривой | 267 |
| 16.6. Плоские кривые | 273 |
| 16.7. Физический смысл производной вектор-функции | 274 |
| § 17. Кривизна кривой | 275 |
| 17.1. Две леммы. Радиальная и трансверсальная составляющие скорости | 275 |
| 17.2. Определение кривизны кривой и ее вычисление | 278 |
| 17.3. Главная нормаль. Соприкасающаяся плоскость | 281 |
| 17.4. Центр кривизны и эволюта кривой | 283 |
| 17.5. Формулы для кривизны и эволюты плоской кривой | 283 |

Глава вторая

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

| | |
|-------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 18. Множества на плоскости и в пространстве | 288 |
| 18.1. Окрестности точек. Пределы последовательностей точек | 288 |
| 18.2. Различные типы множеств | 299 |
| 18.3. Компакты | 309 |
| 18.4. Многомерные векторные пространства | 315 |
| § 19. Предел и непрерывность функций многих переменных | 320 |
| 19.1. Функции многих переменных | 320 |
| 19.2. Предел функции | 322 |
| 19.3. Непрерывность функций | 327 |
| 19.4. Непрерывность композиции непрерывных функций | 330 |
| 19.5. Теоремы о функциях, непрерывных на множествах | 332 |
| 19.6. Равномерная непрерывность функций. Модуль непрерывности | 334 |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 20. Частные производные. Дифференцируемость функций многих переменных | 341 |
| 20.1. Частные производные и частные дифференциалы | 341 |
| 20.2. Дифференцируемость функций в точке | 344 |
| 20.3. Дифференцирование сложной функции | 351 |
| 20.4. Инвариантность формы первого дифференциала относительно выбора переменных. Правила вычисления дифференциалов | 354 |
| 20.5. Гесметрический смысл частных производных и полного дифференциала | 360 |
| 20.6. Градиент функции | 362 |
| 20.7. Производная по направлению | 363 |
| 20.8. Пример исследования функций двух переменных | 367 |
| § 21. Частные производные и дифференциалы высших порядков | 369 |
| 21.1. Частные производные высших порядков | 369 |
| 21.2. Дифференциалы высших порядков | 373 |

Глава третья

Интегральное исчисление функций одной переменной

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 22. Определение и свойства неопределенного интеграла | 378 |
| 22.1. Первообразная и неопределенный интеграл | 378 |
| 22.2. Табличные интегралы | 382 |
| 22.3. Интегрирование подстановкой (замена переменной) | 384 |
| 22.4. Интегрирование по частям | 387 |
| § 23. Некоторые сведения о комплексных числах и многочленах | 389 |
| 23.1. Комплексные числа | 389 |
| 23.2*. Формальная теория комплексных чисел | 395 |
| 23.3. Некоторые понятия анализа в области комплексных чисел | 396 |
| 23.4. Разложение многочленов на множители | 399 |
| 23.5*. Наибольший общий делитель многочленов | 402 |
| 23.6. Разложение правильных рациональных дробей на элементарные | 406 |
| § 24. Интегрирование рациональных дробей | 412 |
| 24.1. Интегрирование элементарных рациональных дробей | 412 |
| 24.2. Общий случай | 414 |
| 24.3*. Метод Остроградского | 416 |
| § 25. Интегрирование некоторых иррациональностей | 421 |
| 25.1. Предварительные замечания | 421 |
| 25.2. Интегралы вида $\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_s} \right] dx$ | 422 |
| 25.3. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$. Подстановки Эйлера | 424 |
| 25.4. Интегралы от дифференциального бинома | 426 |
| 25.5. Интегралы вида $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ | 429 |
| § 26. Интегрирование некоторых трансцендентных функций | 431 |
| 26.1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ | 431 |

| | | |
|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 26.2. | Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$ | 433 |
| 26.3. | Интегралы вида $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$ | 434 |
| 26.4. | Интегралы от трансцендентных функций, вычисляющиеся с помощью интегрирования по частям | 434 |
| 26.5. | Интегралы вида $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx$ | 436 |
| 26.6. | Замечания об интегралах, не выражающихся через элементарные функции | 436 |
| § 27. | Определенный интеграл | 438 |
| 27.1. | Определение интеграла по Риману | 438 |
| 27.2. | Ограниченность интегрируемой функции | 442 |
| 27.3. | Верхние и нижние суммы Дарбу. Верхний и нижний интегралы Дарбу | 443 |
| 27.4. | Необходимые и достаточные условия интегрируемости | 446 |
| 27.5. | Интегрируемость непрерывных и монотонных функций | 448 |
| § 28. | Свойства интегрируемых функций | 450 |
| 28.1. | Свойства определенного интеграла | 450 |
| 28.2. | Первая теорема о среднем значении для определенного интеграла | 459 |
| 28.3. | Интегрируемость кусочно-непрерывных функций | 463 |
| 28.4*. | Интегральные неравенства Гёльдера ^{*)} и Минковского ^{**)} | 465 |
| § 29. | Определенный интеграл с переменным верхним пределом | 467 |
| 29.1. | Непрерывность интеграла по верхнему пределу | 467 |
| 29.2. | Дифференцируемость интеграла по верхнему пределу. Существование первообразной у непрерывной функции | 468 |
| 29.3. | Формула Ньютона — Лейбница | 471 |
| § 30. | Формулы замены переменной в интеграле и интегрирования по частям | 474 |
| 30.1. | Замена переменной | 474 |
| 30.2. | Интегрирование по частям | 476 |
| 30.3*. | Вторая теорема о среднем значении для определенного интеграла | 479 |
| 30.4. | Интегралы от вектор-функций | 481 |
| § 31. | Мера плоских открытых множеств | 483 |
| 31.1. | Определение меры (площади) открытых множеств | 483 |
| 31.2. | Свойства меры открытых множеств | 486 |
| § 32. | Некоторые геометрические и физические приложения определенного интеграла | 491 |
| 32.1. | Вычисление площадей | 491 |
| 32.2. | Объем тел вращения | 497 |
| 32.3. | Вычисление длины кривой | 499 |
| 32.4. | Площадь поверхности вращения | 504 |
| 32.5. | Работа силы | 507 |
| 32.6. | Вычисление статических моментов и центра тяжести кривой | 508 |
| § 33. | Несобственные интегралы | 511 |
| 33.1. | Определение несобственных интегралов | 511 |
| 33.2. | Формулы интегрального исчисления для несобственных интегралов | 517 |

| | | |
|--------|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 33.3. | Несобственные интегралы от неотрицательных функций . . . | 522 |
| 33.4. | Критерий Коши сходимости несобственных интегралов . . . | 529 |
| 33.5. | Абсолютно сходящиеся интегралы | 530 |
| 33.6. | Исследование сходимости интегралов | 534 |
| § 34*. | Асимптотическое поведение интегралов с переменными пределами интегрирования | 539 |

Глава четвертая

Ряды

| | | |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 35. | Числовые ряды | 545 |
| 35.1. | Определение ряда и его сходимостъ | 545 |
| 35.2. | Свойства сходящихся рядов | 548 |
| 35.3. | Критерий Коши сходимости ряда | 550 |
| 35.4. | Ряды с неотрицательными членами | 553 |
| 35.5. | Признак сравнения для рядов с неотрицательными членами. Метод выделения главной части члена ряда | 555 |
| 35.6. | Признаки Даламбера и Коши для рядов с неотрицательными членами | 558 |
| 35.7. | Интегральный признак сходимости рядов с неотрицательными членами | 561 |
| 35.8*. | Неравенства Гельдера и Минковского для конечных и бесконечных сумм | 565 |
| 35.9. | Знакопеременные ряды | 567 |
| 35.10. | Абсолютно сходящиеся ряды. Применение абсолютно сходящихся рядов к исследованию сходимости произвольных рядов | 569 |
| 35.11. | Признаки Даламбера и Коши для произвольных числовых рядов | 577 |
| 35.12. | Сходящиеся ряды, не сходящиеся абсолютно. Теорема Римана | 578 |
| 35.13. | Преобразование Абеля. Признаки сходимости рядов Дирихле и Абеля | 582 |
| 35.14*. | Асимптотическое поведение остатков сходящихся рядов и роста частичных сумм некоторых расходящихся рядов | 586 |
| 35.15. | О суммируемости рядов методом средних арифметических | 589 |
| § 36. | Функциональные последовательности и ряды | 591 |
| 36.1. | Сходимость функциональных последовательностей и рядов | 591 |
| 36.2. | Равномерная сходимость функциональных последовательностей | 595 |
| 36.3. | Равномерно сходящиеся функциональные ряды | 602 |
| 36.4. | Свойства равномерно сходящихся рядов и последовательностей | 612 |
| § 37. | Степенные ряды | 621 |
| 37.1. | Радиус сходимости и круг сходимости степенного ряда | 621 |
| 37.2*. | Формула Коши — Адамара для радиуса сходимости степенного ряда | 628 |
| 37.3. | Аналитические функции | 630 |
| 37.4. | Действительные аналитические функции | 632 |
| 37.5. | Разложение функций в степенные ряды. Различные способы записи остаточного числа формулы Тейлора | 636 |
| 37.6. | Разложение элементарных функций в ряд Тейлора | 641 |
| 37.7. | Разложение в степенные ряды и суммирование их методом почленного дифференцирования и интегрирования | 648 |

| | | |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------|-----|
| 37.8. | Формула Стирлинга | 651 |
| 37.9* | Формула и ряд Тейлора для многомерных вектор-функций | 653 |
| 37.10* | Асимптотические степенные ряды | 655 |
| 37.11* | Свойства асимптотических степенных рядов | 661 |
| § 38* | Кратные ряды | 665 |
| 38.1. | Кратные числовые ряды | 665 |
| 38.2. | Кратные функциональные ряды | 672 |
| Именной указатель | | 675 |
| Предметный указатель | | 676 |