ГЛАВА ПЯТАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ (продолжение)

§ 39. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА И РЯД ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

39.1 ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Если функция многих переменных имеет достаточное число непрерывных производных в окрестности некоторой точки, то эту функцию в указанной окрестности можно (подобно тому как это было сделано для функций одного переменного) представить в виде суммы некоторого многочлена и остатка, который «мал» в определенном смысле.

Теорема 1. *Пусть функция $z=f(x, y)$ определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до порядка m включительно ($m \geqslant 1$) в δ-окрестности точки (x_0, y_0). Тогда для всех Δx и Δy, удовлетворяющих условию $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}<\delta$, существует такое $\theta=\theta(\Delta x, \Delta y)$, $0<\theta<1$, что справедлива формула*

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y+\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right]+$$
$$+\frac{1}{3!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{3\}} f(x_0, y_0)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(m-1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{m-1\}} f(x_0, y_0)+r_{m-1}(\Delta x, \Delta y),$$

или, короче

$$\Delta z=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}} f(x_0, y_0)+r_{m-1}(\Delta x, \Delta y), \qquad (39.1)$$

где

$$r_{m-1}(\Delta x, \Delta y)=\frac{1}{m!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{m\}} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y). \qquad (39.2)$$

Формула (39.1) называется *формулой Тейлора* (порядка $m-1$) для функции f, функция $r_{m-1}(\Delta x, \Delta y)$ — *ее остаточным членом*, а его запись в виде (39.2) — остаточным членом формулы Тейлора в *форме Лагранжа*.

При $m=1$ в (39.1) требует разъяснения смысл первого члена правой части, поскольку в этом случае верхний индекс суммирования равен нулю. В этом случае, по определению, полагается, что этот член равен нулю, т. е. что формула (39.1) имеет вид

$$\Delta z = r_0(\Delta x, \ \Delta y).$$

В дальнейшем всегда, когда встретится выражение, записанное с помощью символа $\sum$, у которого значение верхнего индекса суммирования меньше значения нижнего индекса будем также считать, что это выражение равно нулю.

Доказательство. Пусть Δx и Δy зафиксированы так, что $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$, тогда все точки вида $(x_0 + t\,\Delta x, \ y_0 + t\,\Delta y)$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, лежат на отрезке, соединяющем точки $(x_0, \ y_0)$ и $(x_0 + \Delta x, \ y_0 + \Delta y)$, и поэтому все они принадлежат δ-окрестности точки $(x_0, \ y_0)$. Вследствие этого имеет смысл композиция функций

$$z = f(x, \ y)$$

и

$$x = x_0 + t\,\Delta x, \quad y = y_0 + t\,\Delta y, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

т. е. сложная функция

$$F(t) = f(x_0 + t\,\Delta x, \ y_0 + t\,\Delta y), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{39.3}$$

Очевидно, что

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, \ y_0 + \Delta y) - f(x_0, \ y_0) = F(1) - F(0). \tag{39.4}$$

Поскольку функция f имеет в δ-окрестности точки $(x_0, \ y_0)$ m непрерывных частных производных, то, согласно теореме о производных сложной функции (см. п. 20.3), функция F также имеет на отрезке $[0, \ 1]$ m непрерывных производных и поэтому для нее справедлива формула Тейлора порядка $m-1$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$F(t) - F(0) = F'(0)\,t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}t^{m-1} + \frac{F^{(m)}(\theta t)}{m!}t^m,$$
$$0 < \theta < 1, \tag{39.5}$$

и в рассматриваемой окрестности точки $(x_0, \ y_0)$ функцию (39.3) можно m раз продифференцировать по правилу дифференцирования сложной функции (см. замечание 2 в п. 20.4), причем значения получающихся смешанных частных производных не зависят от порядка дифференцирования (см. п. 21.1).

Выразив производные $F^{(k)}(t)$ через производные функции $f(x, \ y)$ и положив в формуле (39.5) $t=1$ (см. (39.4)), получим требуемую формулу Тейлора для функции $f(x, \ y)$. Действительно, из (39.3) следует, что

$$F'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=$$
$$=\frac{\partial f(x_0+t\,\Delta x,\ y_0+t\,\Delta y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0+t\,\Delta x,\ y_0+t\,\Delta y)}{\partial y}\Delta y.$$

Отсюда для $F''(t)$, опустив для краткости обозначения аргументов, получим

$$F''(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2.$$

Вообще по индукции легко установить, что

$$F^{(k)}(t)=\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}}f(x_0+t\,\Delta x,\ y_0+t\,\Delta x),$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ m. \qquad (39.6)$$

Положив в формулах (39.6) $t=0$ при $k=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$, будем иметь:

$$F'(0)=\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}\Delta y;$$
$$F''(0)=\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y+\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2,$$

и вообще

$$F^{(k)}(0)=\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}}f(x_0,\ y_0),\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1. \qquad (39.7)$$

При $k=m$, заменив t на θt,

$$F^{(m)}(\theta t)=\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{m\}}f(x_0+\theta t\,\Delta x,\ y_0+\theta t\,\Delta y). \qquad (39.8)$$

Подставим теперь (39.7) и (39.8) в (39.5) и положим $t=1$; тогда в силу соотношения (39.4)

$$\Delta z=F(1)-F(0)=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{F^{(k)}(0)}{k!}+\frac{F^{(m)}(\theta)}{m!}=$$
$$=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}}f(x_0,\ y_0)+$$
$$+\frac{1}{m!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{m\}}f(x_0+\theta\,\Delta x,\ y_0+\theta\,\Delta y),\quad 0<\theta<1. \ \square$$

Следствие. *В предположениях теоремы* 1 *справедлива формула*

$$\Delta z=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}}f(x_0,\ y_0)+r_m(\Delta x,\ \Delta y), \qquad (39.9)$$

причем остаточный член $r_m(\Delta x, \Delta y)$ может быть записан в каждом из следующих видов:

$$r_m(\Delta x, \Delta y) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y)\, \Delta x^k \Delta y^{m-k}, \tag{39.10}$$

где

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m, \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

или

$$r_m(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\, \rho^m, \tag{39.11}$$

где $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$, *т. е.*

$$r_m(\Delta x, \Delta y) = o(\rho^m). \tag{39.12}$$

Представление остаточного члена формулы Тейлора в форме (39.12) называется его записью в *форме Пеано.*

Доказательство. Положим

$$\varepsilon_k'(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial^m f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} - \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^k \partial y^{m-k}}. \tag{39.13}$$

В силу непрерывности всех частных производных порядка m

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_k'(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Преобразуем остаток $r_{m-1}(\Delta x, \Delta y)$ (см. (39.2)), использовав выражение (39.13), следующим образом:

$$r_{m-1}(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \Delta x^k \Delta y^{m-k} =$$

$$= \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \Delta x^k \Delta y^{m-k} +$$

$$+ \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} C_m^k \varepsilon_k'(\Delta x, \Delta y)\, \Delta x^k \Delta y^{m-k} =$$

$$= \frac{1}{m!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(m)} f(x_0, y_0) + \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y)\, \Delta x^k \Delta y^{m-k}, \tag{39.14}$$

где $\varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) = \frac{C_m^k}{m!} \varepsilon_k'(\Delta x, \Delta y)$, и потому

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) = 0. \tag{39.15}$$

Подставляя (39.14) в (39.1), получим формулу Тейлора (39.9) с остаточным членом в виде (39.10).

Покажем, что остаточный член (39.10) можно записать в виде (39.11). Для этого положим

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y)\left(\frac{\Delta x}{\rho}\right)^k \left(\frac{\Delta y}{\rho}\right)^{m-k}. \tag{39.16}$$

Тогда

$$r_m(\Delta x, \Delta y) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x^k\,\Delta y^{m-k} =$$

$$= \rho^m \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y)\left(\frac{\Delta x}{\rho}\right)^k \left(\frac{\Delta y}{\rho}\right)^{m-k} = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\,\rho^m,$$

и так как $\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| \leqslant 1$ и $\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right| \leqslant 1$, то из (39.15) следует, что

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0. \ \Box$$

Используя понятие дифференциалов высших порядков, формуле Тейлора можно придать более компактную форму, внешне идентичную формуле Тейлора для функций одного переменного, записанной также с помощью дифференциалов. В самом деле, так как (см. п. 21.2)

$$d^k f(x, y) = \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(k)} f(x, y), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

то, полагая для краткости $M_0 = (x_0, y_0)$ и $M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, формулу (39.9) можно записать в виде

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(M_0) + r_m(M). \tag{39.17}$$

Эта форма записи формулы Тейлора наиболее проста и потому удобна для запоминания.

Сделаем несколько замечаний к доказательствам теоремы 1 и ее следствия. Прежде всего в условиях этой теоремы было потребовано, чтобы функция f имела непрерывные производные до порядка m включительно в некоторой δ-окрестности точки (x_0, y_0). Можно было бы потребовать непрерывность в указанной окрестности только производных порядка m, поскольку из их непрерывности вытекает и непрерывность в этой окрестности всех младших производных данной функции, т. е. производных порядков $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1$ (см. п. 20.2).

Подчеркнем, что непрерывность частных производных в δ-окрестности точки (x_0, y_0) была использована, во-первых, для того чтобы встречающиеся частные производные не зависели от порядка дифференцирования (это было использовано как при доказательстве формулы Тейлора (39.1), так и в самой форме записи этой формулы), и, во-вторых, для того, чтобы функцию (39.3) можно было m раз дифференцировать по правилу дифференцирования сложной функции. Обратим внимание на то, что при $m=1$ смешанные производные отсутствуют; для возможности же один раз дифференцировать функцию (39.3) по правилу сложной функции, а следовательно, и для справедливости теоремы 1 достаточно более слабого предположения о рассматриваемой функции f. Именно, вместо предположения о непрерывной дифференцируемости в вышеуказанной δ-окрестности точки (x_0, y_0) функции f достаточно ее дифференцируемости в этой окрестности (см. определения 2 и 4 в п. 20.2).

Непрерывность частных производных порядка m (в точке (x_0, y_0)) использована также при доказательстве следствия теоремы 1: она нужна для того, чтобы функции $\varepsilon_k' (\Delta x, \Delta y)$, определенные формулами (39.13), стремились к нулю при $\rho \to 0$.

Подчеркнем еще, что при сделанных предположениях в формуле (39.9) доказано, что $r_m (\Delta x, \Delta y) = o(\rho^m)$ при $\rho \to 0$ не в смысле предела по любому фиксированному направлению, как может показаться на первый взгляд из приведенного доказательства, а в более сильном смысле — в смысле предела в точке (x_0, y_0) (почему?).

Формулу (39.1) можно несколько обобщить, если не стремиться к тому, чтобы она была справедливой для всех точек $(x_0+\Delta x_0, y_0+\Delta y)$ δ-окрестности точки (x_0, y_0), а рассматривать эту формулу лишь при фиксированных Δx и Δy. Именно, если функция f определена и имеет непрерывные частные производные порядка m на открытом множестве, содержащем отрезок с концами (x_0, y_0) и $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$, то формула (39.1) также остается справедливой вместе с ее доказательством. Из этого следует, что если функция f определена в выпуклой области G (см. п. 18.2) и имеет в G непрерывные частные производные порядка m, то для любых двух точек $(x_0, y_0) \in G$ и $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in G$ справедлива формула Тейлора (39.1).

Упражнение 1. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными до порядка m включительно в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Доказать, что ее *многочлен Тейлора* порядка m, т. е. многочлен

$$P(x, y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(x_0, y_0)$$

является многочленом наилучшего приближения функции $f(x, y)$ «в бесконечно малой окрестности точки (x_0, y_0)». Это означает следующее: каков бы ни был многочлен $Q(x, y)$, степени не большей m (т. е. в каждом его члене сумма показателей степеней у переменных x и y должна не превышать числа m) такой, что

$$f(x, y) = Q(x, y) + o(\rho^n), \quad n \geqslant m, \quad \text{при } \rho \to 0,$$

где

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

он совпадает с указанным многочленом Тейлора $P(x, y)$ функции $f(x, y)$.

Все сказанное переносится и на случай функций любого числа переменных.

Теорема 1'. *Если функция n переменных $y=f(x_1, \ldots, x_n)$ определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до порядка m, $m \geqslant 1$, включительно в некоторой δ-окрестности точки $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, то справедлива формула*

$$\Delta y=f(x_1^{(0)}+\Delta x_1, \ldots, x_n^{(0)}+\Delta x_n)-f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})=$$
$$=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{k\}} f(x^0)+r_{m-1}(\Delta x), \qquad (39.18)$$

где

$$r_{m-1}(\Delta x)=$$
$$=\frac{1}{m!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{m\}} f(x_1^{(0)}+\theta\,\Delta x_1, \ldots, x_n^{(0)}+\theta\,\Delta x_n),$$
$$0<\theta<1, \quad \Delta x=(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n), \qquad (39.19)$$

а также формула

$$\Delta y=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{k\}} f(x^{(0)})+r_m(\Delta x), \qquad (39.20)$$

где $r_m(\Delta x)$ можно записать в каждом из следующих видов: либо

$$r_m(\Delta x)=\sum_{m_1+\ldots+m_n=m}\varepsilon_{m_1\ldots m_n}(\Delta x)\,\Delta x_1^{m_1}\ldots\Delta x_n^{m_n}, \qquad (39.21)$$

где $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_{m_1, \ldots, m_n}(\Delta x)=0$, $\rho=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}$, *либо*

$$r_m(\Delta x)=\varepsilon(\Delta x)\,\rho^m, \quad \lim_{\rho\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0, \qquad (39.22)$$

т. е.

$$r_m(\Delta x)=o(\rho^m), \quad \rho\to 0.$$

Наконец, через дифференциалы формулу (39.20) *можно записать в виде*

$$\Delta y=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\,d^k f(x^{(0)})+r_m(\Delta x). \qquad (39.23)$$

Раскроем теперь скобки в формулах (39.18) и (39.19), воспользовавшись алгебраической формулой

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^k = \sum_{k_1+\ldots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_n!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n}.$$

Для того чтобы короче записать результат, введем новые обозначения. Положим $k=(k_1, \ldots, k_n)$, $|k|=k_1+\ldots+k_n$, $k!=k_1!\ldots k_n!$,

$$f^{(k)} = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \quad (x-x^{(0)})^k = (x_1-x_1^{(0)})^{k_1} \ldots (x_n-x_n^{(0)})^{k_n};$$

$k=(k_1, \ldots, k_n)$ — называется *мультииндексом*.

В этих обозначениях формула Тейлора (39.18) с остаточным членом в виде (39.19) перепишется в виде

$$f(x) = \sum_{|k|<m} \frac{f^{(k)}(x^{(0)})}{k!}(x-x^{(0)})^k + \sum_{|k|=m} \frac{f^{(k)}(x^{(0)}+\theta(x-x^{(0)}))}{k!}(x-x^{(0)})^k.$$

Здесь как всегда, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ и

$$x^{(0)}+\theta(x-x^{(0)}) = (x_1^{(0)}+\theta(x_1-x_1^{(0)}), \ldots, x_n^{(0)}+\theta(x_n-x_n^{(0)})).$$

В этом виде формула Тейлора для функций любого числа переменных выглядит так же, как и для функций одной переменной.

Иногда, особенно в случае функций многих переменных, для производных употребляется обозначение

$$D^k \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}},$$

где $k=(k_1, \ldots, k_n)$ — мультииндекс. Если пользоваться этой символикой, то формула Тейлора примет вид

$$f(x) = \sum_{|k|<m} \frac{1}{k!} D^k f(x^{(0)})(x-x^{(0)})^k + \\ + \sum_{|k|=m} \frac{1}{k!} D^k f(x^{(0)}+\theta(x-x^{(0)}))(x-x^{(0)})^k, \qquad 0<\theta<1.$$

39.2. ФОРМУЛА КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Частный случай формулы Тейлора (39.18), в котором $m=1$, обычно называется формулой конечных приращений Лагранжа для функций многих переменных. В силу сделанных в предыдущем пункте замечаний к теореме 1 о предположениях, при которых справедливы формулы (39.1) и (39.18), из теоремы 1′ получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в каждой точке некоторой выпуклой области $G \subset R^n$, то для каждой пары точек $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(x_1+\Delta x_1, \ldots; x_n+\Delta x_n)$ из G существует такое θ, $0<\theta<1$, что*

$$f(x_1+\Delta x_1, \ldots, x_n+\Delta x_n)-f(x_1, \ldots, x_n)= \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1+\theta\,\Delta x_1, \ldots, x_n+\theta\,\Delta x_n)}{\partial x_i}\Delta x_i,$$

или, короче,

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x+\theta\,\Delta x)}{\partial x_i}\Delta x_i, \tag{39.24}$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $x+\Delta x=(x_1, +\Delta x_1, \ldots, x_n+\Delta x_n)$ *и*

$$x+\theta\,\Delta x=(x_1+\theta\,\Delta x_1, \ldots, x_n+\theta\,\Delta x_n).$$

Формула (39.24), как указывалось, и называется *формулой конечных приращений Лагранжа.*

Эта формула, так же как и вообще формула Тейлора, находит многочисленные и разнообразные применения в различных вопросах математического анализа.

Обратим внимание на то, что теорема 2 не является частным случаем теоремы 1, поскольку в ней требуется не непрерывная дифференцируемость рассматриваемой функции в каждой точке множества G, а лишь ее дифференцируемость. Однако доказательство теоремы 2 фактически содержится в доказательстве теоремы 1. Действительно, как это отмечалось в замечаниях к доказательству теоремы 1 и ее следствию (см. п. 39.1), при $m=1$ приведенное выше доказательство теоремы 1 сохраняет силу и при предположениях теоремы 2, т. е. при предположении лишь дифференцируемости (а не непрерывной дифференцируемости) функции f.

В качестве примера применения формулы (39.24) докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Если функция дифференцируема в каждой точке выпуклой области G и имеет в G ограниченные частные производные, то она равномерно непрерывна в этой области.*

Доказательство. Если

$$\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right| \leqslant c, \qquad i=1, 2, \ldots, n, \quad x \in G$$

(c — постоянная), то для любых двух точек $x'=(x'_1, \ldots, x'_n)$ и $x''= = (x''_1, \ldots, x''_n)$ из (39.24) следует, что

$$|f(x'')-f(x')| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(\xi)}{\partial x_i}\right| |x''_i-x'_i| \leqslant cn\rho(x', x'')$$

(здесь ξ — некоторая точка отрезка с концами в точках x' и x''). Поэтому, если задано $\varepsilon > 0$, достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{cn}$, чтобы для любых точек $x' \in G$ и $x'' \in G$ таких, что $\rho(x', x'') < \delta$, выполнялось неравенство

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon, \tag{39.25}$$

а это и означает равномерную непрерывность функции f в области G.

39.3. ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОЦЕНКЕ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА ВО ВСЕЙ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ

Остаточный член в формуле Тейлора, очевидно, зависит не только от приращений аргументов, но и от самой точки, в окрестности которой рассматривается разложение функции и которую мы в п. 39.1 считали фиксированной. Теперь нас будут интересовать поведение и оценка остаточного члена в зависимости от изменения указанной точки. Чтобы подчеркнуть эту зависимость, мы в этом пункте будем остаточный член порядка m обозначать $r_m(x, \Delta x)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка, в окрестности которой раскладывается данная функция по формуле Тейлора. Как и раньше, $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$.

В формулах (39.21) и (39.22) будем вместо $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(\Delta x)$ и $\varepsilon(\Delta x)$ соответственно писать $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)$ и $\varepsilon(x, \Delta x)$. В дальнейшем нам потребуется оценка остаточного члена формулы Тейлора в форме Пеано сразу для всей области существования разложения по указанной формуле.

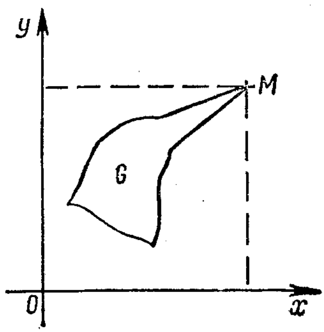

Рис. 144

Введем сначала понятие непрерывности частных производных в замыкании открытого множества. Это требует специального определения, так как в граничной точке открытого множества G даже в случае, когда функция определена на замыкании $\overline{G}$ множества G, понятие частной производной, вообще говоря, не определено (см., например, точку M границы области G на рис. 144).

Определение 1. *Функция f, определенная на открытом множестве $G \subset R^n$, называется непрерывно продолжаемой на его замыкание $\overline{G}$, если существует такая непрерывная на $\overline{G}$ функция F, что $F = f$ на G.*

Функция F называется непрерывным продолжением функции f (на $\overline{G}$) и для простоты будет также обозначаться символом f.

Очевидно в силу единственности предела функции, если у функции, определенной на G, существует непрерывное продолжение на $\bar{G}$, то оно единственно.

Определение 2. *Функция f называется непрерывно дифференцируемой (соответственно m раз непрерывно дифференцируемой) на $\bar{G}$, если функция f определена на G и все ее частные производные первого порядка (соответственно частные производные до порядка m включительно) непрерывно продолжаемы с G на $\bar{G}$.*

Упражнения. 2. Доказать, что если функция f определена на открытом множестве $G \subset R^n$ и имеет на нем непрерывно продолжаемую на его замыкание $\bar{G}$ производную $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, и в некоторой точке границы множества G существует (односторонняя) частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, то она совпадает с непрерывным продолжением в эту точку частной производной $\frac{\partial f}{\partial x_1}$.

3. Доказать, что для того, чтобы непрерывная функция, определенная на ограниченном открытом множестве $G \subset R^n$, была непрерывно продолжаемой на его замыкание, необходимо и достаточно, чтобы она была равномерно непрерывной на G. Показать, что в случае неограниченного открытого множества условие равномерной непрерывности продолжаемой функции, являясь достаточным для непрерывного продолжения, не является необходимым.

4. Построить пример непрерывной и ограниченной в области функции, которую нельзя непрерывно продолжить на замыкание этой области.

Вернемся теперь к формуле Тейлора. Пусть функция f m раз непрерывно дифференцируема на замыкании $\bar{G}$ открытого ограниченного множества G. Тогда, согласно результатам п. 39.1, в каждой точке $x \in G$ имеет место разложение (39.20) функции f по формуле Тейлора, причем стремление к нулю $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)$ в формуле (39.21) и $\varepsilon(x, \Delta x)$ в формуле (39.22) при $\rho \to 0$ равномерно на множестве G (см. определение в п. 20.2), т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} < \delta, \tag{39.26}$$

то

$$|\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |\varepsilon(x, \Delta x)| < \varepsilon$$

для всех точек $x \in G$.

Это в данном случае непосредственно следует из метода получения функций $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}$ и $\varepsilon(\Delta x)$. Действительно, в силу ограниченности и замкнутости замыкания $\bar{G}$ открытого множества G непрерывные продолжения на $\bar{G}$ частных производных порядка m данной функции равномерно непрерывны на $\bar{G}$, поэтому (см. формулу (39.13) для случая $n = 2$; в общем случае справедлива аналогичная формула) если выполнено условие (39.26), то

$$|\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)| \leqslant \omega\left(\delta, \frac{\partial f}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}, \bar{G}\right). \tag{39.27}$$

Здесь правая часть (модуль непрерывности соответствующей производной) не зависит от точки множества G и стремится к нулю при $\delta \to 0$. Поэтому из (39.27) следует равномерное стремление $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}$ к нулю на G.

Теперь можно оценить бесконечно малую $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ в формуле (39.22). Для произвольного натурального n ее можно, аналогично случаю $n=2$ (см. (39. 16)), представить в виде

$$\varepsilon(x, \Delta x) = \sum_{m_1+\ldots+m_n=m} \varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x) \left(\frac{\Delta x_1}{\rho}\right)^{m_1} \ldots \left(\frac{\Delta x_n}{\rho}\right)^{m_n}.$$

Отсюда имеем:

$$|\varepsilon(x, \Delta x)| \leqslant \sum_{m_1+\ldots+m_n=m} |\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)|. \qquad (39.28)$$

В правой части неравенства (39.28) стоит некоторое фиксированное число слагаемых; обозначим его через N. В силу уже доказанного равномерного в G стремлении к нулю функции $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)$ для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если выполнено условие $\rho(x, x+\Delta x) < \delta$, то

$$|\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{N}, \quad m_1+\ldots+m_n = m.$$

Отсюда и из неравенства (39.28) следует, что

$$|\varepsilon(x, \Delta x)| < \varepsilon. \ \square$$

Отметим еще одну оценку в целом остаточного члена формулы Тейлора, получающуюся из записи его в форме Лагранжа (39.19).

Если функция f определена на открытом множестве G и имеет на G ограниченные частные производные порядка m, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что

$$\left| \frac{\partial^m f(x)}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} \right| \leqslant M, \quad m_1+\ldots+m_n = m, \qquad x \in G, \quad (39.29)$$

то при выполнении условия $\rho(x, x+\Delta x) < \delta$ для всех $x \in G$ справедливо неравенство

$$|r_{m-1}(x, \Delta x)| \leqslant \frac{M n^m \delta^m}{m!}.$$

Это сразу следует из формулы (39.19), если абсолютные величины каждого слагаемого ее правой части оценить с помощью неравенства (39.29) и очевидного неравенства $|\Delta x_i| \leqslant \delta$.

39.4. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ПО ПАРАМЕТРУ СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ

В предыдущем пункте мы встретились с понятием равномерной сходимости на данном множестве семейства функций, зависящих от некоторого параметра, когда этот параметр стремится к определенным значениям. Такими функциями в нашем случае являлись $\varepsilon_{m_1 \dots m_n}(x, \Delta x)$ и $\varepsilon(x, \Delta x)$, где роль параметра играло Δx. В простейшем виде этот случай встречался еще раньше в п. 20.2.

Сформулируем определение равномерной сходимости семейства функций в общем случае.

Определение 3. *Пусть $X \subset R^n$, $Y \subset R^m$, $y^{(0)}$ — предельная точка множества Y или одна из бесконечностей*)* ∞, $+\infty$, $-\infty$ *(последние две бесконечности имеет смысл рассматривать только при $m = 1$). Пусть, далее, функция $\varphi(x)$ определена для всех $x \in X$, а $f(x, y)$ — для всех $x \in X$ и $y \in Y$.*

Функция $f(x, y)$ называется равномерно стремящейся на множестве X к функции $\varphi(x)$ при $y \to y^{(0)}$ и пишется

$$f(x, y) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x), \quad y \to y^{(0)}$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(y^{(0)})$ точки $y^{(0)}$, что для всех $x \in X$ и всех $y \in Y \cap \mathring{U}(y^{(0)})$, выполняется неравенство

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon. \tag{39.30}$$

Переменная y часто называется в этом случае параметром, а функция $f(x, y)$, $y \in Y$, — «семейством функций от x» (в том смысле, что эта функция при различных фиксированных $y \in Y$ задает функции переменной x).

Подобно случаю равномерной сходимости последовательности функций (см. п. 36.1) условие равномерной сходимости функций по параметру можно сформулировать, используя понятие предела, следующим образом.

Функция $f(x, y)$ равномерно стремится на множестве X к функции $\varphi(x)$ при $y \to y^{(0)}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{y \to y^0} \sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| = 0. \tag{39.31}$$

Таким образом условие $f(x, y) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, $y \to y^{(0)}$, равносильно стремлению к нулю при $y \to y^0$ функции $F(y) \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)|$. Доказательство этого утверждения совсем не сложно и

*) Бесконечности ∞, $+\infty$, $-\infty$ будем для простоты называть в дальнейшем также точками («бесконечно удаленными»).

аналогично случаю равномерной сходимости последовательности функций. Его проведение предоставляется читателю.

Справедлив в рассматриваемом случае и аналог критерия Коши равномерной сходимости последовательностей.

Теорема 4 (критерий Коши). *Для того чтобы функция $f(x, y)$ при $y \to y^{(0)}$ равномерно стремилась на множестве X к некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлась такая проколотая окрестность $\mathring{U}(y^{(0)})$ точки $y^{(0)}$, чтобы для любых*

$$y' \in \mathring{U}(y^{(0)}) \cap Y \quad \text{и} \quad y'' \in \mathring{U}(y^{(0)}) \cap Y$$

и любого $x \in X$ выполнялось неравенство

$$|f(x, y'') - f(x, y')| < \varepsilon. \tag{39.32}$$

Действительно, необходимость условия (39.32), как всегда в подобных ситуациях, легко следует из условия (39.30). Для доказательства же достаточности следует показать, что из условия (39.32) вытекает, что для любого фиксированного $x \in X$ существует $\lim\limits_{y \to y^{(0)}} f(x, y)$ и что стремление функции $f(x, y)$ к этому пределу при $y \to y^{(0)}$ происходит равномерно.

Все это также рекомендуется проделать читателю самостоятельно.

Упражнение 5. Доказать: для того чтобы функция $f(x, y)$, $x \in X$, $y \in X$ равномерно на множестве X стремилась при $y \to y^{(0)}$ к функции $\varphi(x)$, $x \in X$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $y^{(n)} \in Y$, $y^{(n)} \neq y^{(0)}$, $n = 1, 2, \ldots$, стремящейся к $y^{(0)}$, последовательность $f(x, y^{(n)})$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно на множестве X сходилась к функции $\varphi(x)$.

Примеры. 1. Рассмотрим семейство функций $f(x, y) = e^{-xy}$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y < +\infty$. Очевидно

$$\lim_{y \to +\infty} f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x > 0, \\ 1, & \text{если} \quad x = 0 \end{cases}$$

(таким образом переменная y, если использовать указанную выше терминологию, является параметром). Обозначим предельную функцию через $\varphi(x)$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x > 0, \\ 1, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases} \tag{39.33}$$

Докажем, что стремление функции $f(x, y)$ к $\varphi(x)$ при $y \to +\infty$ происходит неравномерно. Для этого достаточно показать, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что какую бы окрестность $\mathring{U}(+\infty)$ ни взять, найдутся такие $x \in [0, 1]$ и $y \in \mathring{U}(+\infty)$, что будет выполнено неравенство $|e^{-xy} - \varphi(x)| \geqslant \varepsilon_0$. Возьмем ε_0 таким, что $0 < \varepsilon_0 < 1$, и произвольную окрестность $\mathring{U}(+\infty)$. Тогда, какое бы $y \in \mathring{U}(+\infty)$ ни взять, для него $\lim\limits_{x \to 0} e^{-xy} = 1$, и поэтому найдется такое $x \in (0, 1]$, что

$$|e^{-xy} - \varphi(x)| = |e^{-xy} - 0| > \varepsilon_0.$$

Таким образом, в данном случае условия критерия Коши (см. теорему 4) не выполняются.

Однако, при любом a, $0 < a < 1$, семейство функций $f(x, y) = e^{-xy}$ при $y \to +\infty$ равномерно стремится к нулю на отрезке $[a, 1]$. Проверим в этом случае выполнение условий критерия Коши (см. теорему 4). Для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\eta_\varepsilon > 0$, такое, что $e^{-a\eta_\varepsilon} < \varepsilon$ $\left(\text{достаточно взять любое } \eta > \frac{|\ln \varepsilon|}{a}\right)$; поэтому для всех $y > \eta_\varepsilon$ и всех $x \in [a, 1]$ будем иметь

$$|e^{-xy} - 0| = e^{-xy} < e^{-a\eta_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Конечно, исследование равномерной сходимости рассматриваемого семейства функций можно выполнить и применив критерий (39.31). Действительно, использовав формулу (39.33), получим

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |e^{-xy} - \varphi(x)| \geqslant \sup_{0 < x \leqslant 1} e^{-xy} = 1,$$

поэтому условие (39.31) заведомо не выполняется. Если же $0 < a < 1$, то

$$\lim_{y \to +\infty} \sup_{a \leqslant x \leqslant 1} |e^{-xy} - \varphi(x)| = \lim_{y \to +\infty} \sup_{a \leqslant x \leqslant 1} e^{-xy} = \lim_{y \to +\infty} e^{-ay} = 0.$$

Таким образом,

$$e^{-xy} \underset{[0,\,1]}{\not\rightrightarrows} \varphi(x), \quad e^{-xy} \underset{[0,\,a]}{\rightrightarrows} \varphi(x), \quad y \to +\infty, \quad 0 < a < 1.$$

2. В случае, когда Y является множеством натуральных чисел $Y = \{1, 2, 3, \ldots\}$, а $y^{(0)} = +\infty$, приведенное определение равномерной сходимости по параметру превращается в определение равномерной сходимости последовательности функций $f_n(x) = f(x, n)$, $n = 1, 2, \ldots$, на множестве X.

3. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике $Q = \{(x, y)\colon -\infty < a \leqslant x \leqslant b < +\infty,\ -\infty < c \leqslant y \leqslant d < +\infty\}$ и пусть $y_0 \in [c, d]$.

Обозначим через $\omega(\delta, f)$ модуль непрерывности функции f в прямоугольнике Q; тогда

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| \leqslant \omega(|y - y_0|;\ f), \quad (x, y) \in Q. \qquad (39.34)$$

Правая часть этого неравенства не зависит от x и в силу равномерной непрерывности функции f на прямоугольнике Q $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta; f) = 0$. Поэтому из неравенства (39.34) следует, что при $y \to y_0$ функция $f(x, y)$ равномерно на отрезке $[a, b]$ стремится к функции $f(x, y_0)$.

Упражнение 6. Доказать, что если семейство функций $f(x, y)$, $x \in X \subset R^n$, $y \in Y \subset R^m$ таково, что функции $f(x, y)$ при любом фиксированном $y \in Y$ непрерывны по x на множестве X и равномерно на этом множестве стремятся к $\varphi(x)$ при $y \to y^{(0)}$, то $\varphi(x)$ также непрерывна на множестве X.

39.5. ЗАМЕЧАНИЯ О РЯДАХ ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Если функция $f(x)$ определена и бесконечно много раз дифференцируема в некоторой δ-окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in R^n$, то для этой функции формула Тейлора (39.20) будет, очевидно, справедливой при любом натуральном $n = 1, 2, \ldots$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i^2 < \delta^2$. Если при этом ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{k\}} f(x^{(0)})$$

будет сходиться к $\Delta y = f(x) - f(x^{(0)})$ (см. п. 38.2), то получится формула

$$\Delta y = f(x) - f(x^{(0)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{k\}} f(x^{(0)}),$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $x_i - x_i^{(0)} = \Delta x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда, перенеся $f(x^{(0)})$ в правую часть, получим разложение функции в степенной ряд, называемый *рядом Тейлора* функции f:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[(x_1 - x_1^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - x_n^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{\{k\}} f(x^{(0)}),$$

или, что то же

$$f(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k f(x^{(0)}) (x - x^{(0)})^k,$$

где $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — мультииндекс.

Упражнение 7. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x, y) = e^{x+y}$.

§ 40. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

40.1. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Изучаемые в настоящем и некоторых следующих параграфах вопросы носят аналитический характер, и их доказательства не усложняются при увеличении числа переменных. Поэтому мы