Упражнение 6. Доказать, что если семейство функций $f(x, y)$, $x \in X \subset R^n$, $y \in Y \in R^m$ таково, что функции $f(x, y)$ при любом фиксированном $y \in Y$ непрерывны по x на множестве X и равномерно на этом множестве стремятся к $\varphi(x)$ при $y \to y^{(0)}$, то $\varphi(x)$ также непрерывна на множестве X.

39.5. ЗАМЕЧАНИЯ О РЯДАХ ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Если функция $f(x)$ определена и бесконечно много раз дифференцируема в некоторой δ-окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in R^n$, то для этой функции формула Тейлора (39.20) будет, очевидно, справедливой при любом натуральном $n = 1, 2, \ldots$ и $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2 < \delta^2$. Если при этом ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{k\}} f(x^{(0)})$$

будет сходиться к $\Delta y = f(x) - f(x^{(0)})$ (см. п. 38.2), то получится формула

$$\Delta y = f(x) - f(x^{(0)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{k\}} f(x^{(0)}),$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $x_i - x_i^{(0)} = \Delta x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда, перенеся $f(x^{(0)})$ в правую часть, получим разложение функции в степенной ряд, называемый *рядом Тейлора* функции f:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[(x_1 - x_1^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - x_n^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{\{k\}} f(x^{(0)}),$$

или, что то же

$$f(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k f(x^{(0)}) (x - x^{(0)})^k,$$

где $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — мультииндекс.

Упражнение 7. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x, y) = e^{x+y}$.

§ 40. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

40.1. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Изучаемые в настоящем и некоторых следующих параграфах вопросы носят аналитический характер, и их доказательства не усложняются при увеличении числа переменных. Поэтому мы проведем их рассмотрение сразу в общем n-мерном случае, указывая при необходимости их специфические особенности для случаев $n=2$ и $n=3$.

Определение 1. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $E\subset R^n$. Точка $x^{(0)}\in E$ называется точкой строгого максимума, соответственно строгого минимума, если существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что для всех $x\in U(x^{(0)})\cap E$, $x\neq x^{(0)}$, выполняется неравенство $f(x)<f(x^{(0)})$ соответственно неравенство $f(x)>f(x^{(0)})$.*

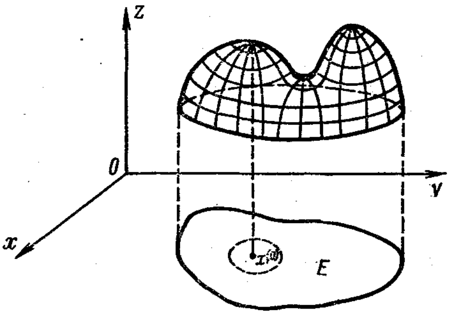

Рис. 145

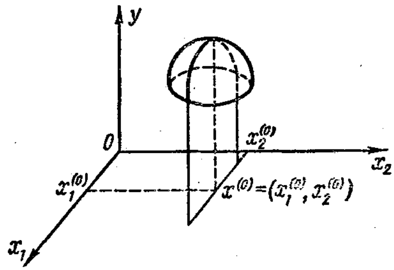

Рис. 146

Таким образом, точка строгого максимума (соответственно строгого минимума) характеризуется тем, что $\Delta f=f(x)-f(x^{(0)})<0$ (соответственно $\Delta f>0$) при всех $x\in U(x^{(0)})\cap E$, $x\neq x^{(0)}$ (рис. 145).

Если же для точки $x^{(0)}$ существует такая окрестность $U(x^{(0)})$, что при всех $x\in U(x^{(0)})\cap E$ выполняется условие $f(x)\leqslant f(x^{(0)})$ (соответственно $f(x)\geqslant f(x^{(0)})$), то $x^{(0)}$ называется просто точкой максимума (соответственно минимума).

Определение 2. *Точки (строгого) максимума и минимума функции называются точками (строгого) экстремума.*

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$; если она является точкой экстремума функции $f(x)$ и если в ней существует какая-либо из производных $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ (j может принимать одно из значений $1, 2, \ldots, n$), то она равна нулю, $\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_j}=0$.*

Следствие. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке экстремума $x^{(0)}$, то ее дифференциал равен нулю в этой точке, $df(x^{(0)})=0$.*

Доказательство (теоремы и следствия). Пусть для определенности $j=1$. Если $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ является точкой экстремума для функции $f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$, то $x_1^{(0)}$ является точкой экстремума для функции $f(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ одной переменной x_1 (рис. 146), а поэтому если в этой точке существует производная

$\frac{\partial f}{\partial x_1}$, то по теореме Ферма (см. п. 11.1) она равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} = \left.\frac{df(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{dx_1}\right|_{x_1 = x_1^{(0)}} = 0.$$

Аналогично обстоит дело в случае любой переменной x_j ($j = 2, \ldots, n$).

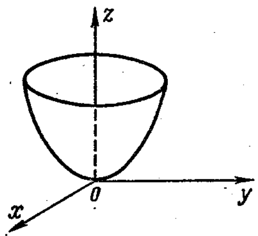

Рис. 147

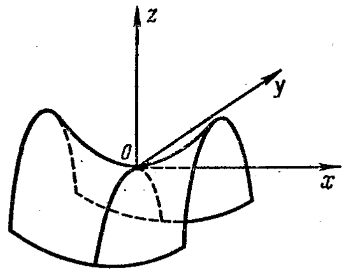

Рис. 148

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке экстремума $x^{(0)}$, то в этой точке существуют все производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и, согласно доказанному, все они равны нулю, поэтому и

$$df(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{df(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i = 0. \ \square$$

Примеры. 1. Найдем точки экстремума функции $z = x^2 + y^2$. Точки экстремума в силу доказанного находятся среди тех, для которых $dz = 0$. Так как $dz = 2x\,dx + 2y\,dy$, то условие $dz = 0$ выполняется в единственной точке (0, 0). В этой точке $z = 0$, во всех же других точках $z = x^2 + y^2 > 0$. Поэтому (0, 0) является точкой строгого минимума для функции $z = x^2 + y^2$ (рис. 147).

2. Исследуем точки экстремума функции $z = x^2 - y^2$. Поступая аналогично предыдущему случаю, находим, что условие $dz = 0$ снова выполняется в точке (0, 0) и в этой точке $z = 0$. Однако здесь при $y = 0$ и любых $x \neq 0$ имеем $z > 0$, а при $x = 0$ и любом $y \neq 0$ имеем $z < 0$. Поэтому точка (0, 0) не является точкой экстремума, и, значит, функция $z = x^2 - y^2$ вообще не имеет экстремальных точек (рис. 148).

40.2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СТРОГОГО ЭКСТРЕМУМА

Напомним несколько определений из курса алгебры.

Определение 3. *Квадратичная форма* $A(x) = A(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, $a_{ji} = a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, *называется положи-*

тельно (соответственно отрицательно) определенной, если $A(x) > 0$ *(соответственно* $A(x) < 0$) *для любой точки* $x \in R^n$, $x \neq 0$.

Квадратичная форма, являющаяся положительно или отрицательно определенной, называется также просто определенной (или знакоопределенной) квадратичной формой.

Определение 4. *Квадратичная форма, принимающая как положительные, так и отрицательные значения, называется неопределенной.*

Лемма 1. *Пусть* S — *единичная сфера в* R^n:

$$S = \{x\colon x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\},$$

и пусть $A(x)$ — *определенная квадратичная форма; тогда*

$$\inf_{x \in S} |A(x)| = \mu > 0.$$

Доказательство. Функция $A(x)$ является многочленом второй степени по переменным $x_1, \ldots, x_n$, поэтому $A(x)$, а, следовательно, и $|A(x)|$ непрерывны во всем пространстве R^n. Отсюда вытекает, что функция $|A(x)|$ непрерывна на компакте S. Согласно теореме Вейерштрасса, функция $|A(x)|$ достигает на S своей нижней грани, т. е. существует такая точка $x^{(0)} \in S$, что

$$\mu \overset{\text{def}}{=} \inf_{x \in S} |A(x)| = |A(x^{(0)})|.$$

По определению знакоопределенной квадратичной формы $|A(x)| > 0$ для всех точек $x \in S$, значит, в частности, $\mu = |A(x^{(0)})| > 0$. □

Определение 5. *Пусть функция* f *дифференцируема в точке* $x^{(0)} \in R^n$. *Если* $df(x^{(0)}) = 0$, *то* $x^{(0)}$ *называется стационарной точкой функции* f.

Очевидно, что точка $x^{(0)}$, в которой функция f дифференцируема, является стационарной в том и только в том случае, если

$$\frac{df(x^{(0)})}{dx_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{40.1}$$

Согласно следствию из теоремы 1, точка экстремума, в которой функция f дифференцируема, является стационарной; обратное, конечно, вообще говоря, неверно: не всякая стационарная точка, в которой функция дифференцируема, является точкой экстремума (см. пример 2 в конце п. 40.1).

Теорема 2 (достаточные условия строгого экстремума). *Пусть функция* f *определена и имеет непрерывные производные второго порядка в некоторой окрестности точки* $x^{(0)}$. *Пусть* $x^{(0)}$ *является стационарной точкой функции* f; *тогда если квадратичная форма*

$$A(dx_1, \ldots, dx_n) = \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\, dx_j, \tag{40.2}$$

т. е. второй дифференциал функции f в точке $x^{(0)}$, положительно определенна (отрицательно определенна), то $x^{(0)}$ является точкой строгого минимума (соответственно строгого максимума); если же квадратичная форма (40.2) *неопределенна, то в точке $x^{(0)}$ нет экстремума.*

Доказательство. Пусть $U(x^{(0)}, \delta_0)$ — δ_0-окрестность стационарной для функции f точки $x^{(0)}$, в которой функция f имеет непрерывные вторые производные. Пусть точка

$$x^{(0)} + dx = (x_1^{(0)} + dx_1, \ \ldots, \ x_n^{(0)} + dx_n)$$

принадлежит этой окрестности.

По формуле Тейлора (см. (39.23)), учитывая условия стационарности (40.1), получим

$$\Delta f = f(x^{(0)} + dx) - f(x^{(0)}) = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \, dx_j + \varepsilon(dx) \rho^2,$$

где $dx = (dx_1, \ldots, dx_n)$, $\rho^2 = dx_1^2 + \ldots + dx_n^2$, и

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon(dx) = 0, \tag{40.3}$$

или

$$\Delta f = \frac{\rho^2}{2} \left[\sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} \frac{dx_i}{\rho} \frac{dx_j}{\rho} + 2\varepsilon(dx) \right] =$$
$$= \frac{\rho^2}{2} \left[A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ \ldots, \ \frac{dx_n}{\rho}\right) + 2\varepsilon(dx) \right]. \tag{40.4}$$

Точка $\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ \ldots, \ \frac{dx_n}{\rho}\right)$ лежит на единичной сфере S (т. е. на сфере с центром в начале координат и радиусом, равным 1), ибо $\left(\frac{dx_1}{\rho}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_n}{\rho}\right)^2 = 1$.

Пусть квадратичная форма (40.2) знакоопределенна. Тогда, согласно лемме, $\inf\limits_S |A| = \mu > 0$. Выберем δ, $0 < \delta < \delta_0$, так, чтобы $2|\varepsilon(dx)| < \mu$ при $\rho < \delta$. Тогда при $\rho < \delta$, т. е. при $x^{(0)} + dx \in U(x^{(0)}, \delta)$ и $dx \neq 0$, все выражение в квадратных скобках в правой части формулы (40.4) будет иметь тот же знак, что и первое слагаемое $A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ \ldots, \ \frac{dx_n}{\rho}\right)$:

$$\operatorname{sign} \Delta f = \operatorname{sign} A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ \ldots, \ \frac{dx_n}{\rho}\right).$$

Поэтому, если квадратичная форма (40.2) является положительно определенной, то $\Delta f > 0$, а если отрицательно определенной, то $\Delta f < 0$ при $x^{(0)} + dx \in \mathring{U}(x^{(0)}, \delta)$. Значит, в первом случае $x^{(0)}$ является точкой строгого минимума, а во втором — точкой строгого максимума.

Пусть теперь квадратичная форма (40.2) является неопределенной; это означает, что существуют две такие точки $dx' = (dx'_1, \ldots, dx'_n)$ и $dx'' = (dx''_1, \ldots, dx''_n)$, что $A(dx'_1, \ldots, dx'_n) > 0$, а $A(dx''_1, \ldots, dx''_n) < 0$. Мы не можем на основании этого сразу сказать, что приращение функции Δf меняет знак в любой окрестности точки $x^{(0)}$, так как точки $x^{(0)} + dx' = (x_1^{(0)} + dx'_1, \ldots \ldots, x_n^{(0)} + dx'_n)$ и $x^{(0)} + dx'' = (x_1^{(0)} + dx''_1, \ldots, x_n^{(0)} + dx''_n)$ могут, вообще говоря, даже и не принадлежать области определения функции f. Однако, нужный нам результат будет следовать из того, что квадратичная форма $A(dx)$ сохраняет один и тот же знак или равенство нулю на каждой прямой, проходящей через точку $x^{(0)}$, из которой удалена сама эта точка, а значение $A\left(\frac{dx}{\rho}\right)$, $dx \neq 0$, вообще не зависит от выбора точки на этой прямой.

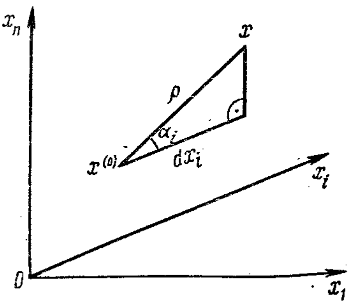

Рис. 149

Рассмотрим точку $dx' = (dx'_1, \ldots, dx'_n)$. Проведем полупрямую, начинающуюся в точке $x^{(0)}$ и проходящую через точку $x^{(0)} + dx'$. Для любой точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$ этой полупрямой положим $dx_i = x_i - x_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} dx_i^2}$. Тогда (рис. 149)

$$\frac{dx_i}{\rho} = \cos\alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{40.5}$$

где $\cos\alpha_i$ суть направляющие косинусы рассматриваемой полупрямой. Поэтому точка

$$\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right) = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n), \tag{40.6}$$

лежащая, очевидно, на единичной сфере*) S с центром $x^{(0)}$, будет одной и той же для всех точек x этой полупрямой, т. е. точка (40.6) не зависит от расстояния ρ между x и $x^{(0)}$.

Следовательно и значение квадратичной формы (40.2) в точке (40.6), т. е. $A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right)$, не зависит от ρ. Отсюда для любой точки (40.6) имеем

$$A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right) = A\left(\frac{dx'_1}{\rho'}, \ldots, \frac{dx'_n}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho'^2} A(dx'_1, \ldots, dx'_n) > 0.$$

Пусть $A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right) = \mu' > 0$. Выберем $\rho_0 > 0$ так, чтобы при $\rho < \rho_0$ имело место неравенство $2|\varepsilon(dx)| < \mu'$, что возможно

*) Напомним, что для направляющих косинусов справедливо равенство $\cos^2\alpha_1 + \ldots + \cos^2\alpha_n = 1$.

в силу (40.3). Тогда для любой точки $x^{(0)}+dx$, лежащей на полупрямой (40.5) и такой, что $0<\rho=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} dx_i^2}<\rho_0$, в формуле (40.4) выражение в квадратных скобках будет иметь знак первого члена, и поэтому $\Delta f>0$. Итак, в любой окрестности точки $x^{(0)}$ имеются точки, для которых $\Delta f>0$.

Аналогично, исходя из отрицательного значения квадратичной формы (40.2) в точке (dx_i''), доказывается, что в любой окрестности точки $x^{(0)}$ существуют точки, для которых $\Delta f<0$. А это и означает, что в рассматриваемом случае $x^{(0)}$ не является точкой экстремума. □

При практическом применении этой теоремы возникает вопрос: как установить, будет ли квадратичная форма (40.2) положительно или отрицательно определенной. Для этой цели может служить, например, так называемый критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы, доказываемый в курсах алгебры. Он состоит в следующем.

Для того чтобы квадратичная форма

$$A(x)=A(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \tag{40.7}$$

у которой $a_{ij}=a_{ji}$, i, $j=1, 2, \ldots, n$, была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{11}>0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0, \ \ldots, \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}>0.$$

Замечая, что квадратичная форма $A(x)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда квадратичная форма $-A(x)=\sum\limits_{i,\ j=1}^{n}(-a_{ij})x_ix_j$ положительно определена, получаем, пользуясь известными свойствами определителя, следующий критерий отрицательной определенности.

Для того чтобы квадратичная форма (40.7) *была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$a_{11}<0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}<0, \ \ldots,$$

$$(-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}>0.$$

Сформулируем теперь теорему 2 для случая двух переменных, выразив условия, накладываемые на квадратичную форму (40.2), в явном виде через вторые частные производные.

Теорема 3. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), которая является стационарной для $f(x, y)$, т. е. в ней*

$$f_x = f_y = 0. \tag{40.8}$$

Тогда если в (x_0, y_0)

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0, \tag{40.9}$$

то она является точкой строгого экстремума, а именно строгого максимума, если в ней

$$f_{xx} < 0^{*)},$$

и строгого минимума, если

$$f_{xx} > 0.$$

Если же в точке (x_0, y_0)

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0, \tag{40.10}$$

то экстремума в ней нет.

Наконец, когда

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0 \tag{40.11}$$

в точке (x_0, y_0), то может случиться, что экстремум в ней есть, и может случиться, что экстремума нет.

Действительно, если $f_{xx} \neq 0$ в точке (x_0, y_0), то квадратичную форму (40.2) в нашем случае можно записать в виде

$$A(dx, dy) = f_{xx}\,dx^2 + 2f_{xy}\,dx\,dy + f_{yy}\,dy^2 = \\ = \frac{1}{f_{xx}}[(f_{xx}\,dx + f_{xy}\,dy)^2 + (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)\,dy^2]. \tag{40.12}$$

Все частные производные здесь и ниже взяты в точке (x_0, y_0).

Мы непосредственно видим, что при выполнении условия (40.9) выражение в квадратных скобках в формуле (40.12) положительно при $dx^2 + dy^2 > 0$, т. е. $A(dx, dy)$ является определенной квадратичной формой, а именно положительно определенной при $f_{xx} > 0$ и отрицательно определенной при $f_{xx} < 0$. Это, конечно, следует и из вышеприведенного критерия Сильвестра. В первом случае, согласно теореме 2, (x_0, y_0) является точкой строгого минимума, а во втором — точкой строгого максимума. Если же выполнено условие (40.10), то при $dy = 0$, $dx \neq 0$, из (40.12) имеем $\operatorname{sign} A(dx, 0) = \operatorname{sign} f_{xx}$, а при $dx = f_{xy}$, $dy = -f_{xx}$ получим $\operatorname{sign} A(f_{xy}, -f_{xx}) = -\operatorname{sign} f_{xx}$, откуда следует, что квадратичная

*) Очевидно, из условия (40.9) следует, что $f_{xx} \neq 0$ в точке (x_0, y_0).

форма $A(dx, dy)$ при выполнении условия (40.10) является неопределенной.

Итак, полностью разобран случай

$$f_{xx} \neq 0 \quad \text{и} \quad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0.$$

Случай

$$f_{xx} = 0, \quad f_{yy} \neq 0 \quad \text{и} \quad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$$

исследуется аналогично.

Если же $f_{xx} = f_{yy} = 0$, но по-прежнему $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$, то, очевидно, $f_{xy} \neq 0$, следовательно, в этом случае выполняется условие (40.10) и $A(dx, dy) = 2f_{xy}\,dx\,dy$. Отсюда сразу видно, что квадратичная форма $A(dx, dy)$ при сделанных предположениях является неопределенной, ибо $\operatorname{sign} A(dx, dy) = -\operatorname{sign} A(dx, -dy)$. Поэтому достаточно взять сначала dx и dy одного знака, а затем разных знаков, чтобы получить значения квадратичной формы разных знаков. По теореме 2 (x_0, y_0) не является в этом случае точкой экстремума.

Наконец, случай $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = 0$ несовместим с предположением $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$. Таким образом, разобраны все возможные случаи при выполнении неравенства $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$.

Для завершения доказательства теоремы нам достаточно показать на примерах, что, когда имеет место соотношение (40.11), экстремум может быть, а может и не быть.

У функции $z = x^2 + 2xy + y^2$ точка $(0, 0)$ является стационарной, и в ней $z_{xx} = z_{xy} = z_{yy} = 2$, и, значит, выполняется условие (40.11). Замечая, что $z = (x + y)^2$, видим, что всюду $z \geqslant 0$, причем $z = 0$ на прямой $x + y = 0$; поэтому точка $(0, 0)$ является точкой экстремума, правда, нестрогого.

Для функции $z = xy^3$ точка $(0, 0)$ также является стационарной, и в ней $z_{xx} = z_{yy} = z_{xy} = 0$, поэтому условие (40.11) также выполняется. Однако в силу того, что в формулу, задающую эту функцию, переменные x и y входят в нечетных степенях, функция меняет знак в любой окрестности нуля, значит, $(0, 0)$ не является точкой экстремума.

§ 40.3. ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ЭКСТРЕМУМАХ НА МНОЖЕСТВАХ

Пусть функция f дифференцируема на открытом ограниченном множестве G и непрерывна на его замыкании $\overline{G}$. Пусть требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции f на множестве $\overline{G}$ (они существуют по теореме 3 п. 19.5). Для этого можно, например, найти все стационарные точки функции f в G, вычислить в них значения функции и выбрать, если, конечно, это возможно (а теоретически возможно это, например, когда число стационарных точек конечно), точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения из всех значений в стационарных точках. После этого следует сравнить эти значения со значениями, которые функция принимает на границе открытого множества G, например, найдя, если это удается сделать, наибольшее и наименьшее значения функции f на границе области G. Сравнив наибольшее и наименьшее значения в стационарных точках с наибольшим и наименьшим значениями на границе множества G, мы можем, очевидно, найти искомый максимум и минимум f на $\overline{G}$.

В случае, когда G — плоская область и ее граница является кривой, заданной некоторым представлением $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, вопрос о нахождении экстремальных значений функции $f(x, y)$ на границе G сводится к исследованию на экстремум функции одного переменного $f(x(t), y(t))$, что делается уже известными нам методами.

Методы, которые можно применять в многомерном случае для отыскания экстремальных точек на границе области будут рассмотрены в § 43.

Упражнения 1. Найти экстремумы функции $z=x^3+12xy^2-15x-24y$.

2. Имеет ли функция $z=x^4y^2-3x^2y+2x+y$ экстремум в точке $(1, 1)$?

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+y^2-4x-2y+4$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x=4$, $y=-1$, $x-y=3$.

4. Пусть $a=\text{const}>0$, $E=\{(x, y): |x|<a, y \in R\}$. Найти все экстремумы функции $z=\frac{3}{2a}x^2+\sqrt{6(a^2-x^2)}\cos y$ в E и все ее наибольшие и наименьшие значения в $\overline{E}$.

5. Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна $6a^2$. При каких значениях длин ребер его объем — наибольший?

§ 41. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

41.1 НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ОДНИМ УРАВНЕНИЕМ

Выясним условия, при которых одно уравнение с несколькими переменными определяет однозначную функцию, т. е. определяет одну из этих переменных как функцию остальных. Начнем наше рассмотрение с изучения уравнения, содержащего два неизвестных,

$$F(x, y)=0.$$

Если функция двух переменных $F(x, y)$ задана на некотором подмножестве A плоскости R^2_{xy}, $A \subset R^2_{xy}$ и существует такая функция одной переменной $y=f(x)$, определенная на множестве $B \subset \boldsymbol{R}_x$, содержащемся в проекции множества A на ось Ox, что для всех $x \in B$ имеет место $(x, f(x)) \in A$ и справедливо тождество $F(x, f(x))=0$, то f называется *неявной функцией*, определяемой уравнением $F(x, y)=0$.